

ЗАТВЕРДЖЕНО

Директор ЗПО «ДПТК»

Олександр СТРИЛЕЦЬ

« 28 » серпня 2026 р.

ПОГОДЖЕНО

Заступник директора з НМР ЗПО «ДПТК»

Сергій ГОРДІЄНКО

« 28 » серпня 2026 р.



КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни вища математика
для здобувачів освіти рівня «фаховий молодший бакалавр»
Спеціальність G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

О. В. Чопенко

Зміст

Лекція 1. Матриці та дії над ними	3
Лекція 2. Визначники матриць	16
Лекція 3. Обернена матриця та її знаходження	36
Лекція 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера	53
Лекція 5. Вектори та дії над ними.....	77
Лекція 6. Скалярний та векторний добутки векторів.....	100
Лекція 7. Метод координат. Пряма лінія на площині.....	123
Лекція 8. Криві другого порядку: коло, еліпс	148
Лекція 9. Криві другого порядку: гіпербола, парабола.....	178
Лекція 10. Границя функції та її обчислення	212
Лекція 11. Похідна. Правила диференціювання.....	238
Лекція 12. Проміжки монотонності і опуклості функцій. Точки екстремуму і перегину	274
Лекція 13. Загальна схема дослідження функції	307
Лекція 14. Основні методи інтегрування	337
Лекція 15. Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	374

Лекція 1

ТЕМА: Матриці та дії над ними

МЕТА: сформувані у здобувачів освіти уявлення про матрицю та її розмірність; сформувані вміння визначати вид матриці, знаходити її елементи, виконувати основні дії над матрицями: додавання і віднімання матриць, множення матриці на число, множення двох матриць, транспонування матриці; сформувані вміння застосовувати властивості операцій над матрицями під час виконання обчислень; показати можливості використання матриць для впорядкованого подання та опрацювання числових даних, пов'язаних із професійною діяльністю фахівців автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ:

- 1. Організаційний момент.*
- 2. Перевірка домашнього завдання.*
- 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
- 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
- 5. Вивчення нового матеріалу.*

- Означення матриці.
- Розмірність і позначення матриці.
- Види матриць: прямокутна, квадратна, матриця-рядок, матриця-стовпець, діагональна, одинична, нульова.
- Рівність матриць.
- Транспонування матриці.
- Додавання і віднімання матриць. Властивості.
- Множення матриці на число. Властивості.
- Добуток двох матриць. Правило.
- Основні властивості множення матриць.
- Застосування матриць під час опрацювання числових даних автомобільного транспорту.

Навчальні матеріали лекції

Матриці є одним із основних математичних засобів упорядкованого запису та опрацювання числової інформації. Вони застосовуються у математиці, фізиці, механіці, електротехніці, програмуванні, економіці та багатьох технічних дисциплінах.

Для майбутніх фахівців спеціальності **J8 «Автомобільний транспорт»** матриці мають важливе прикладне значення. За допомогою матриць можна компактно подавати числові дані, які характеризують автомобілі, технологічні процеси, результати діагностування, експлуатаційні показники, витрати ресурсів та інші взаємопов'язані величини.

Наприклад, якщо потрібно одночасно записати пробіг декількох автомобілів, кількість виконаних ними рейсів і витрату пального, ці дані зручно розташувати у вигляді прямокутної таблиці. Математичним аналогом такої таблиці є матриця.

Саме тому у робочій програмі дисципліни «Вища математика» передбачено використання матричного апарату для компактного запису систем взаємопов'язаних технічних величин та опрацювання числових даних, що характеризують параметри автомобільних транспортних засобів і технологічних процесів.

Означення матриці

Означення 1. Матрицею розміром $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел або інших математичних об'єктів, яка складається з m рядків та n стовпців.

Загальний вигляд матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту, наприклад **A**, **B**, **C**, а елементи матриць — відповідними малими літерами з двома індексами: a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} .

Перший індекс i вказує номер рядка, у якому знаходиться елемент, а другий індекс j — номер стовпця.

Наприклад, елемент a_{23} знаходиться на перетині другого рядка і третього стовпця матриці **A**.

Таке означення та спосіб індексації елементів відповідають викладу теми «Матриці та дії над ними» у курсі лекцій Кушлик-Дивульської та Авдєєвої.

Приклад 1.

Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, D = (5 \quad 7 \quad 9 \quad 11).$$

Визначити розмір кожної матриці.

Розв’язання.

Матриця A містить **3 рядки і 4 стовпці**, тому її розмір:

$$3 \times 4.$$

Матриця B містить **2 рядки і 3 стовпці**, тому її розмір:

$$2 \times 3.$$

Матриця C містить **4 рядки і 1 стовпець**, тому її розмір:

$$4 \times 1.$$

Матриця D містить **1 рядок і 4 стовпці**, тому її розмір:

$$1 \times 4.$$

Відповідь: матриця A має розмір 3×4 , матриця B — 2×3 , матриця C — 4×1 , матриця D — 1×4 .

Матриця розміру $n \times 1$ називається **матрицею-стовпцем** або **вектором-стовпцем**.

Матриця розміру $1 \times n$ називається **матрицею-рядком** або **вектором-рядком**.

Квадратна матриця

Матриця називається **квадратною матрицею порядку n** , якщо кількість її рядків дорівнює кількості стовпців і дорівнює n .

Наприклад:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця третього порядку.

Елементи квадратної матриці, які розташовані по діагоналі від лівого верхнього кута до правого нижнього, утворюють **головну діагональ**.

Для квадратної матриці порядку n елементами головної діагоналі є:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}.$$

Елементи, розташовані по діагоналі від правого верхнього кута до лівого нижнього, утворюють **побічну діагональ**.

Діагональна матриця

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи, які не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Це діагональна матриця третього порядку.

Одинична матриця

Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною матрицею**.

Наприклад:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульова матриця

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою матрицею**.

Наприклад:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наведені види матриць відповідають класифікації, поданій у рекомендованому курсі лекцій Кушлик-Дивульської та Авдєєвої.

Рівність матриць

Матриці A та B називаються **рівними**, якщо:

1. вони мають однаковий розмір;
2. усі їх відповідні елементи рівні.

Тобто:

$$A = B,$$

якщо

$$a_{ij} = b_{ij}$$

для всіх відповідних значень i та j .

Приклад 2.

Нехай задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Матриці мають однаковий розмір 2×2 , а їх відповідні елементи рівні:

$$a_{11} = b_{11} = 2,$$

$$a_{12} = b_{12} = 3,$$

$$a_{21} = b_{21} = 5,$$

$$a_{22} = b_{22} = 7.$$

Отже,

$$A = B.$$

Відповідь: матриці A і B рівні.

Транспонування матриці

Якщо в матриці A рядки записати стовпцями зі збереженням їх порядку, то одержана матриця називається **транспонованою матрицею** і позначається A^T .

Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається **транспонуванням матриці**.

Приклад 3.

Нехай:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти транспоновану матрицю.

Розв'язання.

Перший рядок матриці A :

$$(2 \ 4 \ 6)$$

записуємо першим стовпцем транспонованої матриці.

Другий рядок:

$$(3 \ 5 \ 7)$$

записуємо другим стовпцем.

Отримуємо:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має розмір 2×3 , а транспонована матриця A^T має розмір 3×2 .

Відповідь:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найпростіші дії над матрицями

До найпростіших дій над матрицями належать:

- додавання матриць;
- віднімання матриць;
- множення матриці на число;
- множення матриць.

Додавання та віднімання матриць

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається матриця C такого самого розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B :

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (2)$$

Різницею двох матриць однакового розміру називається матриця:

$$C = A - B, c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \quad (3)$$

Приклад 4.

Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

$$A + B, A - B.$$

Розв'язання.

Матриці A і B мають однаковий розмір 2×2 , тому їх можна додавати та віднімати.

Знайдемо суму:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Додаємо відповідні елементи:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 + 1 & 2 + 6 \\ 3 + 2 & 5 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо різницю:

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Віднімаємо відповідні елементи:

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 - 1 & 2 - 6 \\ 3 - 2 & 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для матриць однакового розміру виконуються властивості:

$$A + B = B + A;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Ці властивості наведені у курсі лекцій Кушлик-Дивульської та Авдєєвої.

Множення матриці на число

Добутком матриці A на число k називається матриця, всі елементи якої отримані множенням відповідних елементів матриці A на число k :

$$kA = (ka_{ij}). \quad (4)$$

Приклад 5.

Задана матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти $3A$.

Розв'язання.

Відповідно до означення множення матриці на число необхідно кожний елемент матриці A помножити на число 3:

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Для множення матриці на число виконуються властивості:

$$k(A + B) = kA + kB;$$

$$(k + l)A = kA + lA;$$

$$(kl)A = k(lA).$$

Добуток двох матриць

Добуток двох матриць існує лише за виконання **умови узгодженості**:

кількість стовпців першої матриці повинна дорівнювати кількості рядків другої матриці.

Якщо матриця A має розмір $m \times n$, а матриця B — розмір $n \times p$, то добутком AB є матриця C розміру $m \times p$.

Кожний елемент матриці C знаходять як суму добутків відповідних елементів рядка першої матриці на відповідні елементи стовпця другої матриці:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (5)$$

У рекомендованому курсі лекцій це правило формулюється саме як утворення кожного елемента матриці-добутку шляхом множення відповідних елементів i -го рядка першої матриці на елементи j -го стовпця другої матриці з наступним додаванням отриманих добутків.

Приклад 6.

Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток AB .

Розв'язання.

Спочатку перевіримо умову узгодженості матриць.

Матриця A має розмір:

$$2 \times 3.$$

Матриця B має розмір:

$$3 \times 2.$$

Кількість стовпців першої матриці дорівнює 3.

Кількість рядків другої матриці також дорівнює 3.

Отже, добуток AB існує.

Результатом буде матриця розміру:

$$2 \times 2.$$

Знайдемо елемент c_{11} . Для цього елементи першого рядка матриці A множимо на відповідні елементи першого стовпця матриці B :

$$c_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 2 + 3 + 6 = 11.$$

Знайдемо елемент c_{12} . Елементи першого рядка матриці A множимо на відповідні елементи другого стовпця матриці B :

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 4 + 1 + 12 = 17.$$

Знайдемо елемент c_{21} :

$$c_{21} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 4 + 6 + 2 = 12.$$

Знайдемо елемент c_{22} :

$$c_{22} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Отже,

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1.

Добуток матриць у загальному випадку **не має властивості переставності**, тобто:

$$AB \neq BA.$$

Тому під час множення матриць не можна довільно змінювати порядок множників.

Якщо для двох матриць виконується рівність:

$$AB = BA,$$

то такі матриці називаються **комутуючими**.

Зауваження 2.

З того, що існує добуток AB , не обов'язково впливає існування добутку BA . Для кожного добутку необхідно окремо перевіряти умову узгодженості матриць.

Зауваження 3.

Під час роботи з матрицями великого розміру для виконання та перевірки обчислень можуть використовуватися комп'ютерні математичні засоби. Проте здобувач освіти повинен розуміти правило виконання відповідної операції та вміти виконувати основні обчислення самостійно.

Застосування матриць у професійній діяльності

Матриці можуть використовуватися для компактного представлення даних про автомобільні транспортні засоби.

Приклад 7.

Нехай необхідно подати дані про добовий пробіг трьох автомобілів протягом трьох робочих днів.

Нехай матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 210 & 225 & 218 \\ 185 & 192 & 200 \\ 240 & 235 & 250 \end{pmatrix}$$

містить значення пробігу автомобілів у кілометрах.

Перший рядок характеризує пробіг першого автомобіля, другий — другого автомобіля, третій — третього автомобіля.

Стовпці відповідають першому, другому та третьому робочим дням.

Наприклад:

$$a_{23} = 200.$$

Це означає, що пробіг **другого автомобіля у третій робочий день становив 200 кілометрів**.

Матриця має розмір:

$$3 \times 3.$$

Таким способом можна систематизувати числові дані про пробіг, витрату пального, кількість виконаних рейсів та інші експлуатаційні характеристики транспортних засобів.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Повторення разом зі здобувачами освіти основних моментів лекції.

Питання для закріплення:

1. Що називається матрицею?
2. Як позначають матриці та їх елементи?
3. Що означають індекси елемента a_{ij} ?

4. Як визначити розмір матриці?
5. Яка матриця називається квадратною?
6. Що називається головною діагоналлю квадратної матриці?
7. Яка матриця називається діагональною?
8. Яка матриця називається одиничною?
9. Яка матриця називається нульовою?
10. За якої умови дві матриці є рівними?
11. Що називається транспонуванням матриці?
12. За якої умови можна додавати та віднімати матриці?
13. Як виконується множення матриці на число?
14. Яка умова повинна виконуватися для існування добутку двох матриць?
15. Як визначити розмір матриці, отриманої в результаті множення?
16. Як обчислюється елемент добутку двох матриць?
17. Чи можна довільно змінювати порядок множників під час множення матриць?
18. Як матриці можуть застосовуватися під час опрацювання даних про автомобільні транспортні засоби?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ:

Опрацювати конспект лекції «Матриці та дії над ними».

Повторити означення матриці, види матриць, правила додавання та віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування та правило множення двох матриць.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 с.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 с.

3. Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 с.

Лекція 2

ТЕМА: Визначники матриць

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про визначник квадратної матриці; навчити обчислювати визначники другого та третього порядків; сформувати вміння застосовувати правило трикутників та правило Саррюса для обчислення визначників третього порядку; сформувати поняття про мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника; навчити знаходити мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника; сформувати вміння розкласти визначник третього порядку за елементами рядка або стовпця; розвивати математичне та логічне мислення, уважність, послідовність виконання обчислень та вміння аналізувати отримані результати.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ:

- 1. Організаційний момент.*
- 2. Перевірка домашнього завдання.*
- 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
- 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
- 5. Вивчення нового матеріалу.*
 - Поняття визначника квадратної матриці.
 - Визначник другого порядку.
 - Обчислення визначника другого порядку.
 - Визначник третього порядку.
 - Обчислення визначника третього порядку за правилом трикутників.
 - Обчислення визначника третього порядку за правилом Саррюса.
 - Мінор елемента визначника.
 - Алгебраїчне доповнення елемента визначника.
 - Розкладання визначника третього порядку за елементами рядка або стовпця.
 - Приклади обчислення визначників.

Навчальні матеріали лекції

На попередньому занятті було розглянуто поняття матриці, її розмірність, основні види матриць та дії над ними. Особливе місце серед матриць займають **квадратні матриці**, тобто матриці, у яких кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Наприклад, матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

є квадратними.

Матриця A є квадратною матрицею другого порядку, оскільки вона містить два рядки та два стовпці.

Матриця B є квадратною матрицею третього порядку, оскільки вона містить три рядки та три стовпці.

Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність певне число, яке називається **визначником цієї матриці**.

Поняття визначника є одним з основних понять лінійної алгебри. Визначники використовуються під час виконання різноманітних математичних обчислень. У наступних темах курсу вони будуть необхідні для роботи з іншими математичними об'єктами. Тому на цьому етапі необхідно навчитися правильно записувати та обчислювати визначники.

У рекомендованому курсі лекцій з вищої математики визначники розглядаються в розділі лінійної алгебри разом із матрицями та системами лінійних алгебраїчних рівнянь.

Поняття визначника квадратної матриці

Означення 1. Визначником квадратної матриці називається число, яке певним чином обчислюється за елементами цієї матриці.

Визначник матриці A позначають:

$$\det A$$

або вертикальними рисками.

Якщо задано квадратну матрицю другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то її визначник записують у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Необхідно розрізняти запис **матриці** та запис **визначника**.

Матрицю записують у круглих дужках:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці записують між вертикальними рисками:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Матриця є таблицею чисел, а визначник є **числом**, яке обчислюється за елементами квадратної матриці.

Визначник другого порядку

Означення 2. Визначником другого порядку називається число, яке дорівнює різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів побічної діагоналі.

Нехай задано визначник другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Елементи

$$a_{11}, a_{22}$$

утворюють головну діагональ.

Елементи

$$a_{12}, a_{21}$$

утворюють побічну діагональ.

Тоді визначник другого порядку обчислюють за формулою:

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1)$$

Отже, для обчислення визначника другого порядку необхідно:

1. знайти добуток елементів головної діагоналі;
2. знайти добуток елементів побічної діагоналі;

3. від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Приклад 1

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу обчислення визначника другого порядку:

$$\Delta = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2.$$

Знайдемо добуток елементів головної діагоналі:

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Знайдемо добуток елементів побічної діагоналі:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

Від першого добутку віднімемо другий:

$$\Delta = 20 - 6 = 14.$$

Отже,

$$\boxed{\Delta = 14}.$$

Відповідь: 14.

Приклад 2

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

За формулою обчислення визначника другого порядку:

$$\Delta = (-3) \cdot (-5) - 4 \cdot 2.$$

Обчислимо добуток елементів головної діагоналі:

$$(-3) \cdot (-5) = 15.$$

Обчислимо добуток елементів побічної діагоналі:

$$4 \cdot 2 = 8.$$

Тоді

$$\Delta = 15 - 8 = 7.$$

Отже,

$$\boxed{\Delta = 7}.$$

Відповідь: 7.

Приклад 3

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу:

$$\Delta = 5 \cdot 4 - (-2) \cdot (-3).$$

Обчислимо перший добуток:

$$5 \cdot 4 = 20.$$

Обчислимо другий добуток:

$$(-2) \cdot (-3) = 6.$$

Отже,

$$\Delta = 20 - 6 = 14.$$

Відповідь: 14.

Зауваження 1

Під час обчислення визначників, які містять від'ємні числа, необхідно особливо уважно виконувати дії зі знаками.

Наприклад,

$$(-2) \cdot (-3) = 6,$$

але

$$(-2) \cdot 3 = -6.$$

Помилка у знаку хоча б одного добутку призводить до неправильного значення всього визначника.

Визначник третього порядку

Розглянемо квадратну матрицю третього порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці записують:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

На відміну від визначника другого порядку, для визначника третього порядку необхідно знайти вже шість добутоків, кожний з яких містить по три множники.

Визначник третього порядку можна обчислювати декількома способами. На цьому занятті розглянемо:

- правило трикутників;
- правило Саррюса;
- розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

Обчислення визначника третього порядку за правилом трикутників

Правило трикутників дає можливість запам'ятати порядок утворення додатних і від'ємних добутоків у визначнику третього порядку.

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

одержуємо:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2)$$

Перші три добутки записують зі знаком «плюс», наступні три добутки — зі знаком «мінус».

Приклад 4

Обчислити визначник за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Випишемо три добутки, які входять до визначника зі знаком «плюс»:

$$2 \cdot 4 \cdot 1,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$3 \cdot 1 \cdot 2.$$

Тепер випишемо три добутки, які входять до визначника зі знаком «мінус»:

$$3 \cdot 4 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2,$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1.$$

Отже,

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

Виконаємо множення:

$$\Delta = 8 + 6 + 6 - 36 - 8 - 1.$$

Спочатку знайдемо суму додатних добутків:

$$8 + 6 + 6 = 20.$$

Знайдемо суму добутків, які віднімаються:

$$36 + 8 + 1 = 45.$$

Тому

$$\Delta = 20 - 45 = -25.$$

Отже,

$$\boxed{\Delta = -25}.$$

Відповідь: -25.

Приклад 5

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Застосуємо правило трикутників:

$$\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 1 \\ - 0 \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Виконаємо множення:

$$\Delta = -3 + 16 + 0 - 0 - 2 - 18.$$

Виконаємо додавання та віднімання:

$$\Delta = 13 - 20 = -7.$$

Отже,

$$\boxed{\Delta = -7}.$$

Відповідь: -7 .

Обчислення визначника третього порядку за правилом Саррюса

Іншим зручним способом обчислення визначника третього порядку є **правило Саррюса**.

