

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з навчально-методичної роботи
ЗПО «Дніпровський професійний технологічний
коледж»

Сergій ГОРДІЄНКО
«28» _____ серпня 2026 р.



КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Сигнали і процеси в радіотехніці»

Тема 3. Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

Документ містить ознайомчий фрагмент.

Повна версія доступна в електронній бібліотеці закладу після входу в особистий кабінет студента.

Розроблено для здобувачів
фахової передвищої освіти
Спеціальність: G5 Електронні комунікації
та радіотехніка
Викладач - Володимир ПУСТОВОЙТ

Дніпро - 2026

ЗМІСТ

Вступ. Від дискретного до суцільного спектра

3.1. Перетворення Фур'є. Спектральна щільність.

3.1.1. Граничний перехід від ряду до інтеграла Фур'є

3.1.2. Пряме та обернене перетворення Фур'є

3.1.3. Фізичний зміст спектральної щільності

3.2. Спектр одиночного імпульсу. Функція Дірака.

3.2.1. Спектральна щільність прямокутного імпульсу

3.2.2. Розподіл енергії та ефективна ширина спектра

3.2.3. Функція Дірака (δ -функція) та її властивості

3.2.4. Спектр постійної напруги (DC)

3.3. Властивості спектральної щільності (теорема зсуву).

3.3.1. Лінійність та зсув сигналу в часі

3.3.2. Зміна масштабу часу (стиснення/розтягнення)

3.3.3. Диференціювання та інтегрування сигналів

Висновки

Питання для самоконтролю

ВСТУП. ВІД ДИСКРЕТНОГО ДО СУЦІЛЬНОГО СПЕКТРА

Шановні здобувачі освіти! У попередній темі ми докладно вивчили спектральний аналіз періодичних сигналів за допомогою рядів Фур'є. Ми з'ясували, що періодичні коливання мають **дискретний (лінійчастий) спектр**, який складається з гармонік із частотами, кратними основній частоті $\omega_1 = 2\pi/T$ [cite: 2].

Проте в реальній радіотехніці та телекомунікаціях ми найчастіше маємо справу з **неперіодичними сигналами**. Одиночний радарний імпульс, пакет цифрових даних у мережі Ethernet, непередбачуваний шум в антені, або натискання клавіші на клавіатурі — все це процеси, які не повторюються до нескінченності. Як описати частотний склад сигналу, який існує лише на обмеженому інтервалі часу?

Для вирішення цієї задачі ми маємо здійснити математичний граничний перехід, розширивши період повторення сигналу до нескінченності. Це приведе нас до одного з найвеличніших інструментів сучасної інженерії — **інтегрального перетворення Фур'є** та концепції **суцільного спектра**.

3.1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ

3.1.1. Граничний перехід від ряду до інтеграла Фур'є

Уявімо періодичну послідовність імпульсів з періодом T . Відстань між сусідніми лініями (гармоніками) у спектрі дорівнює $\Delta\omega = 2\pi/T$ [cite: 2].

Що відбудеться, якщо ми почнемо збільшувати період T , залишаючи тривалість самого імпульсу t_i незмінною?

1. Імпульси будуть віддалятися один від одного, і в границі, коли $T \rightarrow \infty$, у нас залишиться лише один (одиначний) неперіодичний імпульс.
2. Оскільки $\Delta\omega = 2\pi/T$, то при $T \rightarrow \infty$ відстань між спектральними лініями $\Delta\omega$ прямує до нуля ($\Delta\omega \rightarrow d\omega$).
3. Амплітуди самих гармонік, які обернено пропорційні періоду T , стануть нескінченно малими величинами [cite: 2].

Отже, спектр перетворюється з дискретного на **суцільний (неперервний)**. Суцільний спектр — це спектр, що складається з нескінченної кількості гармонійних коливань із нескінченно малими амплітудами, частоти яких щільно заповнюють вісь від 0 до $+\infty$ [cite: 2].