Нехай задано визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для застосування правила Саррюса праворуч від визначника умовно дописують перший та другий стовпці:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}.$$

Після цього утворюють три добутки у напрямку зліва направо зверху вниз. Ці добутки записують зі знаком «плюс».

Потім утворюють три добутки у протилежному напрямку. Ці добутки записують зі знаком «мінус».

У результаті отримуємо ту саму формулу:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Зауваження 2

Правило Саррюса застосовують тільки для визначників третього порядку.

Для визначників іншого порядку цей спосіб безпосередньо не застосовується.

Приклад 6

Обчислити за правилом Саррюса визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Праворуч умовно допишемо перші два стовпці:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1. \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Знайдемо добутки, які входять зі знаком «плюс»:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 \cdot 1 &= 1, \\ 2 \cdot 4 \cdot 3 &= 24, \\ 3 \cdot 2 \cdot 2 &= 12. \end{aligned}$$

Їх сума:

$$1 + 24 + 12 = 37.$$

Тепер знайдемо добутки, які входять зі знаком «мінус»:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 \cdot 3 &= 9, \\ 1 \cdot 4 \cdot 2 &= 8, \\ 2 \cdot 2 \cdot 1 &= 4. \end{aligned}$$

Їх сума:

$$9 + 8 + 4 = 21.$$

Отже,

$$\Delta = 37 - 21 = 16.$$

Таким чином,

$$\boxed{\Delta = 16}.$$

Відповідь: 16.

Мінор елемента визначника

Під час обчислення визначників важливе значення має поняття **мінора елемента**.

Означення 3. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника після викреслення рядка та стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент.

Розглянемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, необхідно знайти мінор елемента a_{12} .

Елемент a_{12} знаходиться у **першому рядку** та **другому стовпці**.

Викреслюємо перший рядок:

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}$$

і другий стовпець:

$$a_{12}, a_{22}, a_{32}.$$

Після викреслення залишаються елементи:

$$a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{33}.$$

Отже,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Саме через викреслення відповідного рядка та стовпця визначається мінор елемента в узгодженій навчальній літературі.

Приклад 7

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти мінор елемента $a_{12} = 3$.

Розв'язання.

Елемент

$$a_{12} = 3$$

розташований у першому рядку та другому стовпці.

Викреслюємо перший рядок і другий стовпець.

Залишається визначник другого порядку:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо його:

$$M_{12} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1.$$

$$M_{12} = 12 - 2 = 10.$$

Отже,

$$\boxed{M_{12} = 10}.$$

Відповідь: 10.

Приклад 8

Для цього самого визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти мінор елемента $a_{23} = 2$.

Розв'язання.

Елемент a_{23} знаходиться у другому рядку та третьому стовпці.

Викреслюємо другий рядок і третій стовпець.

Залишаються елементи:

$$2, 3, 1, 2.$$

Тому

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$M_{23} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1.$$

$$M_{23} = 4 - 3 = 1.$$

Відповідь: $M_{23} = 1$.

Алгебраїчне доповнення елемента визначника

З поняттям мінора безпосередньо пов'язане поняття **алгебраїчного доповнення**.

Означення 4. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij} , взятий зі знаком, який визначається залежно від суми номерів рядка та стовпця цього елемента.

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} позначають:

$$A_{ij}.$$

Воно обчислюється за формулою:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}} \quad (3)$$

Якщо сума номерів рядка i та стовпця j є парним числом, то алгебраїчне доповнення має знак «плюс».

Якщо сума $i + j$ є непарним числом, то алгебраїчне доповнення має знак «мінус».

Для визначника третього порядку знаки алгебраїчних доповнень розташовуються за схемою:

$$\boxed{\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}}$$

Отже,

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_{11}, \\ A_{12} &= -M_{12}, \\ A_{13} &= M_{13}, \\ A_{21} &= -M_{21}, \\ A_{22} &= M_{22}, \\ A_{23} &= -M_{23}, \\ A_{31} &= M_{31}, \\ A_{32} &= -M_{32}, \\ A_{33} &= M_{33}. \end{aligned}$$

Поняття мінора та алгебраїчного доповнення саме в такому взаємозв'язку використовується в навчальних матеріалах з лінійної алгебри.

Приклад 9

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти алгебраїчне доповнення елемента $a_{12} = 3$.

Розв'язання.

У прикладі 7 було знайдено мінор цього елемента:

$$M_{12} = 10.$$

Алгебраїчне доповнення знаходимо за формулою:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}.$$

Оскільки

$$1 + 2 = 3,$$

то

$$(-1)^3 = -1.$$

Отже,

$$A_{12} = -M_{12}.$$

Підставимо значення мінора:

$$A_{12} = -10.$$

Відповідь: $A_{12} = -10$.

Приклад 10

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти алгебраїчне доповнення елемента $a_{22} = 5$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо мінор елемента a_{22} .

Викреслюємо другий рядок і другий стовпець:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо:

$$M_{22} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1.$$

$$M_{22} = 6 - 1 = 5.$$

Тепер знайдемо алгебраїчне доповнення:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}.$$

Оскільки

$$2 + 2 = 4,$$

а число 4 є парним, маємо:

$$(-1)^4 = 1.$$

Тому

$$A_{22} = M_{22} = 5.$$

Відповідь: $A_{22} = 5$.

Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця

Використовуючи мінори та алгебраїчні доповнення, визначник третього порядку можна обчислити шляхом розкладання за елементами певного рядка або стовпця.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка на відповідні алгебраїчні доповнення.

Наприклад, якщо визначник розкладається за елементами першого рядка, маємо:

$$\boxed{\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}} \quad (4)$$

Аналогічно можна виконати розкладання за елементами другого або третього рядка.

Визначник також можна розкласти за елементами будь-якого стовпця. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця через відповідні алгебраїчні доповнення наведено в узгоджених навчальних матеріалах.

Приклад 11

Обчислити визначник, розклавши його за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 2A_{11} + 1A_{12} + 3A_{13}.$$

Знайдемо алгебраїчне доповнення першого елемента.

Спочатку знайдемо мінор M_{11} :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$M_{11} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2.$$

$$M_{11} = 4 - 4 = 0.$$

Для елемента a_{11} маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}.$$

Оскільки

$$(-1)^2 = 1,$$

то

$$A_{11} = 0.$$

Тепер знайдемо мінор другого елемента першого рядка:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3.$$

$$M_{12} = 1 - 6 = -5.$$

Алгебраїчне доповнення:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}.$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot (-5).$$

$$A_{12} = 5.$$

Знайдемо мінор третього елемента першого рядка:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$M_{13} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3.$$

$$M_{13} = 2 - 12 = -10.$$

Алгебраїчне доповнення:

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}.$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot (-10).$$

$$A_{13} = -10.$$

Підставимо отримані алгебраїчні доповнення у формулу розкладання:

$$\Delta = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-10).$$

Виконаємо обчислення:

$$\Delta = 0 + 5 - 30.$$

$$\Delta = -25.$$

Отже,

$$\boxed{\Delta = -25}.$$

Відповідь: -25 .

Звернемо увагу, що цей самий визначник у прикладі 4 було обчислено за правилом трикутників. В обох випадках отримано однаковий результат:

$$\Delta = -25.$$

Таким чином, правильність виконаних обчислень підтверджено двома способами.

Приклад 12

Обчислити визначник шляхом розкладання за елементами другого стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Розкладаємо визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta = 2A_{12} + 0A_{22} + 1A_{32}.$$

Знайдемо A_{12} .

Спочатку знайдемо мінор:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

Тоді

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 0.$$

Другий елемент вибраного стовпця дорівнює нулю:

$$a_{22} = 0.$$

Тому відповідний добуток у розкладі дорівнює:

$$0A_{22} = 0.$$

Знайдемо алгебраїчне доповнення A_{32} .

Міnor елемента $a_{32} = 1$:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$M_{32} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2.$$

$$M_{32} = 1 - 6 = -5.$$

Тоді

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}.$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot (-5) = 5.$$

Підставимо знайдені значення:

$$\Delta = 2 \cdot 0 + 0 + 1 \cdot 5.$$

Отже,

$$\Delta = 5.$$

Відповідь: 5.

Застосування визначників у подальшій математичній підготовці фахівців автомобільного транспорту

Визначники є важливою складовою математичного апарату лінійної алгебри. У професійній підготовці майбутнього фахівця автомобільного транспорту математичні методи використовуються під час роботи з числовими даними та математичними моделями технічних процесів.

Наприклад, під час аналізу роботи автомобіля можуть одночасно розглядатися декілька взаємопов'язаних величин: сила, маса, прискорення, швидкість, час руху, шлях, витрата пального, продуктивність автомобільного транспорту.

Математичні залежності між такими величинами можуть утворювати системи рівнянь. Для подальшого опанування методів роботи з такими

системами необхідно впевнено виконувати базові операції лінійної алгебри, зокрема правильно обчислювати визначники.

Однак у межах даної лекції наше завдання полягає саме у формуванні навичок **обчислення визначників другого та третього порядків, знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень і розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.**

Способи використання визначників під час розв'язування систем лінійних рівнянь будуть вивчатися відповідно до наступних тем робочої програми.

6. Закріплення вивченого матеріалу

- Повторення разом зі здобувачами освіти основних моментів.
- Повторення правила обчислення визначника другого порядку.
- Повторення алгоритму обчислення визначника третього порядку.
- Повторення правила трикутників та правила Саррюса.
- Повторення означення мінора елемента.
- Повторення означення алгебраїчного доповнення.
- Повторення алгоритму розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

Питання для закріплення

1. Що називається визначником квадратної матриці?
2. Для якої матриці можна обчислити визначник?
3. Як позначають визначник матриці?
4. Чим відрізняється запис матриці від запису визначника?
5. Що є результатом обчислення визначника?
6. Що називається визначником другого порядку?
7. Як обчислюється визначник другого порядку?
8. Які елементи утворюють головну діагональ визначника другого порядку?
9. Які елементи утворюють побічну діагональ визначника другого порядку?
10. Який порядок виконання дій під час обчислення визначника другого порядку?

11. Який визначник називається визначником третього порядку?
12. Скільки добутків містить формула обчислення визначника третього порядку?
13. У чому полягає правило трикутників?
14. Які добутки під час застосування правила трикутників беруть зі знаком «плюс»?
15. Які добутки беруть зі знаком «мінус»?
16. У чому полягає правило Саррюса?
17. Які стовпці необхідно умовно дописати під час застосування правила Саррюса?
18. Для визначників якого порядку застосовується правило Саррюса?
19. Що називається мінором елемента визначника?
20. Як позначається мінор елемента a_{ij} ?
21. Який рядок і який стовпець необхідно викреслити для знаходження мінора заданого елемента?
22. Що називається алгебраїчним доповненням елемента визначника?
23. Як позначається алгебраїчне доповнення?
24. За якою формулою обчислюється алгебраїчне доповнення?
25. Як визначити знак алгебраїчного доповнення?
26. Як розташовуються знаки алгебраїчних доповнень у визначнику третього порядку?
27. Як розкласти визначник за елементами першого рядка?
28. Чи можна розкласти визначник за елементами іншого рядка?
29. Чи можна розкласти визначник за елементами стовпця?
30. Які способи обчислення визначника третього порядку були розглянуті на лекції?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ:

Опрацювати конспект лекції «**Визначники матриць**».

Повторити означення визначника квадратної матриці; правило обчислення визначника другого порядку; правило трикутників та правило Саррюса для

визначника третього порядку; означення мінора та алгебраїчного доповнення елемента; порядок знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень; алгоритм розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.

Самостійно повторити розв'язання прикладів, наведених у лекції.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 с.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 с.
3. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2 / за редакцією О. І. Клесова.* Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 с.
4. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики : збірник завдань : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 с.

Лекція 3

ТЕМА: Обернена матриця та її знаходження

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про обернену матрицю; з'ясувати умови існування оберненої матриці; сформувати поняття про невироджену та вироджену квадратні матриці; навчити знаходити обернену матрицю за допомогою визначника, мінорів та алгебраїчних доповнень; сформувати вміння складати матрицю алгебраїчних доповнень та транспонувати її; навчити виконувати перевірку правильності знаходження оберненої матриці за допомогою множення матриць; розвивати логічне та математичне мислення, уважність, послідовність виконання математичних дій та вміння перевіряти отримані результати.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

- 1. Організаційний момент.*
- 2. Перевірка домашнього завдання.*
- 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
- 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
- 5. Вивчення нового матеріалу.*
 - Поняття оберненої матриці.
 - Умова існування оберненої матриці.
 - Вироджена та невироджена квадратні матриці.
 - Формула знаходження оберненої матриці.
 - Алгоритм знаходження оберненої матриці.
 - Знаходження оберненої матриці другого порядку.
 - Знаходження оберненої матриці третього порядку.
 - Перевірка правильності знаходження оберненої матриці.

Тема та її місце в навчальному курсі відповідають робочій програмі: після лекції про визначники та самостійної роботи з їх властивостей передбачено «Лекція 3. Обернена матриця та її знаходження», на яку відведено дві години.

Наступною лекційною темою є системи лінійних алгебраїчних рівнянь і метод Крамера, тому їх розв'язування в цій лекції не розглядаємо.

Навчальні матеріали лекції

Під час вивчення попередніх тем ми ознайомилися з матрицями, навчилися виконувати дії над ними, обчислювати визначники, знаходити мінори та алгебраїчні доповнення.

Ці знання є необхідними для вивчення нового поняття — **оберненої матриці**.

Нагадаємо, що для звичайних чисел існує поняття оберненого числа. Наприклад, для числа 5 оберненим є число

$$\frac{1}{5},$$

оскільки

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

Аналогічна ідея використовується і для квадратних матриць. Однак замість числа 1 у матричній рівності використовується **одинична матриця**.

Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а одинична матриця третього порядку:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Саме поняття одиничної матриці дозволяє сформулювати означення оберненої матриці.

Поняття оберненої матриці

Означення 1. Оберненою до квадратної матриці A називається така матриця A^{-1} , добуток якої на матрицю A як зліва, так і справа дорівнює одиничній матриці.

Математично це записують:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E} \quad (1)$$

де E — одинична матриця відповідного порядку.

Таке означення оберненої матриці наведено і в навчальній літературі з лінійної алгебри: для квадратної матриці A обернена матриця A^{-1} задовольняє рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, де I_n — одинична матриця відповідного порядку.

Зауваження 1

Обернена матриця може бути знайдена **тільки для квадратної матриці**.

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

оберненої матриці в розглянутому нами розумінні не шукаємо, оскільки дана матриця має два рядки та три стовпці, тобто не є квадратною.

Умова існування оберненої матриці

Те, що матриця є квадратною, ще не означає, що для неї обов'язково існує обернена матриця.

Для встановлення можливості знаходження оберненої матриці необхідно обчислити визначник заданої матриці.

Означення 2. Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю.

Тобто

$$\boxed{\det A \neq 0} \quad (2)$$

Якщо визначник квадратної матриці дорівнює нулю, таку матрицю називають **виродженою**:

$$\boxed{\det A = 0} \quad (3)$$

Для невиродженої квадратної матриці існує єдина обернена матриця. Ця умова безпосередньо наведена в навчальних матеріалах з лінійної алгебри.

Отже, необхідно запам'ятати:

якщо $\det A \neq 0$, обернена матриця існує;

якщо $\det A = 0$, обернена матриця не існує.

Приклад 1

Визначити, чи існує обернена матриця для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Перевіримо необхідну умову.

Матриця A є квадратною матрицею другого порядку, тому для неї можна перевірити існування оберненої матриці.

2. Обчислимо визначник матриці.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

За правилом обчислення визначника другого порядку:

$$\det A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1.$$

$$\det A = 8 - 3 = 5.$$

3. Перевіримо умову існування оберненої матриці.

Оскільки

$$5 \neq 0,$$

то

$$\det A \neq 0.$$

Отже, матриця A є невиродженою і для неї існує обернена матриця.

Відповідь: обернена матриця існує.

Приклад 2

Визначити, чи існує обернена матриця для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Матриця є квадратною.

Обчислимо її визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1.$$

$$\det A = 4 - 4 = 0.$$

Отже,

$$\det A = 0.$$

Матриця є виродженою.

Тому оберненої матриці для даної матриці не існує.

Відповідь: обернена матриця не існує.

Формула знаходження оберненої матриці

Нехай задана квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо

$$\det A \neq 0,$$

то обернену матрицю можна знайти за допомогою визначника та алгебраїчних доповнень.

Спочатку для кожного елемента матриці знаходять відповідне алгебраїчне доповнення:

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}.$$

З них складають матрицю алгебраїчних доповнень:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Після транспонування цієї матриці одержують приєднану матрицю:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця визначається формулою

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}} \quad (4)$$

Саме такий спосіб побудови оберненої матриці через визначник і транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень використовується в навчальних матеріалах.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

Для того щоб правильно знайти обернену матрицю, доцільно дотримуватися чіткої послідовності.

Крок 1. Перевірити, чи є задана матриця квадратною.

Крок 2. Обчислити визначник матриці:

$$\det A.$$

Крок 3. Перевірити умову:

$$\det A \neq 0.$$

Якщо визначник дорівнює нулю, оберненої матриці не існує і подальші обчислення не виконують.

Крок 4. Знайти мінори всіх елементів матриці.

Крок 5. Знайти відповідні алгебраїчні доповнення.

Крок 6. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень.

Крок 7. Транспонувати отриману матрицю алгебраїчних доповнень.

Крок 8. Помножити транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень на число

$$\frac{1}{\det A}.$$

Крок 9. Виконати перевірку:

$$AA^{-1} = E.$$

Якщо в результаті множення отримано одиничну матрицю, обернену матрицю знайдено правильно.

Знаходження оберненої матриці другого порядку

Розглянемо квадратну матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Її визначник:

$$\det A = ad - bc.$$

Якщо

$$ad - bc \neq 0,$$

то обернена матриця існує.

Для матриці другого порядку після знаходження алгебраїчних доповнень та їх транспонування отримуємо зручну формулу:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}} \quad (5)$$

Цю формулу можна використовувати для швидкого знаходження оберненої матриці другого порядку.

Приклад 3

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Обчислимо визначник заданої матриці.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}. \\ \det A &= 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3. \\ \det A &= 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\det A = 1 \neq 0,$$

матриця є невиродженою, тому обернена матриця існує.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення.

Для елемента $a_{11} = 2$:

$$A_{11} = 2.$$

Для елемента $a_{12} = 1$:

$$A_{12} = -3.$$

Для елемента $a_{21} = 3$:

$$A_{21} = -1.$$

Для елемента $a_{22} = 2$:

$$A_{22} = 2.$$

Отже, матриця алгебраїчних доповнень має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень.

Отримаємо:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знайдемо обернену матрицю.

Оскільки

$$\det A = 1,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

5. Виконаємо перевірку.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо елементи отриманої матриці.

Перший рядок, перший стовпець:

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 4 - 3 = 1.$$

Перший рядок, другий стовпець:

$$2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -2 + 2 = 0.$$

Другий рядок, перший стовпець:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Другий рядок, другий стовпець:

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1.$$

Отже,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Перевірка підтверджує правильність знайденої оберненої матриці.

Відповідь:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад 4

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Обчислимо визначник матриці.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5.$$

$$\det A = 6 - 5 = 1.$$

Оскільки

$$\det A \neq 0,$$

обернена матриця існує.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = 2,$$

$$A_{12} = -5,$$

$$A_{21} = -1,$$

$$A_{22} = 3.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Після транспонування:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Перевірка.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 1,$$

$$3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0,$$

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 0,$$

$$5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 1.$$

Отже,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обернену матрицю знайдено правильно.

Відповідь:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Знаходження оберненої матриці третього порядку

Для матриці третього порядку послідовність дій залишається такою самою, однак необхідно знайти дев'ять алгебраїчних доповнень.

Розглянемо це на конкретному прикладі.

Приклад 5

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Обчислимо визначник матриці.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\det A = 1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 1(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 0.$$

$$\det A = 1 - (-1) = 2.$$

Отже,

$$\det A = 2 \neq 0.$$

Матриця є невикористаною, тому обернена матриця існує.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів.

Для першого рядка:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Для другого рядка:

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1.$$

Для третього рядка:

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. Складемо матрицю алгебраїчних доповнень.

$$A_{\text{доп}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень.

Рядки стають відповідними стовпцями:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Застосуємо формулу знаходження оберненої матриці.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Оскільки

$$\det A = 2,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6. Виконаємо перевірку.

Необхідно перевірити рівність

$$AA^{-1} = E.$$

Маємо:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо множення:

$$AA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Перевірка виконана. Обернену матрицю знайдено правильно.

Відповідь:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Навчальний практикум також подає знаходження оберненої матриці саме в такій послідовності: перевіряється ненульове значення визначника, знаходяться алгебраїчні доповнення, записується їх транспонована матриця, будується обернена матриця та виконується перевірка множенням.

Особливості знаходження оберненої матриці

Під час виконання завдань необхідно звертати увагу на декілька важливих моментів.

Перше. Перед знаходженням мінорів та алгебраїчних доповнень обов'язково потрібно обчислити визначник.

Якщо

$$\det A = 0,$$

подальші обчислення виконувати не потрібно, оскільки оберненої матриці не існує.

Друге. Необхідно правильно визначати знаки алгебраїчних доповнень:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Третє. Після знаходження всіх алгебраїчних доповнень необхідно виконати транспонування. Саме на цьому етапі часто допускають помилку, залишаючи елементи на початкових місцях.

Четверте. Після знаходження оберненої матриці доцільно виконати перевірку.

Якщо матрицю знайдено правильно, повинна виконуватися рівність:

$$AA^{-1} = E.$$

Приклад 6. Встановлення неможливості знаходження оберненої матриці

Знайти, якщо можливо, матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Перш ніж знаходити алгебраїчні доповнення, необхідно перевірити умову існування оберненої матриці.

Обчислимо визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо його за правилом трикутників:

$$\det A = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1.$$

Виконаємо множення:

$$\det A = 4 + 12 + 6 - 12 - 6 - 4.$$

$$\det A = 22 - 22 = 0.$$

Отже,

$$\det A = 0.$$

Матриця є виродженою.

Оскільки визначник дорівнює нулю, обернена матриця не існує.

Знаходити мінори, алгебраїчні доповнення та виконувати подальші обчислення немає потреби.

Відповідь: обернена матриця не існує.

Застосування оберненої матриці у подальшій математичній підготовці

Обернена матриця є важливим поняттям лінійної алгебри. Її вивчення створює математичну основу для подальшої роботи з матричними рівностями та системами лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для здобувачів освіти спеціальності J8 «Автомобільний транспорт» матричний апарат може бути корисним під час математичного опису взаємопов'язаних технічних величин, опрацювання числових даних та побудови математичних моделей технічних процесів.

На цьому занятті важливо засвоїти саме **поняття оберненої матриці, умову її існування та алгоритм її знаходження.**

Застосування матриць до безпосереднього розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь зараз не розглядаємо. Це відповідає послідовності Вашої робочої програми: після Лекції 3 передбачена Лекція 4 «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера», а матричний метод винесено в окрему самостійну роботу.

6. Закріплення вивченого матеріалу

- Повторення поняття оберненої матриці.
- Повторення умови існування оберненої матриці.
- Повторення понять виродженої та невиродженої матриць.
- Повторення формули знаходження оберненої матриці.
- Повторення послідовності знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень.
- Повторення порядку складання та транспонування матриці алгебраїчних доповнень.
- Повторення способу перевірки знайденої оберненої матриці.

Питання для закріплення

1. Яка матриця називається оберненою до заданої матриці?
2. Як позначається обернена матриця?
3. Для яких матриць можна знаходити обернену матрицю?
4. Яка рівність визначає обернену матрицю?
5. Яку роль в означенні оберненої матриці відіграє одинична матриця?
6. Яка квадратна матриця називається невиродженою?
7. Яка квадратна матриця називається виродженою?
8. За якої умови існує обернена матриця?
9. Чи існує обернена матриця, якщо визначник заданої матриці дорівнює нулю?
10. Що необхідно обчислити насамперед під час знаходження оберненої матриці?
11. Навіщо перед знаходженням оберненої матриці обчислюють її визначник?
12. Які величини необхідно знайти для побудови матриці алгебраїчних доповнень?

13. Як знаходять мінор елемента матриці?
14. Як знаходять алгебраїчне доповнення елемента?
15. Яка схема знаків використовується для алгебраїчних доповнень матриці третього порядку?
16. Як складається матриця алгебраїчних доповнень?
17. Що необхідно зробити з матрицею алгебраїчних доповнень перед остаточною знаходженням оберненої матриці?
18. Що означає транспонувати матрицю?
19. За якою формулою знаходиться обернена матриця?
20. Як знайти обернену матрицю другого порядку?
21. Яка послідовність знаходження оберненої матриці третього порядку?
22. Як перевірити правильність знайденої оберненої матриці?
23. Яку матрицю повинні отримати в результаті множення AA^{-1} ?
24. Чому знаходження оберненої матриці потрібно починати саме з обчислення визначника?
25. Які найбільш поширені помилки можуть виникнути під час знаходження оберненої матриці?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Обернена матриця та її знаходження».

Повторити:

- означення оберненої матриці;
- означення виродженої та невиродженої матриць;
- умову існування оберненої матриці;
- формулу знаходження оберненої матриці;
- порядок знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень;
- порядок транспонування матриці алгебраїчних доповнень;
- алгоритм знаходження оберненої матриці;
- спосіб перевірки правильності отриманого результату.

Повторити розв'язання наведених у лекції прикладів та підготуватися до **Практичного заняття 3 «Обернена матриця»**, передбаченого робочою програмою.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2 / за редакцією О. І. Клєсова.* Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
4. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики : збірник завдань : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Лекція 4

ТЕМА: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про систему лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв'язок; ознайомити з поняттями сумісної, несумісної, визначеної та невизначеної систем; сформувати вміння записувати системи двох і трьох лінійних рівнянь; навчити визначати основний та допоміжні визначники системи; сформувати вміння застосовувати метод Крамера для розв'язування систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь; навчити виконувати покрокові обчислення та перевіряти отриманий розв'язок підстановкою у початкову систему; розвивати математичне та логічне мислення, уважність, послідовність виконання обчислень і вміння застосовувати математичний апарат до розрахункових задач.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.

2. Перевірка домашнього завдання.

3. Повідомлення теми та мети заняття.

4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.

5. Вивчення нового матеріалу.

- Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
- Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
- Сумісні та несумісні системи.
- Визначені та невизначені системи.
- Система двох лінійних рівнянь із двома невідомими.
- Метод Крамера для системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими.
- Система трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими.
- Метод Крамера для системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими.
- Алгоритм розв'язування систем методом Крамера.
- Перевірка отриманого розв'язку.

Саме така тема передбачена робочою програмою після практичного заняття з оберненої матриці. Після неї окремо передбачено самостійну роботу з матричного методу та самостійну роботу з методу Гаусса, тому ці способи розв'язування систем у даній лекції не розглядаємо.

Навчальні матеріали лекції

Під час вивчення попередніх тем було розглянуто матриці, визначники, мінори, алгебраїчні доповнення та обернену матрицю.

Наступним етапом є застосування отриманих знань до розв'язування **систем лінійних алгебраїчних рівнянь**.

Системи рівнянь використовують у тих випадках, коли декілька невідомих величин пов'язані між собою декількома математичними залежностями і необхідно одночасно знайти значення всіх цих величин.

Для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт» такий математичний апарат має прикладне значення, оскільки під час розрахунків можуть одночасно визначатися декілька взаємопов'язаних параметрів технічного об'єкта або технологічного процесу. Саме такий практичний акцент визначено робочою програмою дисципліни.

Поняття лінійного алгебраїчного рівняння

Розглянемо рівняння:

$$3x + 2y = 7.$$

У цьому рівнянні x та y є невідомими, числа 3 і 2 — коефіцієнтами при невідомих, а число 7 — вільним членом.

Означення 1. Лінійним алгебраїчним рівнянням із n невідомими називається рівняння виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — невідомі; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — коефіцієнти при невідомих; b — вільний член.

Наприклад,

$$2x + 3y = 5$$

є лінійним рівнянням із двома невідомими.

Рівняння

$$x - 2y + 4z = 8$$

є лінійним рівнянням із трьома невідомими.

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Якщо декілька лінійних рівнянь містять однакові невідомі та повинні виконуватися одночасно, вони утворюють систему.

Наприклад:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Це система двох лінійних рівнянь із двома невідомими x та y .

Означення 2. Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається сукупність лінійних рівнянь з одними й тими самими невідомими, які повинні виконуватися одночасно.

Загальний вигляд системи m лінійних рівнянь із n невідомими можна записати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Тут:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — невідомі;

a_{ij} — коефіцієнти при невідомих;

$b_1, b_2, \dots, b_m$ — вільні члени.

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення 3. Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається така сукупність значень невідомих, при підстановці яких кожне рівняння системи перетворюється на правильну числову рівність.

Наприклад, розглянемо систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Нехай

$$x = 3, y = 2.$$

Перевіримо перше рівняння:

$$3 + 2 = 5.$$

Отримали правильну рівність.

Перевіримо друге рівняння:

$$3 - 2 = 1.$$

Також отримали правильну рівність.

Отже,

$$x = 3, y = 2$$

є розв'язком заданої системи.

Сумісні та несумісні системи

Залежно від наявності розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь поділяють на **сумісні** та **несумісні**.

Означення 4. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Наприклад,

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

є сумісною, оскільки має розв'язок

$$x = 3, y = 2.$$

Означення 5. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку.

Наприклад:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Одна й та сама сума $x + y$ не може одночасно дорівнювати і числу 2, і числу 5.

Тому така система не має розв'язків і є несумісною.

Визначені та невизначені системи

Сумісні системи, у свою чергу, можуть бути визначеними або невизначеними.

Означення 6. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок.

Наприклад,

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок

$$x = 3, y = 2.$$

Отже, ця система є визначеною.

Означення 7. Сумісна система називається невизначеною, якщо вона має нескінченно багато розв'язків.

Наприклад:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

Друге рівняння фактично повторює перше після множення його лівої та правої частин на число 2.

Тому система має нескінченно багато розв'язків.

Наприклад:

$$\begin{aligned} x &= 1, y = 2; \\ x &= 2, y = 1; \\ x &= 0, y = 3. \end{aligned}$$

Кожна з цих пар задовольняє систему.

Система двох лінійних рівнянь із двома невідомими

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Для її розв'язування методом Крамера використовують визначники.

З коефіцієнтів при невідомих складають **основний визначник системи**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Для знаходження невідомого x перший стовпець коефіцієнтів замінюють стовпцем вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Для знаходження невідомого y другий стовпець коефіцієнтів замінюють стовпцем вільних членів:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Якщо

$$\Delta \neq 0,$$

то система має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Метод Крамера

Метод Крамера є способом розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою визначників.

Для застосування методу Крамера до системи з n невідомими розглядається система з n рівнянь, а основний визначник системи повинен бути відмінним від нуля.

У рекомендованому збірнику задач метод Крамера подано через основний визначник та допоміжні визначники, а розв'язок системи визначається відношеннями відповідних допоміжних визначників до основного.

Алгоритм розв'язування системи методом Крамера

Для розв'язування системи методом Крамера доцільно дотримуватися такої послідовності.

Крок 1. Записати систему у стандартному вигляді.

Крок 2. Скласти основний визначник системи Δ з коефіцієнтів при невідомих.

Крок 3. Обчислити основний визначник.

Крок 4. Перевірити умову:

$$\Delta \neq 0.$$

Крок 5. Скласти допоміжний визначник для першої невідомої, замінивши відповідний стовпець коефіцієнтів стовпцем вільних членів.

Крок 6. Аналогічно скласти допоміжні визначники для інших невідомих.

Крок 7. Обчислити допоміжні визначники.

Крок 8. Застосувати формули Крамера.

Крок 9. Записати відповідь.

Крок 10. Виконати перевірку підстановкою знайдених значень у початкову систему.

Приклад 1

Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Складемо основний визначник системи.

Коефіцієнти при невідомих:

у першому рівнянні — 2 і 1;

у другому рівнянні — 1 і -1.

Тому

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо:

$$\Delta = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1.$$

$$\Delta = -2 - 1 = -3.$$

Отже,

$$\Delta = -3 \neq 0.$$

Тому система має єдиний розв'язок і можна застосувати формули Крамера.

2. Знайдемо визначник Δ_x .

Для цього перший стовпець коефіцієнтів замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta_x = 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 1.$$

$$\Delta_x = -5 - 1 = -6.$$

3. Знайдемо визначник Δ_y .

Другий стовпець коефіцієнтів замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta_y = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1.$$

$$\Delta_y = 2 - 5 = -3.$$

4. Знайдемо невідомі за формулами Крамера.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Отже,

$$x = 2, y = 1.$$

5. Виконаємо перевірку.

Підставимо знайдені значення у перше рівняння:

$$2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

$$4 + 1 = 5.$$

$$5 = 5.$$

Перше рівняння виконується.

Перевіримо друге рівняння:

$$2 - 1 = 1.$$

$$1 = 1.$$

Друге рівняння також виконується.

Отже, систему розв'язано правильно.

Відповідь:

$$\boxed{x = 2, y = 1.}$$

Приклад 2

Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Знайдемо основний визначник.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}. \\ \Delta &= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1. \\ \Delta &= -6 - 2 = -8. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\Delta = -8 \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок.

2. Знайдемо Δ_x .

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}. \\ \Delta_x &= 7 \cdot (-2) - 2 \cdot 1. \\ \Delta_x &= -14 - 2 = -16. \end{aligned}$$

3. Знайдемо Δ_y .

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}. \\ \Delta_y &= 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1. \\ \Delta_y &= 3 - 7 = -4. \end{aligned}$$

4. Застосуємо формули Крамера.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-16}{-8} = 2. \\ y &= \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$x = 2, y = \frac{1}{2}.$$

5. Перевірка.

Перше рівняння:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

$$6 + 1 = 7.$$

$$7 = 7.$$

Друге рівняння:

$$2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$2 - 1 = 1.$$

$$1 = 1.$$

Обидва рівняння виконуються.

Відповідь:

$$x = 2, y = \frac{1}{2}.$$

Метод Крамера для системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Для розв'язування такої системи складаємо основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для знаходження x замінюємо **перший стовпець** коефіцієнтів стовпцем вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для знаходження y замінюємо **другий стовпець**:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для знаходження змінюємо **третій стовпець**:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо

$$\Delta \neq 0,$$

то розв'язок знаходять за формулами:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Саме в такій формі метод Крамера для системи трьох рівнянь із трьома невідомими подано у рекомендованому збірнику задач.

Приклад 3

Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Складемо та обчислимо основний визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначники другого порядку:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1. \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 - 1 = -3. \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Тому

$$\Delta = -1 - (-3) + 5.$$
$$\Delta = -1 + 3 + 5 = 7.$$

Оскільки

$$\Delta = 7 \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок.

2. Знайдемо Δ_x .

Перший стовпець замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо за елементами першого рядка:

$$\Delta_x = 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta_x = 6(-1) - (3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2).$$

$$\Delta_x = -6 - (-5) + 8.$$

$$\Delta_x = 7.$$

3. Знайдемо Δ_y .

Другий стовпець замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо за елементами першого рядка:

$$\Delta_y = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta_y = (-5) - 6(-3) + (4 - 3).$$

$$\Delta_y = -5 + 18 + 1.$$

$$\Delta_y = 14.$$

4. Знайдемо Δ_z .

Третій стовпець замінюємо стовпцем вільних членів:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо за елементами першого рядка:

$$\Delta_z = 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta_z = ((-1) \cdot 2 - 3 \cdot 2) - (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 6(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1).$$

$$\Delta_z = -8 - 1 + 6 \cdot 5.$$

$$\Delta_z = -9 + 30 = 21.$$

5. Застосуємо формули Крамера.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3.$$

Отже,

$$x = 1, y = 2, z = 3.$$

6. Виконаємо перевірку.

Перше рівняння:

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

$$6 = 6.$$

Друге рівняння:

$$2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3.$$

$$2 - 2 + 3 = 3.$$

$$3 = 3.$$

Третє рівняння:

$$1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2.$$

$$1 + 4 - 3 = 2.$$

$$2 = 2.$$

Усі рівняння системи виконуються.

Відповідь:

$$\boxed{x = 1, y = 2, z = 3.}$$

Приклад 4

Розв'язати методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Знайдемо основний визначник.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо його за елементами першого рядка:

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta = 1(-2 - 1) - 2(4 - 3) - (2 + 3).$$

$$\Delta = -3 - 2 - 5 = -10.$$

Отже,

$$\Delta = -10 \neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок.

2. Знайдемо Δ_x .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо за елементами першого рядка:

$$\Delta_x = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_x = -3 - 2(4 - 9) - (2 + 9).$$

$$\Delta_x = -3 + 10 - 11 = -4.$$

3. Знайдемо Δ_y .

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_y = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_y = (4 - 9) - (4 - 3) - (18 - 6).$$

$$\Delta_y = -5 - 1 - 12 = -18.$$

4. Знайдемо Δ_z .

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_z = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_z = (-9 - 2) - 2(18 - 6) + (2 + 3).$$

$$\Delta_z = -11 - 24 + 5 = -30.$$

5. Застосуємо формули Крамера.

$$x = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5},$$

$$y = \frac{-18}{-10} = \frac{9}{5},$$

$$z = \frac{-30}{-10} = 3.$$

Отже,

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{9}{5}, z = 3.$$

6. Перевіримо отриманий результат.

Перше рівняння:

$$\frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - 3 = \frac{2}{5} + \frac{18}{5} - \frac{15}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Друге рівняння:

$$2 \cdot \frac{2}{5} - \frac{9}{5} + 3 = \frac{4}{5} - \frac{9}{5} + \frac{15}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Третє рівняння:

$$3 \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{5} + 2 \cdot 3 = \frac{6}{5} + \frac{9}{5} + 6 = 3 + 6 = 9.$$

Усі рівняння виконуються.

Відповідь:

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{9}{5}, z = 3.$$

Випадки, які можуть виникати під час застосування визначників

Під час розв'язування системи насамперед обчислюють основний визначник.

Перший випадок

Якщо

$$\Delta \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера.

Для трьох невідомих:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Другий випадок

Якщо основний визначник дорівнює нулю, а серед відповідних допоміжних визначників є ненульовий, система не має розв'язку.

Третій випадок

Якщо основний і всі відповідні допоміжні визначники дорівнюють нулю, метод Крамера не дає єдиного розв'язку; у межах розглянутих у навчальних матеріалах випадків така система може мати нескінченно багато розв'язків. Саме ці випадки окремо зазначені у рекомендованому збірнику задач.

Для даної лекції основну увагу приділяємо випадку

$$\Delta \neq 0,$$

оскільки саме в цьому випадку формули Крамера безпосередньо визначають єдиний розв'язок системи.

Приклад 5. Система, для якої основний визначник дорівнює нулю

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Знайдемо допоміжний визначник Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_x = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5.$$

$$\Delta_x = 4 - 5 = -1.$$

Отже,

$$\Delta = 0, \Delta_x \neq 0.$$

Система є несумісною і розв'язків не має.

Переконаємося в цьому безпосередньо.

Перше рівняння:

$$x + y = 2.$$

Помножимо його на 2:

$$2x + 2y = 4.$$

А друге рівняння вимагає:

$$2x + 2y = 5.$$

Одна й та сама ліва частина не може одночасно дорівнювати 4 і 5.