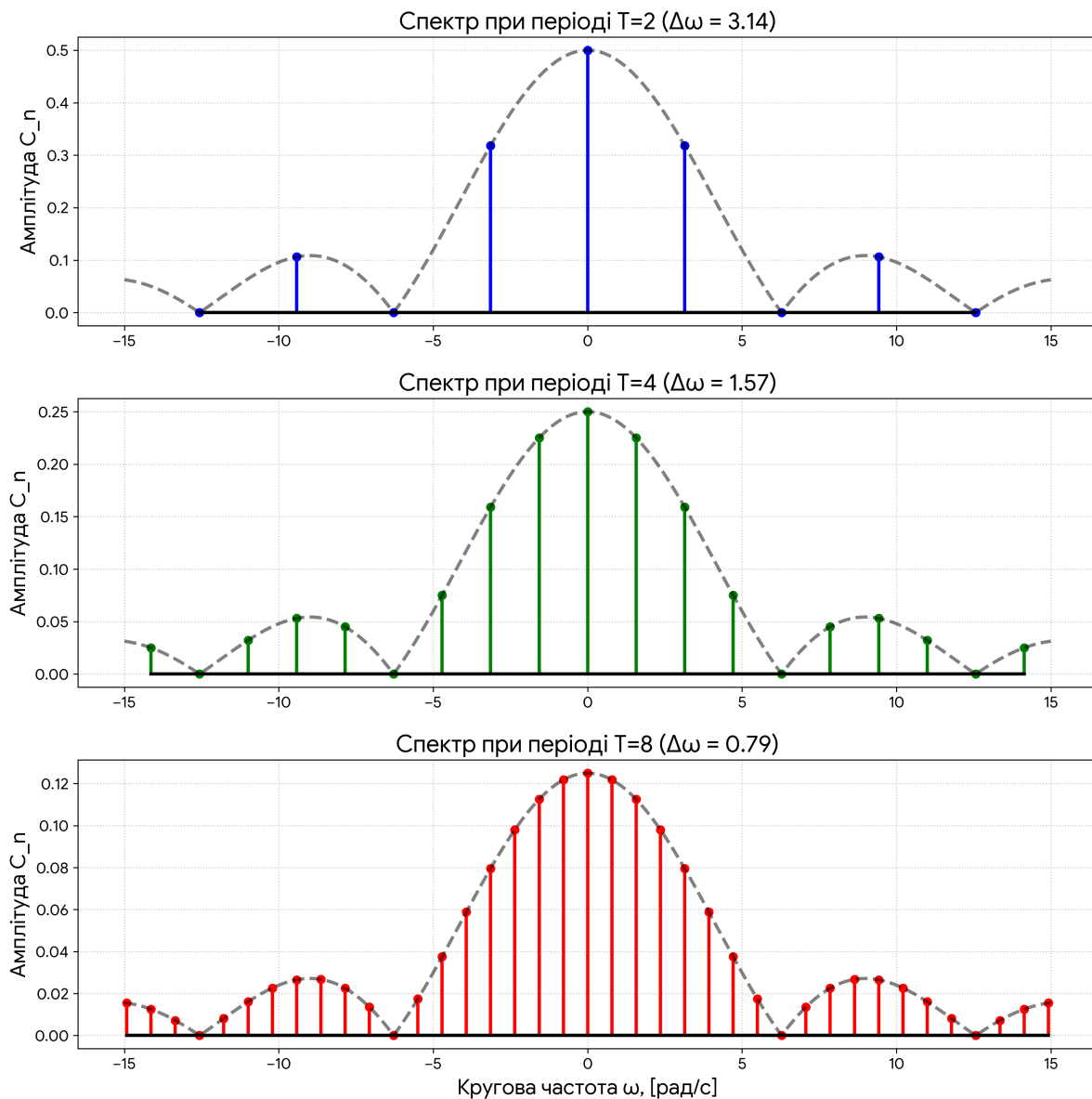


Рис. 1. Граничний перехід. Зі збільшенням періоду T (зверху вниз) спектральні лінії ущільнюються, а їх амплітуди зменшуються, "зливаючись" у суцільну огибаючу.

3.1.2. Пряме та обернене перетворення Фур'є

Оскільки амплітуда окремої гармоніки в суцільному спектрі дорівнює нулю, ми вже не можемо оперувати поняттям "амплітуда". Замість цього вводиться поняття **спектральної щільності** (Spectral Density).

Застосовуючи граничний перехід до комплексної форми ряду Фур'є, сума перетворюється на інтеграл, а дискретна частота $n\omega_1$ — на неперервну змінну ω . В результаті ми отримуємо пару інтегральних перетворень Фур'є [cite: 2]:

Пряме перетворення Фур'є:

$$S(j\omega) = \int s(t) e^{(-j\omega t)} dt$$

(межі інтегрування від $-\infty$ до $+\infty$)

Ця формула дозволяє перейти від часової функції сигналу $s(t)$ до його спектральної щільності $S(j\omega)$ у частотній області [cite: 2].