Відповідь: система розв'язків не має.

Приклад 6. Система з нескінченною кількістю розв'язків

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 2 - 2 = 0.$$

Знайдемо Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_x = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 6 - 6 = 0.$$

Знайдемо Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_y = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0.$$

Отже,

$$\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0.$$

Друге рівняння одержується множенням першого рівняння на число 2.

Тому фактично маємо одну умову:

$$x + y = 3.$$

Їй задовольняє нескінченно багато пар чисел.

Наприклад:

$$x = 0, y = 3;$$

$$x = 1, y = 2;$$

$$x = 2, y = 1;$$

$$x = 3, y = 0.$$

Отже, система має нескінченно багато розв'язків.

Відповідь: система сумісна та невизначена.

Практичне значення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь мають важливе значення для математичного опису технічних процесів.

У галузі автомобільного транспорту під час виконання розрахунків часто необхідно одночасно визначати декілька невідомих параметрів, між якими існують певні залежності.

Це можуть бути величини, пов'язані з рухом автомобіля, розподілом навантажень, витратами ресурсів, організацією транспортної роботи та іншими розрахунковими характеристиками.

Робоча програма безпосередньо передбачає застосування систем лінійних рівнянь до задач, у яких необхідно одночасно визначати декілька взаємопов'язаних параметрів технічного об'єкта або процесу.

Приклад 7. Прикладна задача

Під час виконання транспортної роботи використовуються два автомобілі. За одну умовну зміну перший автомобіль виконав на одну поїздку більше, ніж другий. Разом автомобілі виконали 9 поїздок.

Визначити кількість поїздок кожного автомобіля.

Позначимо:

x — кількість поїздок першого автомобіля;

y — кількість поїздок другого автомобіля.

За умовою разом виконано 9 поїздок:

$$x + y = 9.$$

Перший автомобіль виконав на одну поїздку більше:

$$x - y = 1.$$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$
$$\Delta = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2.$$

Оскільки

$$\Delta = -2 \neq 0,$$

можна застосувати метод Крамера.

Знайдемо Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$
$$\Delta_x = 9 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -10.$$

Знайдемо Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$
$$\Delta_y = 1 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = -8.$$

Знайдемо невідомі:

$$x = \frac{-10}{-2} = 5,$$

$$y = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Отже, перший автомобіль виконав 5 поїздок, а другий — 4 поїздки.

Перевірка

Загальна кількість:

$$5 + 4 = 9.$$

Різниця:

$$5 - 4 = 1.$$

Обидві умови виконуються.

Відповідь: перший автомобіль виконав 5 поїздок, другий автомобіль виконав 4 поїздки.

Основні помилки під час застосування методу Крамера

Під час розв'язування систем методом Крамера необхідно бути особливо уважними.

Перша помилка — неправильне складання основного визначника.

Коефіцієнти необхідно записувати у тому самому порядку, в якому записані невідомі в системі.

Наприклад, якщо порядок невідомих

$$x, y, z,$$

то в кожному рядку визначника коефіцієнти повинні бути записані саме при x , потім при y , потім при z .

Друга помилка — неправильна заміна стовпця.

Під час знаходження Δ_x замінюють тільки стовець коефіцієнтів при x .

Під час знаходження Δ_y замінюють тільки стовець коефіцієнтів при y .

Під час знаходження Δ_z замінюють тільки стовець коефіцієнтів при z .

Інші стовпці залишають без змін.

Третя помилка — неправильне обчислення визначників.

Особливо уважно необхідно працювати з від'ємними числами.

Четверта помилка — використання формул Крамера без перевірки основного визначника.

Перед застосуванням формул

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

необхідно перевірити, що

$$\Delta \neq 0.$$

П'ята помилка — відсутність перевірки.

Після знаходження невідомих доцільно підставити їх значення в усі початкові рівняння системи.

6. Закріплення вивченого матеріалу

- Повторення поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
- Повторення поняття розв'язку системи.
- Повторення понять сумісної та несумісної систем.
- Повторення понять визначеної та невизначеної систем.
- Повторення порядку складання основного визначника.
- Повторення порядку складання допоміжних визначників.
- Повторення формул Крамера.
- Повторення алгоритму розв'язування системи методом Крамера.
- Повторення способу перевірки отриманого розв'язку.

Питання для закріплення

1. Що називається лінійним алгебраїчним рівнянням?
2. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. Що називається розв'язком системи?
4. Що означає розв'язати систему рівнянь?
5. Яка система називається сумісною?
6. Яка система називається несумісною?
7. Яка сумісна система називається визначеною?
8. Яка сумісна система називається невизначеною?

9. Скільки розв'язків має визначена система?
10. Скільки розв'язків може мати невизначена система?
11. У чому полягає метод Крамера?
12. Для яких систем застосовується метод Крамера в розглянутих на лекції випадках?
13. Як складається основний визначник системи?
14. Як позначається основний визначник?
15. Як складається визначник Δ_x ?
16. Який стовпець замінюється під час складання Δ_x ?
17. Як складається визначник Δ_y ?
18. Який стовпець замінюється під час складання Δ_y ?
19. Як складається визначник Δ_z ?
20. Який стовпець замінюється під час складання Δ_z ?
21. Яка умова дозволяє безпосередньо застосовувати формули Крамера?
22. За якою формулою знаходять x ?
23. За якою формулою знаходять y ?
24. За якою формулою знаходять z ?
25. Що можна сказати про систему, якщо основний визначник не дорівнює нулю?
26. Який випадок виникає, якщо основний визначник дорівнює нулю, а один із відповідних допоміжних визначників не дорівнює нулю?
27. Що означає одночасне дорівнювання нулю основного та всіх допоміжних визначників у розглянутих прикладах?
28. Чому важливо зберігати однаковий порядок невідомих у всіх рівняннях?
29. Як виконується перевірка отриманого розв'язку?
30. Чому перевірка є важливою частиною розв'язування системи?
31. Де системи лінійних рівнянь можуть застосовуватися у професійній підготовці фахівця автомобільного транспорту?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера».

Повторити:

- поняття лінійного алгебраїчного рівняння;
- поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- поняття розв'язку системи;
- поняття сумісної та несумісної систем;
- поняття визначеної та невизначеної систем;
- порядок складання основного визначника;
- порядок складання допоміжних визначників;
- формули Крамера;
- алгоритм розв'язування систем двох рівнянь із двома невідомими;
- алгоритм розв'язування систем трьох рівнянь із трьома невідомими;
- порядок перевірки отриманого розв'язку.

Самостійно повторити розв'язання прикладів, наведених у лекції.

Матричний метод та метод Гаусса самостійно наперед не опрацьовувати в межах цієї лекції: робочою програмою вони винесені в окремі наступні самостійні роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.

4. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : збірник завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
5. **Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В.** *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.

Лекція 5

ТЕМА: Вектори та дії над ними

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про вектор та основні характеристики вектора; ознайомити з геометричним і координатним поданням векторів; сформувати поняття нульового, одиничного, рівних, протилежних, колінеарних та компланарних векторів; навчити знаходити координати вектора за координатами його початку і кінця, визначати довжину вектора, виконувати додавання та віднімання векторів, множення вектора на число; сформувати вміння виконувати лінійні дії над векторами у координатній формі та перевіряти отримані результати; показати практичне значення векторів під час математичного опису фізичних і технічних величин у галузі автомобільного транспорту; розвивати просторове, логічне та математичне мислення, уважність і послідовність виконання обчислень.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

- 1. Організаційний момент.*
- 2. Перевірка домашнього завдання.*
- 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
- 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
- 5. Вивчення нового матеріалу.*
 - Поняття вектора.
 - Початок і кінець вектора.
 - Довжина вектора.
 - Нульовий та одиничний вектори.
 - Рівні та протилежні вектори.
 - Колінеарні та компланарні вектори.
 - Координати вектора.
 - Знаходження координат вектора за координатами його початку і кінця.
 - Довжина вектора, заданого координатами.

- Додавання векторів.
- Віднімання векторів.
- Множення вектора на число.
- Дії над векторами у координатній формі.
- Приклади застосування векторів.

Такий зміст відповідає змістовому модулю робочої програми «**Елементи лінійної та векторної алгебри**». Основні означення та координатні дії над векторами узгоджені з рекомендованою навчальною літературою, де окремо розглянуто координати вектора, рівність векторів, додавання, віднімання та множення вектора на число.

Навчальні матеріали лекції

Векторне числення є важливою складовою вищої математики. На відміну від звичайного числа, за допомогою якого можна характеризувати лише числове значення певної величини, вектор дозволяє одночасно задавати **величину і напрям**.

У технічних дисциплінах векторний апарат має особливо важливе значення. Наприклад, швидкість автомобіля характеризується не тільки числовим значенням, але й напрямом руху. Сила також має величину та напрям дії. Переміщення транспортного засобу визначається відстанню між початковим і кінцевим положеннями та напрямом цього переміщення.

Тому знання основ векторної алгебри необхідне для подальшого вивчення математичних і технічних дисциплін.

1. Поняття вектора

Розглянемо дві точки площини A і B .

Якщо вказати, що рух відбувається від точки A до точки B , отримуємо напрямлений відрізок.

Означення 1. Вектором називається напрямлений відрізок, який характеризується довжиною та напрямом.

Вектор, початком якого є точка A , а кінцем — точка B , позначають

$$\overrightarrow{AB}.$$

Також вектори можна позначати однією малою літерою зі стрілкою:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

У записі

$$\overrightarrow{AB}$$

точка A є **початком вектора**, а точка B — **кінцем вектора**.

Напрямок вектора визначається від його початку до його кінця.

2. Довжина вектора

Кожний ненульовий вектор має певну довжину.

Означення 2. Довжиною, або модулем, вектора називається довжина відрізка, який зображує цей вектор.

Довжину вектора $\vec{a}$ позначають:

$$|\vec{a}|.$$

Для вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = AB.$$

Довжина вектора є числом і не може бути від'ємною.

Отже,

$$|\vec{a}| \geq 0.$$

3. Нульовий вектор

Якщо початок і кінець вектора збігаються, отримуємо нульовий вектор.

Означення 3. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим вектором.

Нульовий вектор позначають:

$$\vec{0}.$$

Його довжина дорівнює нулю:

$$|\vec{0}| = 0.$$

Наприклад,

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

4. Одиничний вектор

Означення 4. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним вектором**.

Отже, якщо $\vec{e}$ — одиничний вектор, то

$$|\vec{e}| = 1.$$

Одиничні вектори використовують для задання напрямів у просторі та побудови систем координат.

5. Колінеарні вектори

Означення 5. Два ненульові вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Колінеарні вектори можуть бути **співнаправленими** або **протилежно напрямленими**.

Якщо вектори мають однаковий напрям, вони **співнаправлені**.

Якщо напрямки векторів протилежні, вони **протилежно напрямлені**.

6. Рівні вектори

Означення 6. Два вектори називаються **рівними**, якщо вони **співнаправлені** та мають **однакові довжини**.

Якщо

$$\vec{a} = \vec{b},$$

то одночасно виконуються дві умови:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

і вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають однаковий напрям.

Рівність векторів не залежить від місця їх розташування на площині або у просторі.

7. Протилежні вектори

Означення 7. Два вектори називаються протилежними, якщо вони мають однакові довжини, але протилежні напрями.

Якщо вектор $\vec{b}$ протилежний вектору $\vec{a}$, то

$$\boxed{\vec{b} = -\vec{a}.}$$

Наприклад,

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.}$$

При цьому

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|.$$

8. Компланарні вектори

Поняття компланарності використовується для векторів у просторі.

Означення 8. Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або їх можна перенести паралельним перенесенням так, щоб вони лежали в одній площині.

Будь-які два вектори завжди можна розмістити в одній площині.

Для трьох і більшої кількості векторів умова компланарності вже має суттєве значення.

У рекомендованій навчальній літературі некомпланарні вектори, зокрема, використовуються для побудови базису у просторі.

9. Координати вектора

Розглянемо прямокутну декартову систему координат на площині.

Нехай задано точки:

$$A(x_1; y_1)$$

і

$$B(x_2; y_2).$$

Вектор

$$\overrightarrow{AB}$$

напрямлений від точки A до точки B .

Щоб знайти його координати, необхідно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку.

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2; -x_1 \ y_2 - y_1).$$

Для простору, якщо

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2),$$

то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2; -; x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1).$$

Координатне подання вектора є основою для виконання дій над векторами. У рекомендованому посібнику зазначено, що додаванню та відніманню векторів відповідає додавання та віднімання їхніх координат, а множенню вектора на число — множення кожної його координати на це число.

Приклад 1

Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо

$$A(2; 3), B(7; 8).$$

Розв'язання

Для знаходження координат вектора використовуємо формулу:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B; -x_A \ y_B - y_A).$$

Підставимо координати точок:

$$\overrightarrow{AB} = (7; -2 \ 8 - 3).$$

Виконуємо обчислення:

$$7 - 2 = 5,$$

$$8 - 3 = 5.$$

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = (5; 5).$$

Перевірка

Від координат точки A додамо отримані координати вектора:

$$(2; +5 \ 3 + 5) = (7; 8).$$

Отримали координати точки B , тому координати вектора визначено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (5; 5)}.$$

Приклад 2

Знайти координати вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо

$$M(-; 32), N(4; -1).$$

Розв'язання

Застосуємо формулу:

$$\overrightarrow{MN} = (x_N; -x_M \ y_N - y_M).$$

Підставляємо координати:

$$\overrightarrow{MN} = (4; -(-3) \ -1 - 2).$$

Обчислюємо першу координату:

$$4 - (-3) = 4 + 3 = 7.$$

Обчислюємо другу координату:

$$-1 - 2 = -3.$$

Отже,

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = (7; -3)}.$$

Перевірка

$$(-; 3 + 7 \ 2 - 3) = (4; -1).$$

Отримали координати точки N .

Відповідь:

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = (7; -3)}.$$

10. Довжина вектора, заданого координатами

Нехай на площині задано вектор

$$\vec{a} = (x; y).$$

Його довжину визначають за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Якщо у просторі

$$\vec{a} = (x; y; z),$$

то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Приклад 3

Знайти довжину вектора

$$\vec{a} = (3; 4).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для заданого вектора:

$$x = 3, y = 4.$$

Підставляємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

Підносимо числа до квадрата:

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{25}.$$

$$|\vec{a}| = 5.$$

Відповідь:

$$|\vec{a}| = 5.$$

Приклад 4

Знайти довжину вектора

$$\vec{b} = (-; 2; 36).$$

Розв'язання

Вектор заданий у просторі, тому використовуємо формулу:

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Підставляємо координати:

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}.$$

Обчислюємо:

$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 36}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{49}.$$

$$|\vec{b}| = 7.$$

Відповідь:

$$|\vec{b}| = 7.$$

11. Додавання векторів

Додавання векторів можна виконувати геометрично та у координатній формі.

Правило трикутника

Нехай задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Щоб геометрично знайти суму

$$\vec{a} + \vec{b},$$

необхідно від кінця першого вектора відкласти другий вектор.

Вектор, який сполучає початок першого вектора з кінцем другого, є сумою заданих векторів.

Правило паралелограма

Якщо два вектори відкладено від однієї точки, на них можна побудувати паралелограм.

Діагональ паралелограма, проведена зі спільного початку векторів, зображує їх суму.

Додавання векторів у координатній формі

Нехай

$$\vec{a} = (a_1; a_2),$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2).$$

Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; +b_1 \ a_2 + b_2).$$

Для векторів у просторі:

$$(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1; +; b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3).$$

Це правило безпосередньо відповідає координатному поданню лінійних дій над векторами у рекомендованому навчальному посібнику.

Приклад 5

Знайти суму векторів

$$\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (4; -1).$$

Розв'язання

Використовуємо правило додавання векторів у координатній формі:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2; +4 \ 3 + (-1)).$$

Обчислюємо першу координату:

$$2 + 4 = 6.$$

Другу координату:

$$3 + (-1) = 2.$$

Отже,

$$\vec{a} + \vec{b} = (6; 2).$$

Відповідь:

$$(6; 2).$$

Приклад 6

Знайти суму векторів

$$\vec{a} = (1; -; 24),$$

$$\vec{b} = (3; 5; -1).$$

Розв'язання

Додаємо відповідні координати:

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; +; 3 \ -2 + 5 \ 4 + (-1)).$$

Обчислюємо:

$$\begin{aligned}1 + 3 &= 4, \\ -2 + 5 &= 3, \\ 4 + (-1) &= 3.\end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a} + \vec{b} = (4; 3; 3).$$

Відповідь:

$$(4; 3; 3).$$

12. Віднімання векторів

Віднімання векторів пов'язане з поняттям протилежного вектора.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ та вектора, протилежного до $\vec{b}$.

Тобто

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

У координатній формі, якщо

$$\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2),$$

то

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1; -b_1 \ a_2 - b_2).$$

Приклад 7

Знайти різницю векторів

$$\vec{a} = (7; 4), \vec{b} = (2; 6).$$

Розв'язання

Віднімаємо відповідні координати:

$$\vec{a} - \vec{b} = (7; -2 \ 4 - 6).$$

Обчислюємо:

$$\begin{aligned}7 - 2 &= 5, \\ 4 - 6 &= -2.\end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a} - \vec{b} = (5; -2).$$

Перевірка

До отриманого вектора додамо $\vec{b}$:

$$(5; -2) + (2; 6) = (7; 4).$$

Отримали вектор $\vec{a}$, тому різницю знайдено правильно.

Відповідь:

$$(5; -2).$$

13. Множення вектора на число

Нехай задано вектор $\vec{a}$ і число λ .

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda| |\vec{a}|$.

Якщо

$$\lambda > 0,$$

то вектор $\lambda\vec{a}$ має той самий напрям, що й вектор $\vec{a}$.

Якщо

$$\lambda < 0,$$

то напрям вектора $\lambda\vec{a}$ протилежний напрямку вектора $\vec{a}$.

Якщо

$$\lambda = 0,$$

то

$$0\vec{a} = \vec{0}.$$

Множення вектора на число у координатній формі

Нехай

$$\vec{a} = (a_1; a_2).$$

Тоді

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2).$$

Для вектора у просторі:

$$\lambda(a_1; a_2; a_3) = (\lambda; a_1; \lambda a_2 \lambda a_3).$$

Отже, для множення вектора на число необхідно **кожну координату вектора помножити на це число**. Саме таке правило наведено у рекомендованій літературі.

Приклад 8

Задано вектор

$$\vec{a} = (2; -3).$$

Знайти

$$3\vec{a}.$$

Розв'язання

Множимо кожну координату вектора на число 3:

$$3\vec{a} = (3; \cdot 2 \ 3 \cdot (-3)).$$

Обчислюємо:

$$3 \cdot 2 = 6,$$

$$3 \cdot (-3) = -9.$$

Отже,

$$3\vec{a} = (6; -9).$$

Відповідь:

$$(6; -9).$$

Приклад 9

Задано вектор

$$\vec{b} = (4; -; 26).$$

Знайти

$$-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Розв'язання

Множимо кожну координату на число

$$-\frac{1}{2}.$$

Отримаємо:

$$-\frac{1}{2}\vec{b} = \left(-; \frac{1}{2}; 4 - \frac{1}{2} \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot 6\right).$$

Обчислюємо:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 4 &= -2, \\ -\frac{1}{2} \cdot (-2) &= 1, \\ -\frac{1}{2} \cdot 6 &= -3. \end{aligned}$$

Отже,

$$\boxed{-\frac{1}{2}\vec{b} = (-; 2; 1 - 3).}$$

Оскільки множник від'ємний, отриманий вектор має напрям, протилежний напрямку початкового вектора.

Відповідь:

$$\boxed{(-; 2; 1 - 3).}$$

14. Виконання декількох дій над векторами

У практичних завданнях часто необхідно виконати не одну, а декілька дій над векторами.

У такому випадку кожену координату результуючого вектора обчислюють окремо.

Приклад 10

Задано вектори

$$\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (-; 13).$$

Знайти вектор

$$2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо

$$2\vec{a}.$$

Маємо:

$$2\vec{a} = (2; 2 \cdot 2 \cdot 1) = (4; 2).$$

Тепер знайдемо

$$3\vec{b}.$$

$$3\vec{b} = (3; (-1) \cdot 3 \cdot 3) = (-; 39).$$

Виконуємо віднімання:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (4; 2) - (-; 39).$$

Отже,

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (4; -(-3) \cdot 2 - 9).$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (7; -7).$$

Відповідь:

$$\boxed{(7; -7)}.$$

15. Умова колінеарності векторів у координатній формі

Якщо один ненульовий вектор можна отримати множенням другого на деяке число, то такі вектори колінеарні.

Тобто

$$\boxed{\vec{b} = \lambda \vec{a}}.$$

Для векторів на площині

$$\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$$

колінеарність означає пропорційність відповідних координат.

У рекомендованій літературі критерії колінеарності векторів виділено як один з основних результатів теми векторної алгебри.

Приклад 11

Визначити, чи є колінеарними вектори

$$\vec{a} = (2; 3),$$

$$\vec{b} = (6; 9).$$

Розв'язання

Перевіримо, чи можна один вектор отримати множенням другого на деяке число.

Порівнюємо перші координати:

$$6 = 3 \cdot 2.$$

Порівнюємо другі координати:

$$9 = 3 \cdot 3.$$

Отже,

$$\vec{b} = 3\vec{a}.$$

Тому вектори колінеарні.

Оскільки множник

$$3 > 0,$$

вектори також співнаправлені.

Відповідь: вектори колінеарні та співнаправлені.

Приклад 12

Визначити, чи є колінеарними вектори

$$\vec{a} = (3; -2),$$

$$\vec{b} = (-; 64).$$

Розв'язання

Порівнюємо відповідні координати.

Для першої координати:

$$-6 = -2 \cdot 3.$$

Для другої координати:

$$4 = -2 \cdot (-2).$$

Отже,

$$\vec{b} = -2\vec{a}.$$

Тому вектори колінеарні.

Оскільки множник від'ємний, вектори мають протилежні напрями.

Відповідь: вектори колінеарні та протилежно напрямлені.

16. Основні властивості лінійних дій над векторами

Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та чисел λ , μ виконуються основні правила.

Переставна властивість додавання:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Сполучна властивість додавання:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Додавання нульового вектора:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Додавання протилежного вектора:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Розподільна властивість множення вектора на число відносно додавання векторів:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Розподільна властивість відносно додавання чисел:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

Сполучна властивість множення на число:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

Множення на одиницю:

$$1\vec{a} = \vec{a}.$$

17. Практичне значення векторів для автомобільного транспорту

Векторний апарат має безпосереднє значення під час математичного опису руху та взаємодії технічних об'єктів.

За допомогою векторів можна характеризувати:

- переміщення автомобіля;
- швидкість руху;
- прискорення;

- сили, що діють на транспортний засіб;
- напрям руху;
- складові фізичних величин уздовж вибраних координатних осей.

Робоча програма дисципліни орієнтує математичну підготовку на подальше використання математичних методів під час вивчення спеціальних технічних дисциплін та виконання інженерних розрахунків.

Приклад 13. Прикладна задача

Автомобіль спочатку перемістився на 6 умовних одиниць уздовж додатного напрямку осі Ox , а потім на 8 умовних одиниць уздовж додатного напрямку осі Oy .

Знайти координати результуючого вектора переміщення та його довжину.

Розв'язання

Перше переміщення задається вектором

$$\vec{a} = (6; 0).$$

Друге переміщення задається вектором

$$\vec{b} = (0; 8).$$

Результуюче переміщення:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Отже,

$$\vec{s} = (6; 0 + 8).$$

$$\boxed{\vec{s} = (6; 8).}$$

Знайдемо довжину результуючого вектора:

$$|\vec{s}| = \sqrt{6^2 + 8^2}.$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{36 + 64}.$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{100}.$$

$$|\vec{s}| = 10.$$

Перевірка

За теоремою Піфагора для прямокутного трикутника з катетами 6 і 8:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100,$$

тому

$$\sqrt{100} = 10.$$

Результат правильний.

Відповідь: координати результуючого вектора переміщення

$$\vec{s} = (6; 8),$$

його довжина

$$|\vec{s}| = 10.$$

Основні помилки під час виконання дій над векторами

Перша помилка — неправильне визначення координат вектора за двома точками.

Необхідно пам'ятати: від координат **кінця** вектора віднімають відповідні координати його **початку**.

Друга помилка — зміна порядку координат.

Першу координату необхідно виконувати з першими координатами, другу — з другими, третю — з третіми.

Третя помилка — неправильна робота з від'ємними числами.

Наприклад,

$$4 - (-3) = 7,$$

а не 1.

Четверта помилка — множення на число тільки однієї координати.

Якщо вектор множиться на число, на це число необхідно помножити **кожну** координату.

П'ята помилка — плутання довжини вектора та самого вектора.

Вектор

$$\vec{a} = (3; 4)$$

і його довжина

$$|\vec{a}| = 5$$

є різними математичними об'єктами.

6. Закріплення вивченого матеріалу

- Повторення поняття вектора.
- Повторення поняття довжини вектора.
- Повторення понять нульового та одиничного векторів.
- Повторення понять рівних і протилежних векторів.
- Повторення поняття колінеарних векторів.
- Повторення поняття компланарних векторів.
- Повторення способу знаходження координат вектора.
- Повторення формули довжини вектора.
- Повторення правил додавання та віднімання векторів.
- Повторення правила множення вектора на число.
- Повторення виконання лінійних дій над векторами у координатній формі.
- Повторення умови колінеарності векторів.

Питання для закріплення

1. Що називається вектором?
2. Що є початком вектора?
3. Що є кінцем вектора?
4. Як позначають вектор?
5. Що називається довжиною вектора?
6. Як позначають довжину вектора?
7. Який вектор називається нульовим?
8. Чому дорівнює довжина нульового вектора?
9. Який вектор називається одиничним?
10. Чому дорівнює довжина одиничного вектора?
11. Які вектори називаються колінеарними?
12. Які колінеарні вектори називаються співнапрямленими?
13. Які вектори називаються протилежно напрямленими?
14. Які вектори називаються рівними?

15. Які вектори називаються протилежними?
16. Які вектори називаються компланарними?
17. Як знайти координати вектора за координатами його початку та кінця?
18. У якому порядку віднімають координати під час знаходження координат вектора?
19. За якою формулою знаходять довжину вектора на площині?
20. За якою формулою знаходять довжину вектора у просторі?
21. Як геометрично виконується додавання векторів за правилом трикутника?
22. У чому полягає правило паралелограма?
23. Як додають вектори у координатній формі?
24. Як віднімають вектори у координатній формі?
25. Що називається різницею двох векторів?
26. Як виконується множення вектора на число?
27. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на додатне число?
28. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на від'ємне число?
29. Що отримуємо при множенні вектора на нуль?
30. Як визначити колінеарність двох векторів за їх координатами?
31. Які властивості має додавання векторів?
32. Які властивості має множення вектора на число?
33. Чим відрізняється вектор від його довжини?
34. Які фізичні величини можна подавати за допомогою векторів?
35. Як векторний апарат може застосовуватися під час розв'язування задач автомобільного транспорту?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Вектори та дії над ними».

Повторити:

- поняття вектора;
- початок і кінець вектора;
- довжину вектора;

- нульовий та одиничний вектори;
- рівні та протилежні вектори;
- колінеарні та компланарні вектори;
- координати вектора;
- знаходження координат вектора за координатами його початку та кінця;
- формулу довжини вектора;
- додавання векторів;
- віднімання векторів;
- множення вектора на число;
- правила виконання дій над векторами у координатній формі;
- умову колінеарності векторів.

Самостійно повторити розв'язання прикладів, наведених у лекції.

Скалярний та векторний добуток векторів наперед не опрацьовувати: вони належать до наступного матеріалу векторної алгебри і в цій лекції навмисно не розглядаються. У рекомендованій літературі лінійні дії, скалярний, векторний і мішаний добуток також виділено як окремі питання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахо І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клєсова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. У цьому виданні серед основних задач теми прямо передбачено знаходження координат вектора, геометричне та координатне додавання і віднімання векторів, множення вектора на число та знаходження довжини вектора.

4. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : збірник завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Лекція 6

ТЕМА: Скалярний та векторний добуток векторів

МЕТА: сформувані у здобувачів освіти поняття про скалярний і векторний добуток векторів; розкрити їх геометричний зміст та основні властивості; навчити обчислювати скалярний добуток векторів за означенням і за координатами; сформувані вміння визначати кут між векторами та встановлювати їх перпендикулярність; ознайомити з поняттям векторного добутку, його напрямом і геометричним змістом; навчити обчислювати векторний добуток векторів, заданих координатами, визначати його довжину та застосовувати для знаходження площі паралелограма і трикутника; показати практичне значення скалярного та векторного добутків під час розв'язування математичних, фізичних і технічних задач, пов'язаних з автомобільним транспортом; розвивати просторове, логічне та математичне мислення, уважність і послідовність виконання обчислень.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.

2. Перевірка домашнього завдання.

3. Повідомлення теми та мети заняття.

4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.

5. Вивчення нового матеріалу.

- Поняття скалярного добутку двох векторів.
- Геометричний зміст скалярного добутку.
- Основні властивості скалярного добутку.
- Скалярний добуток векторів, заданих координатами.
- Кут між двома векторами.
- Умова перпендикулярності двох векторів.
- Поняття векторного добутку двох векторів.
- Напрямок векторного добутку.
- Геометричний зміст векторного добутку.

- Основні властивості векторного добутку.
- Векторний добуток векторів, заданих координатами.
- Умова колінеарності двох векторів.
- Застосування векторного добутку для обчислення площі паралелограма і трикутника.
- Приклади застосування скалярного та векторного добутків.

Тема відповідає послідовності векторної алгебри, закладеній у навчальних джерелах: після лінійних дій над векторами розглядаються скалярний та векторний добутки. Серед основних задач окремо зазначено обчислення скалярного і векторного добутків, знаходження кута між векторами та дослідження взаємного розташування векторів.

Навчальні матеріали лекції

У попередній лекції було розглянуто поняття вектора, координати вектора, його довжину, додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, а також колінеарні та компланарні вектори.

Наступним етапом вивчення векторної алгебри є введення двох важливих операцій — **скалярного та векторного добутків векторів**.

Ці операції мають різні результати. Скалярний добуток двох векторів є **числом**, а векторний добуток двох векторів є **вектором**. Саме ця відмінність є принциповою і повинна враховуватися під час розв'язування задач.

Скалярний добуток дозволяє, зокрема, знаходити кут між векторами та перевіряти їх перпендикулярність. Векторний добуток дає можливість побудувати вектор, перпендикулярний до двох заданих векторів, а його довжина має важливий геометричний зміст.

У рекомендованому навчальному виданні визначено, що результатом скалярного добутку є число, тоді як векторний добуток двох неколінеарних векторів є вектором, перпендикулярним до обох заданих векторів.

1. Скалярний добуток векторів

Нехай задано два ненульові вектори

$\vec{a}$

$\vec{b}$

$\vec{b}$,

а кут між ними дорівнює

φ .

Означення 1. Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

де:

$|\vec{a}|$

— довжина першого вектора;

$|\vec{b}|$

— довжина другого вектора;

φ

— кут між векторами.

Якщо хоча б один із векторів є нульовим, його скалярний добуток з іншим вектором приймають рівним нулю. Це узгоджується з означенням, наведеним у рекомендованому навчальному посібнику.

2. Геометричний зміст скалярного добутку

Скалярний добуток пов'язує довжини двох векторів із кутом між ними.

Розглянемо можливі випадки.

Перший випадок

Якщо

$$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ,$$

то

$$\cos \varphi > 0.$$

Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0.$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, кут між якими гострий, є додатним.

Другий випадок

Якщо

$$\varphi = 90^\circ,$$

то

$$\cos 90^\circ = 0.$$

Тому

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.}$$

Третій випадок

Якщо

$$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ,$$

то

$$\cos \varphi < 0.$$

Отже,

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} < 0.}$$

Таким чином, знак скалярного добутку дозволяє отримати інформацію про характер кута між векторами.

Приклад 1

Знайти скалярний добуток векторів, якщо

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Розв'язання

Використовуємо означення скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Підставляємо задані значення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ.$$

Відомо, що

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}.$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10.$$

Перевірка

Кут між векторами дорівнює 60° , тобто є гострим. Тому скалярний добуток повинен бути додатним.

Отримане число

$$10 > 0,$$

що відповідає геометричному змісту.

Відповідь:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 10.}$$

3. Скалярний квадрат вектора

Якщо вектор скалярно помножити сам на себе, отримаємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ.$$

Оскільки

$$\cos 0^\circ = 1,$$

то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.}$$

Таким чином, скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

Звідси можна отримати формулу:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.}$$

4. Основні властивості скалярного добутку

Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та числа λ виконуються такі властивості.

Переставна властивість:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.}$$

Розподільна властивість:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Множення одного з векторів на число:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Скалярний квадрат вектора:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

5. Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Нехай у просторі задано два вектори:

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$$

і

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$$

Тоді їх скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Для векторів на площині

$$\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$$

маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Отже, щоб знайти скалярний добуток двох векторів, заданих координатами, необхідно **перемножити відповідні координати та отримані добутки додати.**

Приклад 2

Знайти скалярний добуток векторів

$$\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (4; -1).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Підставляємо координати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1).$$

Обчислюємо:

$$2 \cdot 4 = 8,$$

$$3 \cdot (-1) = -3.$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 3 = 5.$$

Відповідь:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.}$$

Приклад 3

Знайти скалярний добуток векторів

$$\vec{a} = (1; -2; 3),$$

$$\vec{b} = (4; 2; -1).$$

Розв'язання

Застосуємо формулу:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Підставляємо координати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-1).$$

Виконуємо множення:

$$1 \cdot 4 = 4,$$

$$(-2) \cdot 2 = -4,$$

$$3 \cdot (-1) = -3.$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 - 4 - 3 = -3.$$

Відповідь:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = -3.}$$

6. Кут між двома векторами

З означення скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Звідси:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Якщо вектори задані координатами у просторі, отримуємо:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Приклад 4

Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1; 0), \vec{b} = (1; 1).$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$

Знайдемо довжину першого вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$$

Знайдемо довжину другого вектора:

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Використовуємо формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Отже,

$$\cos \varphi = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідси

$$\varphi = 45^\circ.$$

Перевірка

Оскільки скалярний добуток додатний, кут між векторами повинен бути гострим.

Отримали

$$45^\circ < 90^\circ.$$

Отже, результат відповідає геометричному змісту скалярного добутку.

Відповідь:

$$\varphi = 45^\circ.$$

7. Умова перпендикулярності векторів

Два ненульові вектори перпендикулярні, якщо кут між ними дорівнює 90° .

Оскільки

$$\cos 90^\circ = 0,$$

то з означення скалярного добутку отримуємо важливу умову.

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

У рекомендованому виданні критерій ортогональності векторів віднесено до основних теоретичних результатів векторної алгебри.

Приклад 5

Перевірити, чи є перпендикулярними вектори

$$\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (3; -2).$$

Розв'язання

Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 = 0.$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Тому вектори перпендикулярні.

Відповідь:

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

8. Векторний добуток двох векторів

Переходимо до другої основної операції цієї лекції.

На відміну від скалярного добутку, результатом векторного добутку є не число, а **вектор**.

Розглянемо два неколінеарні вектори

$$\vec{a}$$
$$\vec{b}.$$

Означення 2. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який:

1. перпендикулярний до вектора $\vec{a}$;
2. перпендикулярний до вектора $\vec{b}$;
3. має довжину, що дорівнює добутку довжин заданих векторів на синус кута між ними;
4. напрямлений так, щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і їх векторний добуток утворювали праву трійку.

Таке означення векторного добутку безпосередньо наведене у рекомендованому навчальному виданні.

Векторний добуток позначають:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

або в окремій навчальній літературі

$$[\vec{a}, \vec{b}].$$

9. Довжина векторного добутку

Якщо кут між векторами дорівнює φ , то

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Ця формула має важливий геометричний зміст.

10. Напрямок векторного добутку

Вектор

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

перпендикулярний одночасно до вектора $\vec{a}$ і до вектора $\vec{b}$.

Отже, він перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Для визначення його напрямку використовують **правило правої руки**.

Якщо пальці правої руки спрямувати від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ через менший кут, то напрям великого пальця визначає напрям вектора

$$\vec{a} \times \vec{b}.$$

Порядок множників має принципове значення.

Якщо поміняти вектори місцями, напрям результату зміниться на протилежний.

11. Геометричний зміст векторного добутку

Побудуємо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралелограм.

Площа цього паралелограма дорівнює:

$$S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Але

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Тому:

$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Отже, довжина векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Оскільки діагональ паралелограма ділить його на два рівновеликі трикутники, площа трикутника дорівнює:

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Приклад 6

Довжини векторів дорівнюють

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 6,$$

а кут між ними

$$30^\circ.$$

Знайти довжину їх векторного добутку.

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Підставляємо значення:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 4 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ.$$

Відомо:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 12.$$

Відповідь:

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = 12.}$$

12. Основні властивості векторного добутку

Перша властивість

При перестановці множників векторний добуток змінює знак:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).}$$

Отже, векторний добуток **не має переставної властивості**.

Друга властивість

Векторний добуток вектора на самого себе дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$$

Це пояснюється тим, що кут між однаково напрямленими векторами дорівнює нулю, а

$$\sin 0^\circ = 0.$$

Третя властивість

Для числа λ :

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Четверта властивість

Виконується розподільна властивість:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

13. Умова колінеарності двох векторів

Якщо ненульові вектори колінеарні, то кут між ними дорівнює

$$0^\circ$$

або

$$180^\circ.$$

При цьому

$$\sin 0^\circ = 0$$

і

$$\sin 180^\circ = 0.$$

Тому довжина їх векторного добутку дорівнює нулю.

Отже,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

У рекомендованому джерелі також зазначено, що векторний добуток колінеарних векторів вважають рівним нульовому вектору.

14. Векторний добуток векторів, заданих координатами

Нехай

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$$

Тоді векторний добуток можна записати за допомогою визначника:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка, отримуємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}.$$

У координатній формі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Приклад 7

Знайти векторний добуток векторів

$$\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (2; -1; 11).$$

Розв'язання

Запишемо векторний добуток у вигляді визначника:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо визначник за елементами першого рядка:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо перший визначник:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5.$$

Другий визначник:

$$1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1 - 6 = -5.$$

Третій визначник:

$$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -1 - 4 = -5.$$

Враховуємо знак перед другим доданком:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (5; 5; -5).$$

Перевірка

Векторний добуток повинен бути перпендикулярним до обох початкових векторів.

Перевіримо перпендикулярність до $\vec{a}$:

$$(5; 5; -5) \cdot (1; 2; 3) = 5 + 10 - 15 = 0.$$

Перевіримо перпендикулярність до $\vec{b}$:

$$(5; 5; -5) \cdot (2; -; 11) = 10 - 5 - 5 = 0.$$

Обидва скалярні добутки дорівнюють нулю. Отже, знайдений вектор дійсно перпендикулярний до обох заданих векторів.

Відповідь:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (5; 5; -5).$$

Приклад 8

Знайти векторний добуток векторів

$$\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (1; 3; 0).$$

Розв'язання

Використовуємо координатну формулу:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Підставляємо координати:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1 \cdot 0 - 0 \cdot 3; 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0; 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1).$$

Обчислюємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 6 - 1).$$

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 5).$$

Перевірка

Перевіримо перпендикулярність до першого вектора:

$$(0; 0; 5) \cdot (2; 1; 0) = 0.$$

До другого:

$$(0; 0; 5) \cdot (1; 3; 0) = 0.$$

Отже, результат правильний.