Обернене перетворення Фур'є:

$$s(t) = (1 / 2\pi) \int S(j\omega) e^{(j\omega t)} d\omega$$

(межі інтегрування від $-\infty$ до $+\infty$)

Ця формула показує, що одиночний імпульс можна "зібрати" (синтезувати) з нескінченної кількості гармонік із суцільним спектром [cite: 2].

3.1.3. Амплітудна та фазова спектральна щільність

Спектральна щільність $S(j\omega)$ у загальному випадку є комплексною функцією. Використовуючи формулу Ейлера, її можна представити в алгебраїчній формі:

$$S(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

де $A(\omega)$ та $B(\omega)$ — дійсна та уявна частини, що обчислюються як інтеграли від $s(t)\cos(\omega t)$ та $-s(t)\sin(\omega t)$ відповідно [cite: 2].

Переходячи до показової форми, спектральну щільність записують як:

$$S(j\omega) = |S(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

де:

- $|S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ — модуль спектральної щільності (амплітудний неперервний спектр). Він є парною функцією частоти [cite: 2].
- $\theta(\omega) = \arctg(B(\omega) / A(\omega))$ — аргумент спектральної щільності (фазовий неперервний спектр). Він є непарною функцією частоти [cite: 2].

Фізичний зміст спектральної щільності:

Модуль спектральної щільності $|S(j\omega)|$ показує, як розподілена амплітуда (або енергія) сигналу по осі частот. Її розмірність дорівнює розмірності сигналу, помноженій на час. Якщо $s(t)$ — це напруга у Вольтах [В], то спектральна щільність має розмірність [В·с] або [В/Гц].

3.2. СПЕКТР ОДИНОЧНОГО ІМПУЛЬСУ. ФУНКЦІЯ ДІРАКА

3.2.1. Спектральна щільність прямокутного імпульсу

Розглянемо найпоширеніший у цифровій техніці сигнал — одиночний прямокутний відеоімпульс. Нехай його амплітуда дорівнює E , а тривалість — t_i . Для спрощення обчислень розташуємо його симетрично відносно осі ординат (від $-t_i/2$ до $t_i/2$) [cite: 2]. Сигнал задається як:

$$s(t) = E \text{ при } -t_i/2 \leq t \leq t_i/2;$$

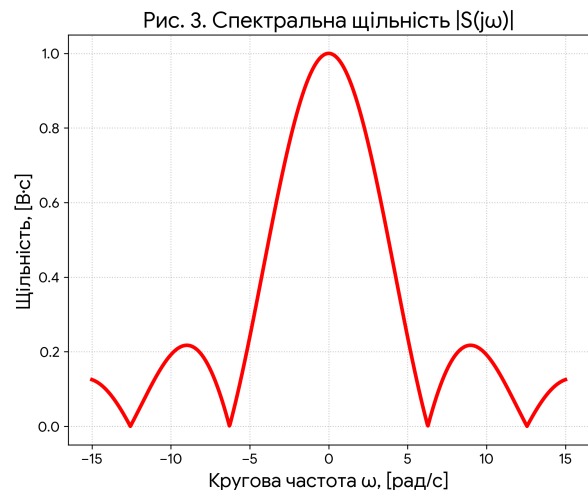
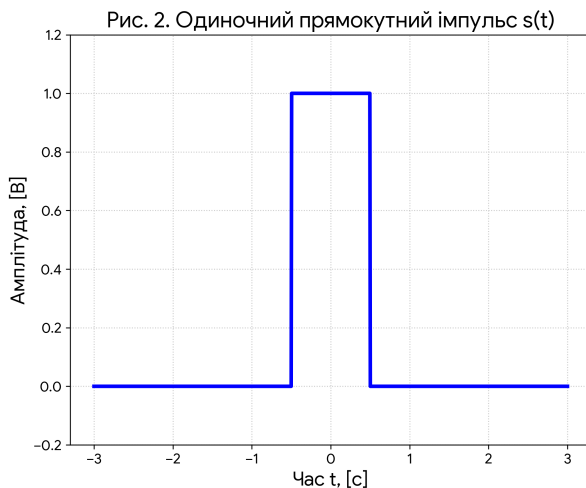
$$s(t) = 0 \text{ при } |t| > t_i/2.$$