Відповідь:

$$(0; 0; 5).$$

15. Знаходження площі паралелограма

Якщо паралелограм побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то його площа дорівнює довжині їх векторного добутку:

$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Приклад 9

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (1; 2; 0), \vec{b} = (3; 1; 0).$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 1 - 0 \cdot 3; 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3; 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3).$$

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 1 - 6).$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; -5).$$

Знайдемо довжину отриманого вектора:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5)^2}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25} = 5.$$

Тому площа паралелограма:

$$S_{\text{паралелограма}} = 5.$$

Відповідь: площа паралелограма дорівнює 5 квадратних одиниць.

16. Знаходження площі трикутника

Якщо два вектори виходять з однієї вершини трикутника, його площа дорівнює половині довжини їх векторного добутку:

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Приклад 10

Знайти площу трикутника, побудованого на векторах

$$\vec{a} = (2; 0; 0), \vec{b} = (0; 4; 0).$$

Розв'язання

Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 0 - 0 \cdot 4 - 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 4 - 0 \cdot 0).$$

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 8).$$

Його довжина:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 8^2} = 8.$$

Площа трикутника:

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2} \cdot 8.$$

$$S_{\text{трикутника}} = 4.$$

Перевірка

Задані вектори перпендикулярні, тому трикутник прямокутний із катетами довжиною 2 та 4.

За звичайною формулою площі прямокутного трикутника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

Результати збігаються.

Відповідь: площа трикутника дорівнює 4 квадратним одиницям.

17. Визначення колінеарності за допомогою векторного добутку

Приклад 11

Перевірити, чи є колінеарними вектори

$$\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (2; 4; 6).$$

Розв'язання

Обчислюємо векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4; 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6; 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2).$$

Перша координата:

$$12 - 12 = 0.$$

Друга координата:

$$6 - 6 = 0.$$

Третя координата:

$$4 - 4 = 0.$$

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 0) = \vec{0}.$$

Тому задані вектори колінеарні.

Додатково бачимо, що

$$\vec{b} = 2\vec{a}.$$

Це також підтверджує колінеарність.

Відповідь: вектори колінеарні.

18. Порівняння скалярного і векторного добутків

Необхідно чітко розрізняти ці дві операції.

Скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

дає в результаті **число**.

Він використовується для:

- знаходження кута між векторами;

- перевірки перпендикулярності векторів;
- встановлення характеру кута між векторами;
- розв’язування фізичних і технічних задач.

Векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

дає в результаті **вектор**.

Він використовується для:

- знаходження вектора, перпендикулярного до двох заданих векторів;
- перевірки колінеарності;
- знаходження площі паралелограма;
- знаходження площі трикутника;
- розв’язування просторових геометричних і технічних задач.

19. Практичне значення для автомобільного транспорту

Скалярний та векторний добуток є складовими математичного апарату, який використовується у механіці та технічних розрахунках.

Скалярний добуток дозволяє математично враховувати взаємний напрям двох векторних величин. Наприклад, під час розгляду сили та переміщення суттєве значення має кут між їх напрямками.

Векторний добуток використовується у просторових задачах, де необхідно визначити напрям, перпендикулярний до двох заданих напрямів. Він також пов’язаний із моментом сили.

Робоча програма дисципліни передбачає математичну підготовку, необхідну для подальшого виконання інженерних розрахунків та опрацювання професійно орієнтованих задач автомобільного транспорту.

Приклад 12. Прикладна задача

На елемент механізму діє сила величиною

$$F = 500 \text{ Н},$$

а переміщення точки прикладання сили становить

$$s = 4 \text{ м}.$$

Кут між напрямом сили та напрямом переміщення дорівнює

60°.

Знайти скалярний добуток векторів сили та переміщення.

Розв'язання

Використовуємо формулу скалярного добутку:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \varphi.$$

Підставляємо задані значення:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = 500 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ.$$

Оскільки

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

отримаємо:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = 500 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = 1000.$$

Відповідь:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \vec{s} = 1000 \text{ Дж.}}$$

У фізичному змісті отримане число відповідає роботі сталої сили на заданому переміщенні.

20. Основні помилки під час виконання завдань

Перша помилка — плутання результатів скалярного і векторного добутків.

Необхідно пам'ятати:

скалярний добуток → число,

векторний добуток → вектор.

Друга помилка — неправильне обчислення скалярного добутку за координатами.

Необхідно перемножити відповідні координати і результати додати.

Третя помилка — неправильне визначення умови перпендикулярності.

Для ненульових векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Четверта помилка — пропуск знака «мінус» під час розкладання визначника для векторного добутку.

Знаки при розкладанні за першим рядком мають порядок:

$$+, -, +.$$

П'ята помилка — неправильна перестановка множників у векторному добутку.

Необхідно пам'ятати:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Шоста помилка — плутання площі паралелограма і площі трикутника.

Для паралелограма:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Для трикутника:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

6. Закріплення вивченого матеріалу

Необхідно повторити поняття скалярного добутку; геометричний зміст скалярного добутку; обчислення скалярного добутку за координатами; формулу знаходження кута між векторами; умову перпендикулярності; поняття векторного добутку; напрям і довжину векторного добутку; основні властивості векторного добутку; його обчислення за координатами; умову колінеарності; знаходження площі паралелограма та трикутника за допомогою векторного добутку.

Питання для закріплення

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?
2. Чим є результат скалярного добутку — числом чи вектором?
3. За якою формулою обчислюють скалярний добуток через довжини векторів і кут між ними?

4. Чому дорівнює скалярний добуток, якщо один із векторів нульовий?
5. Який знак має скалярний добуток, якщо кут між векторами гострий?
6. Який знак має скалярний добуток, якщо кут між векторами тупий?
7. Чому дорівнює скалярний добуток перпендикулярних ненульових векторів?
8. Що називається скалярним квадратом вектора?
9. Як обчислити скалярний добуток двох векторів, заданих координатами?
10. Які властивості має скалярний добуток?
11. За якою формулою знаходять косинус кута між векторами?
12. Як за допомогою скалярного добутку перевірити перпендикулярність двох векторів?
13. Що називається векторним добутком двох векторів?
14. Чим є результат векторного добутку?
15. До яких векторів перпендикулярний векторний добуток?
16. За якою формулою визначається довжина векторного добутку?
17. Як визначається напрям векторного добутку?
18. Що відбувається з векторним добутком при перестановці множників?
19. Чому дорівнює векторний добуток вектора на самого себе?
20. Чому дорівнює векторний добуток двох колінеарних векторів?
21. Як обчислити векторний добуток векторів, заданих координатами?
22. Який геометричний зміст має довжина векторного добутку?
23. Як знайти площу паралелограма за допомогою векторного добутку?
24. Як знайти площу трикутника за допомогою векторного добутку?
25. Як перевірити колінеарність векторів за допомогою векторного добутку?
26. У чому полягає головна відмінність між скалярним та векторним добутками?
27. Яке практичне значення має скалярний добуток?
28. Яке практичне значення має векторний добуток?
29. Як перевірити правильність знайденого векторного добутку за допомогою скалярного добутку?

30. Де скалярний та векторний добутки можуть застосовуватися під час розв'язування технічних задач автомобільного транспорту?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Скалярний та векторний добутки векторів».

Повторити означення скалярного добутку двох векторів; геометричний зміст скалярного добутку; основні властивості скалярного добутку; формулу скалярного добутку в координатній формі; знаходження кута між векторами; умову перпендикулярності векторів; означення векторного добутку; напрям і довжину векторного добутку; основні властивості векторного добутку; обчислення векторного добутку за координатами; умову колінеарності; знаходження площі паралелограма та трикутника.

Самостійно повторити розв'язання прикладів, наведених у лекції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У змісті посібника окремо виділено скалярний добуток та його властивості, а також векторний добуток і його основні властивості.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. Видання містить означення скалярного і векторного добутків та передбачає серед основних задач обчислення цих добутків, знаходження кута між векторами і дослідження їх взаємного розташування.
4. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : збірник завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Лекція 7

ТЕМА: Метод координат. Пряма лінія на площині

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти системне уявлення про метод координат як один з основних методів аналітичної геометрії; закріпити поняття прямокутної декартової системи координат на площині та координат точки; навчити визначати відстань між двома точками, координати середини відрізка та координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; сформувати поняття про рівняння лінії на площині та пряму лінію як геометричне місце точок, координати яких задовольняють лінійне рівняння; ознайомити із загальним рівнянням прямої, нормальним і напрямним векторами прямої, рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, рівнянням прямої, що проходить через задану точку, та рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки; сформувати вміння складати рівняння прямої за заданими геометричними умовами та перевіряти отримані результати; показати практичне значення координатного методу для геометричного опису положення технічних об'єктів, напрямів переміщення та елементів розрахункових схем у галузі автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

Матеріал цієї лекції сформовано за наданими Вами джерелами та відповідно до Вашої робочої програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності **І8 «Автомобільний транспорт»**. У робочій програмі тема 2.1 починається саме з декартової системи координат, координат точки, відстані між двома точками, середини відрізка та поділу відрізка у заданому відношенні, після чого передбачено вивчення рівнянь прямої на площині.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

- 1. Організаційний момент.*
 - 2. Перевірка домашнього завдання.*
 - 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
 - 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
 - 5. Вивчення нового матеріалу.*
1. Метод координат та прямокутна декартова система координат на площині.
 2. Координати точки на площині.

3. Відстань між двома точками.
4. Координати середини відрізка.
5. Поділ відрізка у заданому відношенні.
6. Поняття рівняння лінії на площині.
7. Пряма лінія на площині.
8. Загальне рівняння прямої.
9. Нормальний вектор прямої.
10. Рівняння прямої, що проходить через задану точку.
11. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
12. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
13. Практичне застосування методу координат.

У наданому Вами курсі лекцій Кушлик-Дивульської та Авдєєвої матеріал про пряму на площині містить загальне рівняння прямої та різні форми її рівнянь, зокрема рівняння прямої через точку, через дві точки та рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Навчальні матеріали лекції

1. Метод координат

Аналітична геометрія вивчає геометричні об'єкти за допомогою алгебраїчних методів.

Основою такого підходу є **метод координат**.

Метод координат дозволяє кожній точці площини поставити у відповідність певну пару чисел, а геометричні властивості точок, прямих та інших ліній описувати за допомогою рівнянь.

Таким чином, геометрична задача переводиться на мову алгебри.

Наприклад, замість безпосереднього вимірювання відстані між двома точками можна використати їх координати та відповідну формулу.

Для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт» координатний метод має прикладне значення. Робочою програмою прямо передбачено його застосування для **геометричного опису положення технічних об'єктів, напрямів переміщення та елементів розрахункових схем.**

2. Прямокутна декартова система координат на площині

Для визначення положення точки на площині використовують прямокутну декартову систему координат.

Вона утворюється двома взаємно перпендикулярними координатними осями:

- горизонтальною віссю Ox ;
- вертикальною віссю Oy .

Точка перетину координатних осей називається **початком координат** і позначається буквою O .

Її координати:

$$O(0; 0).$$

Вісь Ox називають **віссю абсцис**.

Вісь Oy називають **віссю ординат**.

Координатні осі поділяють площину на чотири частини — координатні чверті.

3. Координати точки на площині

Положення кожної точки M на координатній площині визначається двома числами:

$$M(x; y).$$

Число x називається **абсцисою точки**.

Число y називається **ординатою точки**.

Наприклад,

$$A(3; 2)$$

означає, що абсциса точки A дорівнює 3, а ордината дорівнює 2.

Для точки

$$B(-; 45)$$

маємо:

$$x_B = -4, y_B = 5.$$

4. Відстань між двома точками

Нехай на координатній площині задано дві точки:

$$A(x_1; y_1)$$

та

$$B(x_2; y_2).$$

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, відповідно до матеріалу попередніх лекцій, дорівнюють:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

Довжина цього вектора одночасно є відстанню між точками A і B .

Тому:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Приклад 1

Знайти відстань між точками

$$A(2; 1)$$

і

$$B(5; 5).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу відстані між двома точками:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Підставляємо координати:

$$AB = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 1)^2}.$$

Виконуємо віднімання:

$$5 - 2 = 3,$$

$$5 - 1 = 4.$$

Отже,

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

Підносимо числа до квадрата:

$$AB = \sqrt{9 + 16}.$$

$$AB = \sqrt{25}.$$

$$\boxed{AB = 5.}$$

Перевірка

Різниця абсцис дорівнює 3, різниця ординат дорівнює 4. Отримуємо прямокутний трикутник з катетами 3 і 4.

За теоремою Піфагора:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

тому гіпотенуза дорівнює 5.

Відповідь:

$$\boxed{AB = 5.}$$

Приклад 2

Знайти відстань між точками

$$M(-; 23)$$

і

$$N(4; -5).$$

Розв'язання

Записуємо формулу:

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

Підставляємо координати:

$$MN = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-5 - 23)^2}.$$

Виконуємо дії у дужках:

$$4 - (-2) = 6,$$

$$-5 - 23 = -28.$$

Отже,

$$MN = \sqrt{6^2 + (-28)^2}.$$

$$MN = \sqrt{36 + 784}.$$

$$MN = \sqrt{820}.$$

$$\boxed{MN = 28.57.}$$

Відповідь:

$$\boxed{MN = 10.}$$

5. Координати середини відрізка

Нехай задано відрізок AB , кінці якого мають координати:

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2).$$

Нехай точка M є серединою відрізка AB .

Тоді її координати дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат кінців відрізка:

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

Отже,

$$\boxed{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).}$$

Приклад 3

Знайти координати середини відрізка AB , якщо

$$A(2; 4), B(8; 10).$$

Розв'язання

Використовуємо формули:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2},$$
$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Знаходимо абсцису середини:

$$x_M = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Знаходимо ординату середини:

$$y_M = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Отже,

$$\boxed{M(5; 7).}$$

Перевірка

Знайдемо відстані AM та MB .

$$AM = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}.$$

$$MB = \sqrt{(8 - 5)^2 + (10 - 7)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}.$$

Отже,

$$AM = MB,$$

тому точка M дійсно є серединою відрізка.

Відповідь:

$$\boxed{M(5; 7)}.$$

6. Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай точка $M(x; y)$ ділить відрізок A_1A_2 , де

$$A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2),$$

у відношенні

$$\lambda.$$

У наданому Вами підручнику «Математика в технічному університеті» поділ відрізка у заданому відношенні розглянуто через співвідношення відповідних векторів та отримано координатні формули точки поділу.

Якщо

$$\frac{A_1M}{MA_2} = \lambda,$$

то координати точки M визначаються за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}.$$

Якщо

$$\lambda = 1,$$

отримуємо середину відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Приклад 4

Точка M ділить відрізок AB у відношенні

$$AM:MB = 2:1.$$

Знайти координати точки M , якщо

$$A(1; 2), B(7; 8).$$

Розв'язання

Із умови:

$$\lambda = \frac{AM}{MB} = 2.$$

Використовуємо формули поділу відрізка:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda},$$
$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

Знаходимо абсцису:

$$x_M = \frac{1 + 2 \cdot 7}{1 + 2}.$$
$$x_M = \frac{1 + 14}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Знаходимо ординату:

$$y_M = \frac{2 + 2 \cdot 8}{1 + 2}.$$
$$y_M = \frac{2 + 16}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Отже,

$$\boxed{M(5; 6)}.$$

Перевірка

Знайдемо довжину AM :

$$AM = \sqrt{(5 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

Знайдемо довжину MB :

$$MB = \sqrt{(7 - 5)^2 + (8 - 6)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Тому:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2.$$

Отримане відношення відповідає умові задачі.

Відповідь:

$$\boxed{M(5; 6).}$$

7. Поняття рівняння лінії на площині

Метод координат дозволяє описувати геометричні лінії за допомогою рівнянь.

Нехай задано рівняння:

$$F(x; y) = 0.$$

Якщо координати всіх точок певної лінії задовольняють це рівняння, а координати точок, які не належать цій лінії, його не задовольняють, то це рівняння називають **рівнянням даної лінії**.

Отже, рівняння встановлює зв'язок між координатами x і y точок, що належать геометричній лінії.

8. Пряма лінія на площині

Одним із найважливіших об'єктів аналітичної геометрії є пряма.

У наданому Вами курсі лекцій сформульовано теорему: **кожну пряму на площині можна визначити лінійним рівнянням відносно декартової системи координат і, навпаки, кожне лінійне рівняння визначає пряму в цій координатній системі**.

Це положення є основою аналітичного опису прямої.

9. Загальне рівняння прямої

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд:

$$\boxed{Ax + By + C = 0,}$$

де A , B , C — сталі числа, причому коефіцієнти A і B не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Саме такий вигляд загального рівняння прямої наведено у Вашому курсі лекцій.

10. Нормальний вектор прямої

Для прямої

$$Ax + By + C = 0$$

вектор

$$\vec{N} = (A; B)$$

є нормальним вектором прямої.

Нормальний вектор прямої — це ненульовий вектор, перпендикулярний до даної прямої.

У наданому Вами курсі лекцій загальне рівняння прямої отримується саме через нормальний вектор

$$\vec{N} = (A; B),$$

перпендикулярний до прямої.

Приклад 5

Для прямої

$$3x - 4y + 7 = 0$$

визначити коефіцієнти загального рівняння та записати нормальний вектор.

Розв'язання

Порівнюємо задане рівняння із загальним рівнянням:

$$Ax + By + C = 0.$$

Отримуємо:

$$A = 3,$$

$$B = -4,$$

$$C = 7.$$

Нормальний вектор має координати:

$$\vec{N} = (A; B).$$

Тому:

$$\vec{N} = (3; -4).$$

Відповідь:

$$A = 3, B = -4, C = 7, \vec{N} = (3; -4).$$

11. Рівняння прямої, що проходить через задану точку

Нехай пряма проходить через точку

$$M_0(x_0; y_0)$$

і має нормальний вектор

$$\vec{N} = (A; B).$$

Тоді рівняння прямої можна записати у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Саме таке рівняння отримано у Вашому курсі лекцій при виведенні загального рівняння прямої.

Приклад 6

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку

$$M_0(2; -1)$$

і має нормальний вектор

$$\vec{N} = (3; 4).$$

Розв'язання

Використовуємо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} A &= 3, B = 4, \\ x_0 &= 2, y_0 = -1. \end{aligned}$$

Підставляємо:

$$3(x - 2) + 4(y - (-1)) = 0.$$

Отже,

$$3(x - 2) + 4(y + 1) = 0.$$

Розкриваємо дужки:

$$3x - 6 + 4y + 4 = 0.$$

Зводимо подібні доданки:

$$3x + 4y - 2 = 0.$$

Отже, рівняння прямої:

$$3x + 4y - 2 = 0.$$

Перевірка

Підставимо координати точки

$$M_0(2; -1)$$

в отримане рівняння:

$$3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 2 = 0.$$

$$6 - 4 - 2 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Отже, точка належить прямій.

Відповідь:

$$3x + 4y - 2 = 0.$$

12. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Однією з важливих форм рівняння прямої є рівняння:

$$y = kx + b.$$

У наданому Вами курсі лекцій ця форма безпосередньо визначена як **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**.

У цьому рівнянні:

k — кутовий коефіцієнт прямої;

b — ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Кутовий коефіцієнт характеризує нахил прямої відносно додатного напрямку осі Ox .

Якщо α — кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox , то:

$$k = \tan \alpha.$$

Приклад 7

Для прямої

$$y = 2x - 3$$

визначити кутовий коефіцієнт та точку перетину з віссю Oy .

Розв'язання

Порівнюємо рівняння

$$y = 2x - 3$$

із загальним виглядом рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

Отже,

$$\begin{aligned} k &= 2, \\ b &= -3. \end{aligned}$$

Для знаходження точки перетину з віссю Ox укладаємо:

$$x = 0.$$

Тоді:

$$y = 2 \cdot 0 - 3 = -3.$$

Отже, точка перетину прямої з віссю Oy :

$$(0; -3).$$

Відповідь:

$$k = 2, (0; -3).$$

13. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, з кутовим коефіцієнтом

Якщо відомо, що пряма проходить через точку

$$M_0(x_0; y_0)$$

і має кутовий коефіцієнт k , то її рівняння записується у вигляді:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Ця форма рівняння прямої також наведена у Вашому курсі лекцій.

Приклад 8

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку

$$M_0(2; 3)$$

і має кутовий коефіцієнт

$$k = 4.$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Підставляємо:

$$x_0 = 2, y_0 = 3, k = 4.$$

Отримуємо:

$$y - 3 = 4(x - 2).$$

Розкриваємо дужки:

$$y - 3 = 4x - 8.$$

Переносимо число -3 у праву частину:

$$y = 4x - 5.$$

Отже,

$$\boxed{y = 4x - 5.}$$

Перевірка

Підставимо координати точки $M_0(2; 3)$:

$$3 = 4 \cdot 2 - 5.$$

$$3 = 8 - 5.$$

$$3 = 3.$$

Рівність правильна.

Відповідь:

$$\boxed{y = 4x - 5.}$$

14. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві різні точки:

$$M_1(x_1; y_1)$$

та

$$M_2(x_2; y_2).$$

Рівняння прямої, яка проходить через ці точки, можна записати у вигляді:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Відповідна форма рівняння прямої через дві задані точки наведена в наданому Вами курсі лекцій.

Приклад 9

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки

$$A(1; 2)$$

і

$$B(3; 6).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Підставляємо координати:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{6 - 2}.$$

Обчислюємо знаменники:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4}.$$

Виконуємо перехресне множення:

$$4(x - 1) = 2(y - 2).$$

Розкриваємо дужки:

$$4x - 4 = 2y - 4.$$

Додаємо 4 до обох частин:

$$4x = 2y.$$

Ділимо на 2:

$$2x = y.$$

Отже,

$$\boxed{y = 2x.}$$

Перевірка

Перевіримо точку $A(1; 2)$:

$$2 = 2 \cdot 1.$$

Рівність правильна.

Перевіримо точку $B(3; 6)$:

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Рівність правильна.

Отже, обидві задані точки належать знайденій прямій.

Відповідь:

$$\boxed{y = 2x.}$$

Приклад 10

Скласти загальне рівняння прямої, яка проходить через точки

$$A(-; 21)$$

і

$$B(4; 4).$$

Розв'язання

Використовуємо рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Підставляємо координати:

$$\frac{x - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{y - 1}{4 - 1}.$$

Отже,

$$\frac{x + 2}{6} = \frac{y - 1}{3}.$$

Виконуємо перехресне множення:

$$3(x + 2) = 6(y - 1).$$

Розкриваємо дужки:

$$3x + 6 = 6y - 6.$$

Переносимо всі члени в ліву частину:

$$3x - 6y + 12 = 0.$$

Ділимо рівняння на 3:

$$x - 2y + 4 = 0.$$

Отже, загальне рівняння прямої:

$$\boxed{x - 2y + 4 = 0.}$$

Перевірка

Для точки $A(-2; 1)$:

$$-2 - 2 \cdot 1 + 4 = 0.$$

$$-2 - 2 + 4 = 0.$$

Для точки $B(4; 4)$:

$$4 - 2 \cdot 4 + 4 = 0.$$

$$4 - 8 + 4 = 0.$$

Обидві точки задовольняють отримане рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{x - 2y + 4 = 0.}$$

15. Перехід від загального рівняння до рівняння з кутовим коефіцієнтом

Нехай задано загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0.$$

Якщо

$$B \neq 0,$$

виразимо y :

$$By = -Ax - C.$$

Ділимо обидві частини на B :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Порівнюємо з рівнянням:

$$y = kx + b.$$

Отже,

$$k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}.$$

Приклад 11

Подати рівняння

$$2x - y + 5 = 0$$

у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання

Маємо:

$$2x - y + 5 = 0.$$

Виразимо y :

$$-y = -2x - 5.$$

Помножимо обидві частини рівняння на -1 :

$$y = 2x + 5.$$

Отже,

$$k = 2, b = 5.$$

Відповідь:

$$y = 2x + 5, k = 2.$$

16. Побудова прямої за її рівнянням

Для побудови прямої достатньо знайти дві різні точки, що належать цій прямій.

Розглянемо рівняння:

$$2x + y - 4 = 0.$$

Знайдемо точку перетину з віссю Oy .

Покладемо:

$$x = 0.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} y - 4 &= 0, \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Отримуємо точку:

$$A(0; 4).$$

Тепер знайдемо точку перетину з віссю Ox .

Покладемо:

$$y = 0.$$

Тоді:

$$2x - 4 = 0,$$

$$2x = 4,$$

$$x = 2.$$

Отримуємо точку:

$$B(2; 0).$$

Отже, для побудови прямої необхідно позначити точки

$$A(0; 4)$$

і

$$B(2; 0)$$

та провести через них пряму.

17. Перевірка належності точки прямій

Щоб визначити, чи належить точка заданій прямій, необхідно підставити координати точки в рівняння прямої.

Якщо отримуємо правильну числову рівність, точка належить прямій.

Якщо рівність неправильна — точка прямій не належить.

Приклад 12

Визначити, чи належить точка

$$M(2; 3)$$

прямій

$$2x - y - 1 = 0.$$

Розв'язання

Підставляємо:

$$x = 2, y = 3.$$

Отримаємо:

$$2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0.$$

$$4 - 3 - 1 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Отримали правильну рівність.

Отже, точка $M(2; 3)$ належить заданій прямій.

Відповідь: точка

$$M(2; 3)$$

належить прямій

$$2x - y - 1 = 0.$$

18. Практичне застосування методу координат

Метод координат дає можливість замінити геометричний опис положення об'єктів точними числовими характеристиками.

У професійній підготовці за спеціальністю J8 «Автомобільний транспорт» координатний метод може використовуватися для опису положення характерних точок технічного об'єкта, напрямів переміщення, геометричних елементів розрахункової схеми та взаємного положення елементів конструкції.

Саме такий практичний акцент закладений у Вашій робочій програмі: застосування координатного методу для геометричного опису положення технічних об'єктів, напрямів переміщення та елементів розрахункових схем.

Приклад 13. Прикладна задача

У прямокутній системі координат положення двох контрольних точок елемента розрахункової схеми задано координатами:

$$A(1; 2), B(7; 10).$$

Необхідно визначити відстань між контрольними точками та координати середини відрізка AB .

Розв'язання

1. Знайдемо відстань між точками

Використовуємо формулу:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Підставляємо координати:

$$AB = \sqrt{(7 - 1)^2 + (10 - 2)^2}.$$

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2}.$$

$$AB = \sqrt{36 + 64}.$$

$$AB = \sqrt{100}.$$

$$\boxed{AB = 10.}$$

2. Знайдемо координати середини відрізка

Використовуємо формули:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Отже,

$$x_M = \frac{1 + 7}{2} = 4,$$

$$y_M = \frac{2 + 10}{2} = 6.$$

Тому:

$$\boxed{M(4; 6).}$$

Перевірка

Відстань від точки A до точки M :

$$AM = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Відстань від точки M до точки B :

$$MB = \sqrt{(7 - 4)^2 + (10 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Отже,

$$AM = MB = 5,$$

а

$$AB = AM + MB = 10.$$

Результати правильні.

Відповідь: відстань між контрольними точками дорівнює

$$\boxed{AB = 10,}$$

координати середини відрізка:

$$M(4; 6).$$

19. Основні помилки під час розв'язування задач

Перша помилка — неправильний порядок координат.

Для точки

$$M(x; y)$$

перша координата завжди є абсцисою, а друга — ординатою.

Друга помилка — неправильне використання формули відстані.

Необхідно підносити до квадрата **різниці відповідних координат**:

$$(x_2 - x_1)^2$$

та

$$(y_2 - y_1)^2.$$

Третя помилка — неправильне знаходження середини відрізка.

Необхідно окремо знаходити середнє арифметичне абсцис і середнє арифметичне ординат.

Четверта помилка — неправильне використання формули поділу відрізка у заданому відношенні.

Необхідно правильно встановити, яке саме відношення задано:

$$\lambda = \frac{A_1 M}{M A_2}.$$

П'ята помилка — плутання коефіцієнтів загального рівняння прямої.

У рівнянні

$$Ax + By + C = 0$$

нормальний вектор має координати:

$$\vec{N} = (A; B).$$

Шоста помилка — неправильна перевірка точки.

Для перевірки належності точки прямій необхідно підставити **обидві координати точки** у рівняння.

Сьома помилка — відсутність перевірки отриманого рівняння прямої.

Якщо рівняння складено за заданою точкою або двома точками, доцільно підставити їх координати в отримане рівняння.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Під час закріплення матеріалу необхідно повторити поняття методу координат; прямокутну декартову систему координат; координати точки; формулу відстані між двома точками; координати середини відрізка; поділ відрізка у заданому відношенні; поняття рівняння лінії; загальне рівняння прямої; нормальний вектор прямої; рівняння прямої через задану точку; рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої через дві точки; способи перевірки отриманого рівняння.

Питання для закріплення

1. Що називається методом координат?
2. У чому полягає основна ідея методу координат?
3. Що являє собою прямокутна декартова система координат на площині?
4. Як називається горизонтальна координатна вісь?
5. Як називається вертикальна координатна вісь?
6. Що називається початком координат?
7. Які координати має початок координат?
8. Що називається абсцисою точки?
9. Що називається ординатою точки?
10. Як записують координати точки на площині?
11. За якою формулою визначають відстань між двома точками?
12. Як знайти координати середини відрізка?
13. Що означає поділити відрізок у заданому відношенні?
14. За якими формулами знаходять координати точки поділу відрізка?
15. Який окремий випадок поділу відрізка отримуємо при відношенні 1:1?
16. Що називається рівнянням лінії на площині?
17. Яке рівняння визначає пряму на площині?
18. Який вигляд має загальне рівняння прямої?

19. Які коефіцієнти загального рівняння прямої не можуть одночасно дорівнювати нулю?
20. Який вектор називається нормальним вектором прямої?
21. Як знайти координати нормального вектора за загальним рівнянням прямої?
22. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор?
23. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
24. Що характеризує кутовий коефіцієнт прямої?
25. Як кутовий коефіцієнт пов'язаний із кутом нахилу прямої?
26. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт?
27. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
28. Як перейти від загального рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом?
29. Як перевірити, чи належить задана точка прямій?
30. Скільки точок достатньо знайти для побудови прямої?
31. Як знайти точки перетину прямої з координатними осями?
32. Як перевірити правильність рівняння прямої, складеного за двома точками?
33. У чому полягає перевага координатного методу?
34. Для яких технічних задач можна застосовувати координатний метод?
35. Яке значення має метод координат для математичного опису положення та переміщення технічних об'єктів?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Метод координат. Пряма лінія на площині».

Повторити поняття прямокутної декартової системи координат; координати точки; знаходження відстані між двома точками; знаходження координат середини відрізка; поділ відрізка у заданому відношенні; поняття рівняння лінії на площині; загальне рівняння прямої; нормальний вектор прямої; рівняння

прямої через задану точку; рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; рівняння прямої через дві задані точки.

Самостійно повторити розв'язання прикладів, наведених у лекції.

Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих і відстань від точки до прямої детально в цій лекції не розгортаю, щоб не випереджати наступний матеріал. Ці питання передбачені Вашою робочою програмою в межах теми про пряму на площині, а відповідні формули наведено і в наданому Вами курсі лекцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У посібнику окремо розглянуто пряму на площині, загальне рівняння прямої та різні форми рівняння прямої.
2. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. У наданому Вами виданні, зокрема, розглянуто координатний метод та поділ відрізка у заданому відношенні.
3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
4. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : збірник завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Зміст теми 2.1 визначає послідовність вивчення методу координат і прямої лінії на площині та її професійно-прикладне спрямування.

Лекція 8

ТЕМА: Криві другого порядку: коло, еліпс

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про криві другого порядку та їх аналітичне задання в прямокутній декартовій системі координат; розкрити геометричне означення кола та еліпса; навчити записувати й розпізнавати канонічні рівняння кола та еліпса; визначати за рівнянням центр і радіус кола, півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет еліпса; формувати вміння приводити задані рівняння до канонічного вигляду, визначати основні геометричні характеристики кривої та виконувати її побудову в системі координат; розвивати просторове, логічне та математичне мислення; показати практичне значення рівнянь кривих другого порядку для опису геометричних форм, траєкторій і технічних залежностей, що виникають під час проєктування та аналізу конструктивних елементів автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

Матеріал лекції побудовано за наданими Вами навчальними джерелами та відповідно до робочої програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт». У програмі тема 2.2 передбачає вивчення загального поняття про криві другого порядку, канонічного рівняння кола, його центра і радіуса, а для еліпса — канонічного рівняння, півосей, фокусів та ексцентриситету.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.

2. Перевірка домашнього завдання.

3. Повідомлення теми та мети заняття.

4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.

5. Вивчення нового матеріалу.

1. Загальне поняття про криві другого порядку.
2. Коло та його геометричне означення.
3. Канонічне рівняння кола з центром у початку координат.
4. Рівняння кола з центром у довільній точці площини.
5. Визначення центра та радіуса кола за його рівнянням.

6. Приведення рівняння кола до канонічного вигляду.
7. Еліпс та його геометричне означення.
8. Канонічне рівняння еліпса.
9. Півосі та вершини еліпса.
10. Фокуси еліпса.
11. Ексцентриситет еліпса.
12. Дослідження еліпса за його канонічним рівнянням.
13. Побудова кола та еліпса.
14. Приклади розв'язування задач.
15. Практичне значення кола та еліпса.

У робочій програмі практичне заняття № 8 безпосередньо передбачає вміння привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої, для кола знайти центр і радіус, для еліпса — півосі, вершини та фокуси, а після цього виконати графічну побудову.

Навчальні матеріали лекції

1. Загальне поняття про криві другого порядку

У попередній лекції було розглянуто пряму лінію на площині. Її загальне рівняння є рівнянням першого степеня відносно координат x і y .

Наступним етапом вивчення аналітичної геометрії є **криві другого порядку**.

У наданому Вами навчальному посібнику кривою другого порядку на площині називається лінія, рівняння якої в декартовій системі координат має загальний вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де коефіцієнти при членах другого степеня одночасно не дорівнюють нулю. До кривих другого порядку належать **коло, еліпс, гіпербола та парабола**.

У цій лекції розглянемо перші дві криві:

коло та еліпс.

Гіпербола і парабола відповідно до структури робочої програми розглядатимуться окремо.

2. Коло

Геометричне означення кола

Колом називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від однієї заданої точки, яка називається центром кола.

Таке означення наведено у наданому Вами навчальному виданні «Математика в технічному університеті».

Нехай центр кола позначено точкою O , а M — довільна точка кола.

Тоді відстань

$$OM = R$$

є сталою для всіх точок кола.

Число R називається **радіусом кола**.

Отже, для будь-якої точки M , яка належить колу,

$$\boxed{OM = R.}$$

3. Канонічне рівняння кола з центром у початку координат

Нехай центр кола знаходиться в початку координат:

$$O(0; 0),$$

а його радіус дорівнює R .

Візьмемо довільну точку кола:

$$M(x; y).$$

Відстань між точками $O(0; 0)$ і $M(x; y)$ дорівнює:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

За означенням кола:

$$OM = R.$$

Тому:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отже, отримуємо **канонічне рівняння кола з центром у початку координат**:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$

Ця форма рівняння кола наведена у наданих Вами навчальних джерелах.

Приклад 1

Записати рівняння кола з центром у початку координат і радіусом

$$R = 5.$$

Розв'язання

Канонічне рівняння кола з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

За умовою:

$$R = 5.$$

Тому:

$$R^2 = 5^2 = 25.$$

Підставляємо у рівняння:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25.}$$

Перевірка

Центр отриманого кола:

$$O(0; 0).$$

Радіус:

$$R = \sqrt{25} = 5.$$

Отримані характеристики відповідають умові.

Відповідь:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25.}$$

4. Рівняння кола з центром у довільній точці

Нехай центр кола знаходиться в точці

$$O_1(x_0; y_0),$$

а радіус дорівнює

$$R.$$

Нехай

$$M(x; y)$$

— довільна точка кола.

За означенням:

$$O_1M = R.$$

Відстань між точками $O_1(x_0; y_0)$ і $M(x; y)$:

$$O_1M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Тому:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.}$$

Отже, якщо рівняння кола записано у такому вигляді, то:

$$\boxed{O_1(x_0; y_0)}$$

— центр кола, а

$$\boxed{R}$$

— його радіус.

Саме такий вигляд рівняння кола з центром у довільній точці наведено у наданому Вами практичному посібнику.

Приклад 2

Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться в точці

$$O_1(3; -2),$$

а радіус дорівнює

$$R = 4.$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

За умовою:

$$\begin{aligned}x_0 &= 3, \\y_0 &= -2, \\R &= 4.\end{aligned}$$

Підставляємо:

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2.$$

Враховуємо знаки:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Отже,

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.}$$

Перевірка

Із отриманого рівняння бачимо:

$$x_0 = 3, y_0 = -2.$$

Отже, центр:

$$O_1(3; -2).$$

Радіус:

$$R = \sqrt{16} = 4.$$

Усі характеристики відповідають умові.

Відповідь:

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.}$$

5. Визначення центра та радіуса кола за канонічним рівнянням

Якщо задано рівняння:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

то центр кола визначаємо безпосередньо:

$$O_1(x_0; y_0).$$

Радіус:

$$R = \sqrt{R^2}.$$

Особливу увагу потрібно звертати на знаки в дужках.

Наприклад, якщо маємо:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25,$$

то:

$$x + 3 = x - (-3).$$

Тому абсциса центра:

$$x_0 = -3.$$

Для другої координати:

$$y - 4,$$

отже:

$$y_0 = 4.$$

Таким чином, центр:

$$O_1(-3; 4),$$

а радіус:

$$R = 5.$$

Приклад 3

Визначити центр і радіус кола:

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36.$$

Розв'язання

Порівнюємо задане рівняння з канонічним:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Перша дужка:

$$x + 2 = x - (-2).$$

Тому:

$$x_0 = -2.$$

Друга дужка:

$$y - 5.$$

Отже:

$$y_0 = 5.$$

Права частина:

$$R^2 = 36.$$

Звідси:

$$R = \sqrt{36} = 6.$$

Отже, центр кола:

$$O_1(-; 25)$$

і радіус:

$$R = 6.$$

Перевірка

Підставимо знайдені значення в загальну форму:

$$(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 6^2.$$

Отримаємо:

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 36.$$

Це початкове рівняння.

Відповідь:

$$O_1(-; 25), R = 6.$$

6. Приведення рівняння кола до канонічного вигляду

На практиці рівняння кола не завжди одразу записане у канонічній формі.

Наприклад:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0.$$

Саме завдання на приведення такого рівняння до канонічного вигляду міститься в одному з наданих Вами навчальних посібників.

Для переходу до канонічного рівняння потрібно виділити повні квадрати.

Використовуємо тотожність:

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2.$$

Аналогічно для змінної y .

Приклад 4

Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус кола.