Оскільки функція є парною, уявна частина спектральної щільності $B(\omega) = 0$. Застосуємо пряме перетворення Фур'є (інтегруючи лише там, де сигнал не нульовий) [cite: 2]:

$$S(j\omega) = \int E e^{(-j\omega t)} dt \text{ (від } -t_i/2 \text{ до } t_i/2)$$

Розв'язавши інтеграл, отримуємо класичну формулу:

$$S(j\omega) = E * t_i * [\sin(\omega t_i / 2) / (\omega t_i / 2)]$$

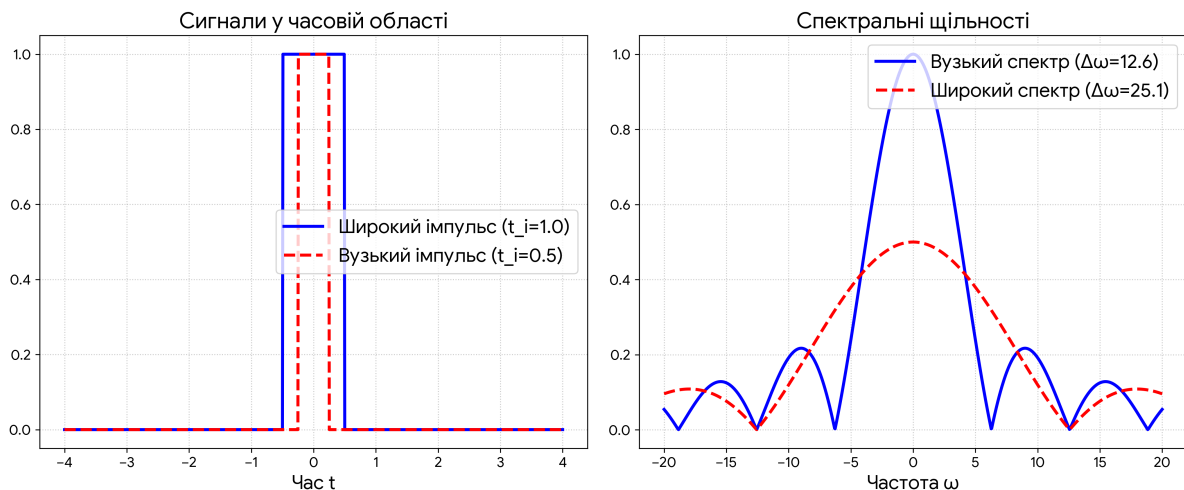


Як видно з графіків (Рис. 2 та Рис. 3), спектральна щільність одиночного імпульсу має форму функції **sinc(x)**. З ростом частоти амплітуда спектральних складових немонотонно загасає, проходячи через нулі. Нулі функції виникають там, де аргумент синуса кратний π , тобто на частотах $\omega_k = k * 2\pi/t_i$ [cite: 2].

3.2.2. Зв'язок між тривалістю імпульсу та шириною спектра

Цей зв'язок є одним з найфундаментальніших законів природи (радіотехнічний аналог принципу невизначеності Гейзенберга).

Проведемо уявний експеримент (див. Рис. 4 та Рис. 5). Зі стисненням сигналу в часі (зменшенням тривалості t_i), нулі функції $S(j\omega)$ відсуваються далі від початку координат. Спектр "розтягується" по осі частот [cite: 2].



Головне інженерне правило:

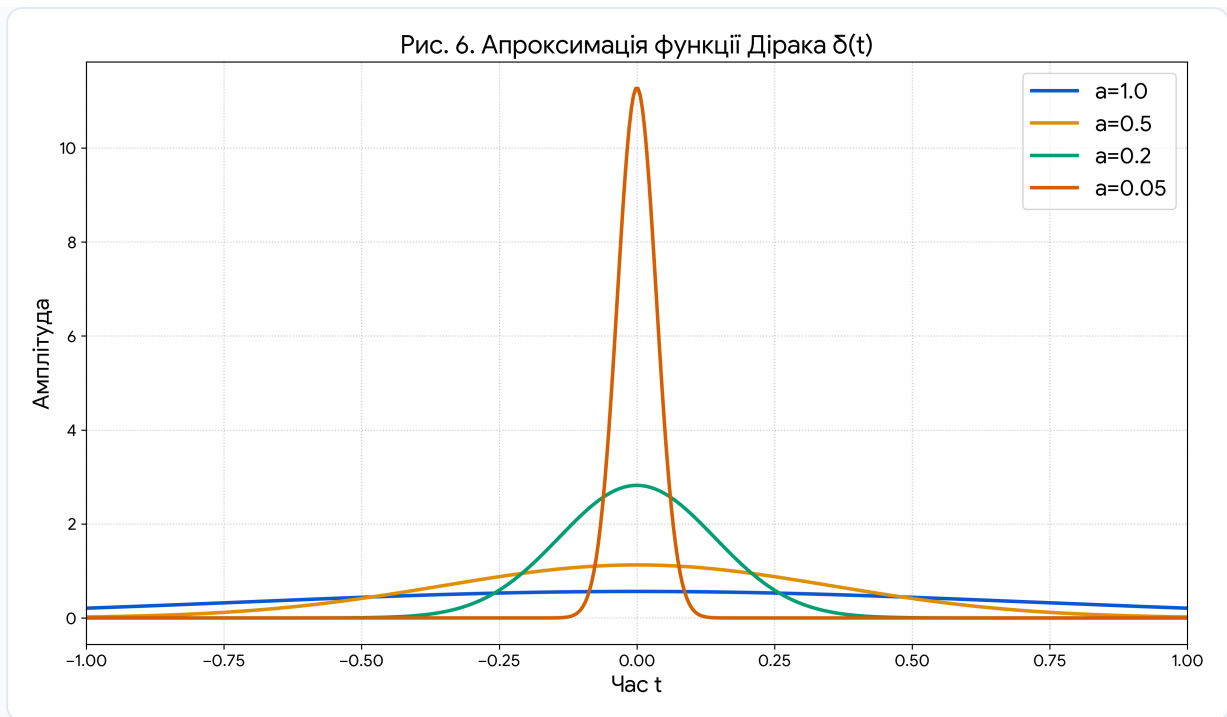
Чим коротший імпульс у часі, тим ширший його спектр. І навпаки: довготривалі сигнали мають вузький спектр [cite: 2].

Саме тому для передачі високошвидкісних цифрових даних (короткі імпульси) потрібні надзвичайно широкосмугові канали зв'язку (наприклад, оптичне волокно).

3.2.3. Функція Дірака (δ -функція) та її властивості

Що відбудеться, якщо ми почнемо нескінченно зменшувати тривалість імпульсу $t_i \rightarrow 0$, але при цьому зберігатимемо його площу (енергію) постійною, збільшуючи амплітуду $E \rightarrow \infty$?

В границі ми отримаємо математичну абстракцію — **функцію Дірака (δ -функцію)** або нескінченно короткий одиничний імпульс [cite: 2]. Фізично реалізувати такий сигнал неможливо, але він є ідеальним інструментом для розрахунку реакції електричних кіл.



δ -функція дорівнює нескінченності в точці $t = 0$ і нулю у всіх інших точках. При цьому інтеграл (площа) від неї дорівнює одиниці [cite: 2].

Найважливішою є **фільтруюча властивість δ -функції**. Якщо помножити будь-яку функцію $f(t)$ на $\delta(t - t_0)$ та проінтегрувати, результат буде дорівнювати значенню функції $f(t)$ у точці t_0 [cite: 2]:

$$\int f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Спектр δ -функції: Застосуємо перетворення Фур'є до δ -функції:

$$\Delta(j\omega) = \int \delta(t) e^{(-j\omega t)} dt = e^0 = 1$$

Це означає, що спектр ідеального нескінченно короткого імпульсу є **рівномірним (білим)** — він містить однакову потужність на всіх існуючих частотах від 0 до ∞ [cite: 2].

3.2.4. Спектр постійної напруги (DC)

Чи має постійна напруга $s(t) = C_0$ спектр? Хоча вона не інтегровна на нескінченності, апарат δ -функцій дозволяє знайти її спектральну щільність. Зворотне перетворення Фур'є від δ -функції в частотній області дає постійну складову [cite: 2].

Отже, спектральна щільність постійної напруги — це δ -функція у частотній області, розташована строго на нульовій частоті ($\omega=0$):

$$S(j\omega) = 2\pi C_0 \delta(\omega)$$

3.3. ВЛАСТИВОСТІ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ

Властивості перетворення Фур'є дозволяють інженерам миттєво оцінювати, що відбудеться зі спектром сигналу, якщо сигнал піддати певним перетворенням у часовій області (наприклад, затримати в кабелі, підсилити або промодулювати).

3.3.1. Зсув сигналу в часі (Теорема зсуву)

Нехай сигнал $s_1(t)$ має спектральну щільність $S_1(j\omega)$. Якщо цей сигнал затримається в часі на величину t_0 , ми отримаємо новий сигнал $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ [cite: 2]. Знайдемо його спектр:

$$S_2(j\omega) = \int s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = S_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Аналізуючи цей результат (знаходячи модуль та аргумент комплексного числа), ми приходимо до двох фундаментальних висновків [cite: 2]:

1. $|S_2(j\omega)| = |S_1(j\omega)|$. Модуль спектральної щільності (амплітудний спектр) **не змінюється** при зсуві сигналу в часі.
2. $\theta_2(\omega) = \theta_1(\omega) - \omega t_0$. Фазовий спектр отримує додатковий нахил. Запізнення сигналу в часі призводить до виникнення **лінійного фазового зсуву**, пропорційного частоті.

Рис. 7. Амплітудний спектр зсунутого імпульсу (не змінюється)

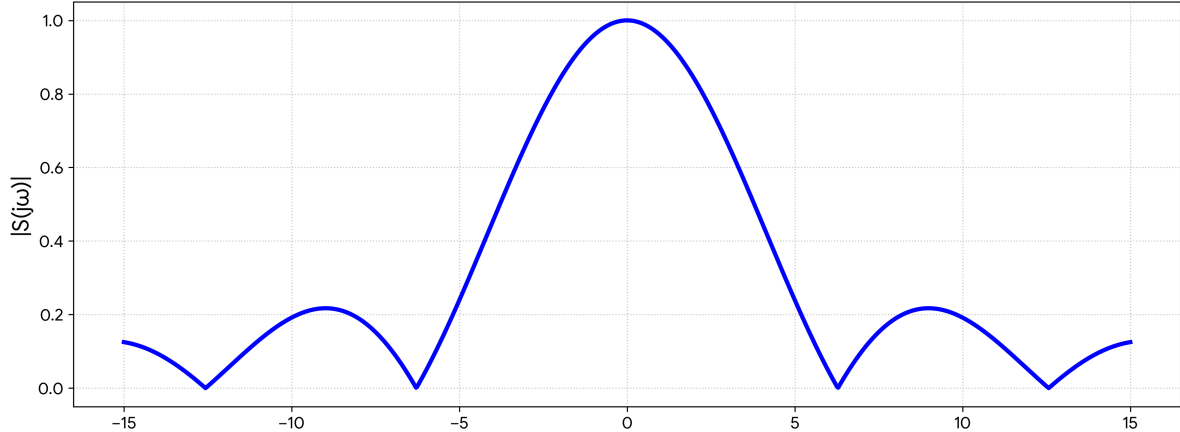
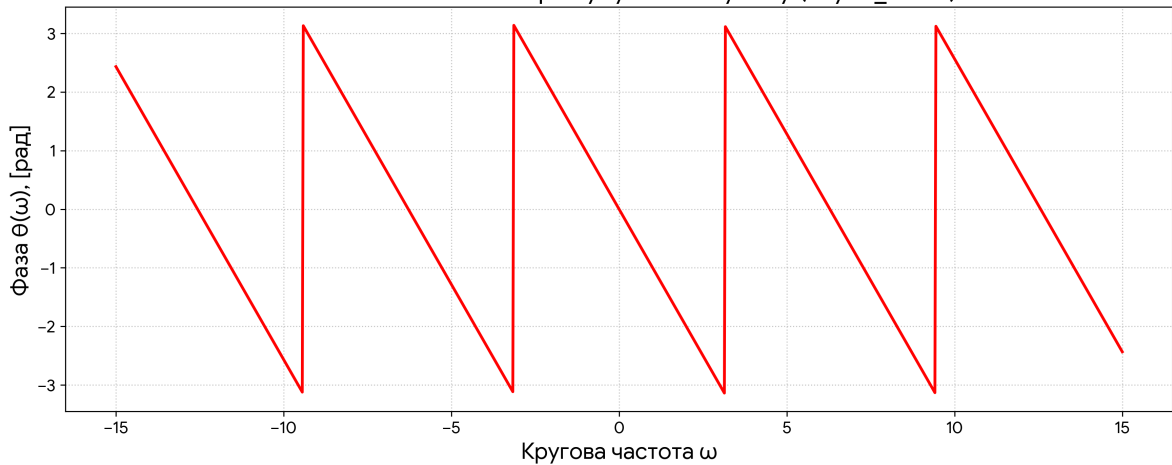


Рис. 8. Фазовий спектр зсунутого імпульсу (зсув $t_0=1.0$)



3.3.2. Теорема масштабування (Стиснення/Розтягнення)

Якщо ми "прискоримо" сигнал (наприклад, програємо запис у 2 рази швидше), його тривалість зменшиться: $s_2(t) = s(a \cdot t)$, де $a > 1$.

Згідно з властивостями Фур'є, спектр стиснутого сигналу розширюється, а його спектральна амплітуда зменшується [cite: 2]:

$$S_2(j\omega) = (1/a) * S(j(\omega/a))$$

Цей ефект ми детально візуалізували на Рис. 4 та Рис. 5.

3.3.3. Диференціювання та інтегрування

Якщо пропустити сигнал через диференціююче коло (наприклад, RC-ланцюг), спектральна щільність похідної сигналу $ds(t)/dt$ дорівнює спектральній щільності вихідного сигналу, помноженій на оператор $j\omega$ [cite: 2]:

$$S_{\text{diff}}(j\omega) = j\omega * S(j\omega)$$

Фізично це означає, що диференціювання підсилює високочастотні складові спектра (оскільки множник ω лінійно зростає з частотою).

Інтегрування сигналу в часі відповідає діленню його спектральної щільності на $j\omega$ [cite: 2]. Інтегрування працює як фільтр нижніх частот, пригнічуючи високочастотні гармоніки.

ВИСНОВКИ ДО ТЕМИ 3

- Перехід від періодичних до неперіодичних сигналів супроводжується перетворенням дискретного (лінійчастого) спектра у **суцільний (неперервний) спектр**, де амплітуди окремих гармонік стають нескінченно малими [cite: 2].
- Для опису частотного складу неперіодичних сигналів використовується апарат **інтегрального перетворення Фур'є** та поняття **спектральної щільності** [cite: 2].
- Існує жорсткий обернений зв'язок між тривалістю сигналу та шириною його спектра: **чим коротший імпульс, тим ширший діапазон частот він займає в ефірі** [cite: 2].
- Зсув сигналу в часі (затримка при поширенні радіохвилі) ніяк не впливає на енергетичний та амплітудний спектр сигналу. Однак він додає суворо **лінійний нахил у фазовий спектр** [cite: 2].
- Математична абстракція — **функція Дірака (δ -функція)** — є ідеальним тестовим сигналом із рівномірним ("білим") суцільним спектром від нуля до нескінченності [cite: 2].

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що відбувається зі спектром періодичного сигналу, якщо його період штучно збільшувати до нескінченності? Поясніть граничний перехід [cite: 2].

2. Дайте фізичне та математичне визначення поняттю "спектральна щільність" неперіодичного сигналу [cite: 2]. У яких одиницях вона вимірюється?
3. Запишіть формули прямого та оберненого інтегрального перетворення Фур'є. Що вони дозволяють знайти? [cite: 2]
4. Яку форму має спектральна щільність одиночного прямокутного відеоімпульсу? Від чого залежить розташування нулів у його спектрі? [cite: 2]
5. Сформулюйте закон, що пов'язує тривалість імпульсу та ефективну ширину його спектра [cite: 2]. Чому для оптичного зв'язку потрібні величезні смуги пропускання?
6. Що таке δ -функція Дірака? Які її головні властивості (площа, фільтруюча властивість) [cite: 2]?
7. Який вигляд має спектр ідеального одиничного імпульсу (δ -функції)? [cite: 2]
8. Сформулюйте теорему зсуву. Як вплине затримка сигналу на 1 мікросекунду на його амплітудну та фазову спектрограми? [cite: 2]
9. Як зміняться складові спектра сигналу, якщо ми пропустимо його через ідеальне диференціююче RC-коло? Які частоти будуть підсилені? [cite: 2]



**ДНІПРОВСЬКИЙ
ПРОФЕСІЙНИЙ
ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
КОЛЕДЖ**

ЗАКЛАД ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ

Документ містить ознайомчий фрагмент.

**Повна версія доступна в електронній
бібліотеці закладу після входу в особистий
кабінет студента.**