Розв'язання

Згрупуємо члени зі змінною x та члени зі змінною y :

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) + 6 = 0.$$

Крок 1. Виділимо повний квадрат для змінної x

Маємо:

$$x^2 + 2x.$$

Додаємо і віднімаємо 1:

$$x^2 + 2x + 1 - 1.$$

Отже:

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1.$$

Крок 2. Виділимо повний квадрат для змінної y

Маємо:

$$y^2 - 6y.$$

Додаємо і віднімаємо 9:

$$y^2 - 6y + 9 - 9.$$

Отже:

$$y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9.$$

Крок 3. Підставляємо

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 6 = 0.$$

Об'єднуємо сталі числа:

$$-1 - 9 + 6 = -4.$$

Тому:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0.$$

Переносимо -4 у праву частину:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Крок 4. Визначаємо центр

Порівнюємо з рівнянням:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Отже:

$$x_0 = -1, y_0 = 3.$$

Центр:

$$O_1(-; 13).$$

Крок 5. Визначаємо радіус

$$R^2 = 4.$$

Тому:

$$R = 2.$$

Перевірка

Розкриємо дужки:

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 4. \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= 4.\end{aligned}$$

Переносимо 4 у ліву частину:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0.$$

Отримали початкове рівняння.

Відповідь:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4,$$

$$O_1(-; 13), R = 2.$$

7. Побудова кола

Для побудови кола за його канонічним рівнянням необхідно:

1. визначити координати центра;
2. визначити радіус;
3. позначити центр у системі координат;
4. відкласти від центра радіус у чотирьох основних напрямках;

5. провести коло через отримані точки.

Наприклад, для кола

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

центр:

$$O_1(2; -1),$$

а радіус:

$$R = 3.$$

Характерні точки кола:

$$\begin{aligned} &(5; -1), \\ &(-1; -1), \\ &(2; 2), \\ &(2; -4). \end{aligned}$$

Через ці точки виконуємо побудову кола.

8. Еліпс

Переходимо до другої кривої другого порядку, яка розглядається в цій лекції.

Геометричне означення еліпса

Нехай на площині задано дві точки:

$$F_1$$

і

$$F_2.$$

Ці точки називаються **фокусами еліпса**.

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок — фокусів — є сталою величиною.

У наданому Вами навчальному матеріалі це означення сформульовано як геометричне місце точок M , для яких сума відстаней до фокусів F_1 і F_2 є сталою та більшою за відстань між фокусами.

Отже:

$$\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a.}$$

Тут $2a$ — стала величина.

9. Канонічне рівняння еліпса

Якщо центр еліпса знаходиться в початку координат, а його осі симетрії збігаються з координатними осями, то канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де за розглянутого розташування:

$$a > b > 0.$$

У наданих Вами джерелах саме це рівняння названо канонічним рівнянням еліпса.

Величина

$$a$$

називається **великою піввіссю еліпса**, а величина

$$b$$

— **малою піввіссю еліпса**.

Повна довжина великої осі:

$$2a.$$

Повна довжина малої осі:

$$2b.$$

10. Вершини еліпса

Розглянемо канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Оскільки велика вісь розташована вздовж осі Ox , вершини на великій осі мають координати:

$$A_1(-a; 0), \quad A_2(a; 0).$$

Вершини на малій осі:

$$B_1(0; -b), \quad B_2(0; b).$$

Таке розташування центра, осей симетрії та вершин наведено у Вашому навчальному матеріалі.

Центр еліпса:

$$O(0; 0).$$

11. Фокуси еліпса

Фокуси еліпса розташовані на його великій осі симетрично відносно центра.

Якщо велика вісь розташована вздовж осі Ox , то:

$$F_1(-c; 0), F_2(c; 0).$$

Величини a, b і спов'язані співвідношенням:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Звідси:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Відстань між фокусами:

$$F_1F_2 = 2c.$$

Саме співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ та координати фокусів $(-c; 0)$ і $(c; 0)$ наведені у наданому Вами практичному посібнику.

12. Ексцентриситет еліпса

Для характеристики форми еліпса використовується величина, яка називається **ексцентриситетом**.

Ексцентриситет еліпса визначається за формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки для еліпса:

$$c < a,$$

то:

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

Ексцентриситет характеризує ступінь видовженості еліпса.

Чим ближче значення ε до нуля, тим ближча форма еліпса до кола.

Якщо:

$$a = b,$$

то:

$$c = 0$$

і

$$\varepsilon = 0.$$

У цьому випадку еліпс перетворюється на коло. Те, що коло є окремим випадком еліпса при $a = b$, безпосередньо зазначено у наданих Вами джерелах.

Приклад 5

Дослідити еліпс:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити його півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Розв'язання

Порівнюємо задане рівняння з канонічним:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Отже:

$$\begin{aligned} a^2 &= 25, \\ b^2 &= 9. \end{aligned}$$

Крок 1. Знайдемо велику піввісь

$$a = \sqrt{25} = 5.$$

Крок 2. Знайдемо малу піввісь

$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Отже:

$$\boxed{a = 5, b = 3.}$$

Крок 3. Знайдемо вершини

Вершини великої осі:

$$A_1(-; 50),$$

$$A_2(5; 0).$$

Вершини малої осі:

$$B_1(0; -3),$$

$$B_2(0; 3).$$

Крок 4. Знайдемо фокусну відстань

Використовуємо:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Підставляємо:

$$c^2 = 25 - 9.$$

$$c^2 = 16.$$

$$c = 4.$$

Крок 5. Запишемо координати фокусів

$$F_1(-; 40),$$

$$F_2(4; 0).$$

Крок 6. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Підставляємо:

$$\varepsilon = \frac{4}{5}.$$

Отже:

$$\boxed{\varepsilon = 0,8.}$$

Перевірка

Перевіряємо основне співвідношення:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Підставляємо:

$$25 = 9 + 16.$$

$$25 = 25.$$

Рівність виконується.

Крім того:

$$0 < 0,8 < 1,$$

що відповідає властивості ексцентриситету еліпса.

Відповідь:

$$a = 5, b = 3, c = 4,$$

$$A_1(-5; 0), A_2(5; 0),$$

$$B_1(0; -3), B_2(0; 3),$$

$$F_1(-4; 0), F_2(4; 0),$$

$$\varepsilon = 0,8.$$

13. Визначення великої осі еліпса

Під час дослідження еліпса важливо правильно визначити, вздовж якої координатної осі розташована велика вісь.

Розглянемо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a^2 > b^2.$$

Більший знаменник знаходиться під x^2 .

Отже, велика вісь розташована вздовж осі Ox .

Якщо ж маємо:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a^2 > b^2,$$

то більший знаменник знаходиться під y^2 .

У цьому випадку велика вісь розташована вздовж осі Oy .

Тоді фокуси матимуть координати:

$$F_1(0; -c), F_2(0; c).$$

Приклад 6

Дослідити еліпс:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Розв'язання

Порівнюємо знаменники:

$$36 > 16.$$

Більший знаменник знаходиться під y^2 .

Отже, велика вісь еліпса розташована вздовж осі Oy .

Крок 1. Визначаємо півосі

Велика піввісь:

$$a = \sqrt{36} = 6.$$

Мала піввісь:

$$b = \sqrt{16} = 4.$$

Крок 2. Визначаємо вершини великої осі

Оскільки велика вісь збігається з віссю Oy :

$$\begin{aligned} A_1(0; -6), \\ A_2(0; 6). \end{aligned}$$

Крок 3. Визначаємо вершини малої осі

$$\begin{aligned} B_1(-4; 0), \\ B_2(4; 0). \end{aligned}$$

Крок 4. Знаходимо c

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2}. \\ c &= \sqrt{36 - 16}. \\ c &= \sqrt{20}. \\ c &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Крок 5. Записуємо координати фокусів

Оскільки фокуси розташовані на великій осі:

$$\boxed{F_1(0; -2\sqrt{5}), F_2(0; 2\sqrt{5}).}$$

Крок 6. Знаходимо ексцентриситет

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{c}{a}. \\ \varepsilon &= \frac{2\sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

Скорочуємо:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Перевірка

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,745.$$

Отже:

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Умова для еліпса виконується.

Відповідь:

$$a = 6, b = 4, c = 2\sqrt{5},$$

$$F_1(0; -2\sqrt{5}), F_2(0; 2\sqrt{5}),$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

14. Приведення рівняння еліпса до канонічного вигляду

Рівняння еліпса може бути задане у вигляді:

$$Ax^2 + Cy^2 = D.$$

Для приведення його до канонічного вигляду необхідно поділити обидві частини рівняння на число D .

Приклад 7

Привести до канонічного вигляду рівняння

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

та визначити основні характеристики еліпса.

Задача на визначення півосей та ексцентриситету саме такого еліпса міститься серед вправ у наданому Вами навчальному матеріалі.

Розв'язання

Крок 1. Приведемо рівняння до канонічного вигляду

Поділимо всі члени рівняння на 36:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1.$$

Скорочуємо дробби:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.}$$

Крок 2. Знайдемо півосі

$$a^2 = 9, b^2 = 4.$$

Тому:

$$\begin{aligned} a &= 3, \\ b &= 2. \end{aligned}$$

Крок 3. Визначимо вершини

Велика вісь розташована вздовж осі Ox .

Тому:

$$A_1(-3; 0), A_2(3; 0).$$

Інші вершини:

$$B_1(0; -2), B_2(0; 2).$$

Крок 4. Знайдемо фокусну відстань

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

$$c^2 = 9 - 4 = 5.$$

$$c = \sqrt{5}.$$

Фокуси:

$$F_1(-\sqrt{5}; 0),$$

$$F_2(\sqrt{5}; 0).$$

Крок 5. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Тому:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Перевірка

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$$9 = 4 + 5.$$

Рівність правильна.

Відповідь:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$a = 3, b = 2, c = \sqrt{5},$$

$$F_1(-; \sqrt{5}0), F_2(\sqrt{5}; 0),$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

15. Побудова еліпса

Для побудови еліпса за його канонічним рівнянням доцільно дотримуватися певної послідовності.

Нехай:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b.$$

Спочатку визначаємо центр:

$$O(0; 0).$$

Потім визначаємо вершини великої осі:

$$A_1(-; a0), A_2(a; 0).$$

Далі визначаємо вершини малої осі:

$$B_1(0; -b), B_2(0; b).$$

Після цього знаходимо:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

і позначаємо фокуси:

$$F_1(-; c0), F_2(c; 0).$$

Через характерні точки проводимо плавну замкнену криву, симетричну відносно обох координатних осей.

16. Коло як окремий випадок еліпса

Порівняємо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо:

$$a = b = R,$$

то:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Об'єднуємо:

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} = 1.$$

Множимо на R^2 :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отримали канонічне рівняння кола.

Таким чином:

при $a = b$ еліпс перетворюється на коло.

Цей зв'язок між колом та еліпсом прямо зазначений у наданих Вами навчальних джерелах.

17. Порівняння кола та еліпса

Для кола всі точки однаково віддалені від центра:

$$OM = R.$$

Для еліпса сталою є сума відстаней від довільної точки еліпса до двох фокусів:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Канонічне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Коло має один центр і один радіус.

Еліпс характеризується центром, двома півосями, чотирма вершинами, двома фокусами та ексцентриситетом.

18. Алгоритм дослідження рівняння кола

Якщо необхідно дослідити задане рівняння кола, рекомендується виконувати дії у такій послідовності:

Крок 1. Привести рівняння до канонічного вигляду.

Крок 2. Порівняти його з формою:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Крок 3. Визначити координати центра:

$$O_1(x_0; y_0).$$

Крок 4. Визначити радіус:

$$R.$$

Крок 5. Знайти характерні точки.

Крок 6. Виконати побудову в системі координат.

Ця послідовність узгоджується із завданнями практичного заняття № 8 робочої програми.

19. Алгоритм дослідження рівняння еліпса

Крок 1. Привести рівняння до канонічного вигляду.

Крок 2. Визначити, який знаменник більший.

Крок 3. Визначити велику піввісь a .

Крок 4. Визначити малу піввісь b .

Крок 5. Встановити напрям великої осі.

Крок 6. Визначити вершини еліпса.

Крок 7. Обчислити:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Крок 8. Визначити координати фокусів.

Крок 9. Обчислити ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Крок 10. Перевірити:

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

Крок 11. Виконати побудову еліпса.

Приклад 8. Комплексне дослідження кривої

Дослідити рівняння:

$$9x^2 + 4y^2 = 36.$$

Визначити вид кривої, привести рівняння до канонічного вигляду, знайти півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Розв'язання

Крок 1. Приведемо рівняння до канонічного вигляду

Маємо:

$$9x^2 + 4y^2 = 36.$$

Поділимо обидві частини на 36:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1.$$

Отже:

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.}$$

Це канонічне рівняння еліпса.

Крок 2. Визначимо велику піввісь

Більший знаменник:

$$9.$$

Він знаходиться під y^2 .

Тому велика вісь розташована вздовж осі Oy .

$$a^2 = 9.$$

$$a = 3.$$

Крок 3. Визначимо малу піввісь

$$b^2 = 4.$$

$$b = 2.$$

Крок 4. Знайдемо вершини

На великій осі:

$$A_1(0; -3),$$

$$A_2(0; 3).$$

На малій осі:

$$B_1(-; 20),$$

$$B_2(2; 0).$$

Крок 5. Знайдемо c

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

$$c^2 = 9 - 4 = 5.$$

$$c = \sqrt{5}.$$

Крок 6. Знайдемо фокуси

Оскільки велика вісь розташована вздовж осі Oy :

$$F_1(0; -\sqrt{5}), F_2(0; \sqrt{5}).$$

Крок 7. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Перевірка

Перевіримо співвідношення:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$$9 = 4 + 5.$$

Рівність виконується.

Також:

$$0 < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

Отже, отримані характеристики відповідають еліпсу.

Відповідь:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

— еліпс;

$$a = 3, b = 2, c = \sqrt{5};$$

$$A_1(0; -3), A_2(0; 3);$$

$$B_1(-; 20), B_2(2; 0);$$

$$F_1(0; -\sqrt{5}), F_2(0; \sqrt{5});$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

20. Основні помилки під час розв'язування задач

Перша помилка — неправильне визначення центра кола за знаками у дужках.

Наприклад:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

має центр:

$$(-; 42),$$

а не $(4; 2)$.

Друга помилка — плутання R і R^2 .

Якщо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 25,$$

то:

$$R^2 = 25,$$

але:

$$R = 5.$$

Третя помилка — неправильне визначення великої півосі еліпса.

Велика піввісь відповідає **більшому** знаменнику у канонічному рівнянні.

Четверта помилка — використання знаменників замість їх квадратних коренів.

Якщо:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

то:

$$a = 7, b = 5,$$

а не 49 і 25.

П'ята помилка — неправильне обчислення фокусної відстані.

Для еліпса:

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

а не сума квадратів півосей.

Шоста помилка — неправильне розташування фокусів.

Фокуси завжди знаходяться на **великій осі** еліпса.

Сьома помилка — плутання ста відстані між фокусами.

Величина:

$$c$$

— це відстань від центра еліпса до одного фокуса.

Відстань між фокусами:

$$2c.$$

Восьма помилка — неправильне обчислення ексцентриситету.

Необхідно використовувати:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Для еліпса результат повинен задовольняти умову:

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

21. Практичне значення кривих другого порядку

Коло та еліпс є не лише геометричними об'єктами. Рівняння цих кривих дозволяють математично описувати форму, положення та геометричні характеристики різних об'єктів.

У робочій програмі дисципліни для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт» практичний акцент цієї теми визначено як використання рівнянь кривих для опису **геометричних форм, траєкторій та технічних залежностей**, що виникають під час проєктування й аналізу конструктивних елементів.

Координатний опис дозволяє замість лише графічного зображення отримати математичну модель геометричного об'єкта. За рівнянням можна визначити його характерні параметри, положення відносно координатних осей та виконати точну побудову.

Саме тому робочою програмою для практичного заняття передбачено не тільки визначення виду кривої, а й приведення її рівняння до канонічної форми, знаходження геометричних характеристик та виконання графічної побудови.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Під час закріплення необхідно повторити поняття кривої другого порядку; означення кола; канонічне рівняння кола; визначення центра і радіуса; приведення рівняння кола до канонічного вигляду; означення еліпса; канонічне рівняння еліпса; поняття великої та малої півосей; вершини та фокуси еліпса; зв'язок між a , b і c ; ексцентриситет еліпса; алгоритми дослідження і побудови кола та еліпса.

Питання для закріплення

1. Що називається кривою другого порядку?
2. Які криві належать до кривих другого порядку?
3. Що називається колом?
4. Яка точка називається центром кола?
5. Що називається радіусом кола?
6. Який вигляд має канонічне рівняння кола з центром у початку координат?
7. Який вигляд має рівняння кола з центром у точці $O_1(x_0; y_0)$?
8. Як за канонічним рівнянням визначити центр кола?

9. Як за рівнянням визначити радіус кола?
10. На що потрібно звертати увагу під час визначення координат центра за знаками у дужках?
11. Як привести рівняння кола до канонічного вигляду?
12. Для чого під час такого перетворення виділяють повні квадрати?
13. Як перевірити правильність отриманого канонічного рівняння кола?
14. Як побудувати коло за його рівнянням?
15. Що називається еліпсом?
16. Які точки називаються фокусами еліпса?
17. Яка величина є сталою для всіх точок еліпса?
18. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
19. Що називається великою піввіссю еліпса?
20. Що називається малою піввіссю еліпса?
21. Як визначити напрям великої осі еліпса за його канонічним рівнянням?
22. Які координати мають вершини еліпса, якщо велика вісь збігається з віссю Ox ?
23. Де розташовані фокуси еліпса?
24. Як обчислити величину c ?
25. Чому дорівнює відстань між фокусами?
26. Що називається ексцентриситетом еліпса?
27. За якою формулою обчислюється ексцентриситет?
28. У яких межах знаходиться ексцентриситет еліпса?
29. Що відбувається з еліпсом при $a = b$?
30. Чому коло можна розглядати як окремий випадок еліпса?
31. Як привести рівняння виду $Ax^2 + Cy^2 = D$ до канонічного вигляду?
32. Як визначити вершини еліпса?
33. Як визначити координати його фокусів?
34. Яку перевірку можна виконати після знаходження a , b і c ?
35. Які характерні точки потрібно знайти перед побудовою еліпса?

36. У чому полягає відмінність між геометричними означеннями кола та еліпса?
37. Які основні параметри необхідно визначити під час дослідження кола?
38. Які основні параметри необхідно визначити під час дослідження еліпса?
39. Яке практичне значення має аналітичне задання кривих другого порядку?
40. Для яких професійно орієнтованих геометричних задач можуть використовуватися рівняння кола та еліпса?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «**Криві другого порядку: коло, еліпс**».

Повторити поняття кривої другого порядку; геометричне означення кола; канонічне рівняння кола з центром у початку координат; рівняння кола з центром у довільній точці; визначення центра і радіуса; приведення рівняння кола до канонічного вигляду; геометричне означення еліпса; канонічне рівняння еліпса; велику та малу півосі; вершини; фокуси; співвідношення

$$c^2 = a^2 - b^2;$$

ексцентриситет еліпса; алгоритми дослідження та побудови кола й еліпса.

Самостійно повторити всі приклади, наведені у лекції, з обов'язковою перевіркою отриманих результатів.

Під час підготовки особливу увагу звернути на вміння **привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої, для кола знайти центр і радіус, а для еліпса — півосі, вершини та фокуси**, оскільки саме ці дії передбачені практичним заняттям № 8 Вашої робочої програми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У посібнику розглянуто криві другого порядку, рівняння кола, еліпс та його основні характеристики.
2. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. У виданні

до кривих другого порядку віднесено коло, еліпс, параболу та гіперболу; наведено означення кола і канонічні рівняння кола та еліпса.

3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
4. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Тема 2.2 визначає зміст вивчення кривих другого порядку та їх практичне застосування; практичне заняття № 8 передбачає дослідження рівнянь кола та еліпса і виконання графічної побудови.

Лекція 9

ТЕМА: Криві другого порядку: гіпербола, парабола

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти системне уявлення про гіперболу та параболу як криві другого порядку; розкрити їх геометричні означення та основні властивості; навчити розпізнавати та записувати канонічні рівняння гіперболи і параболи; визначати за рівнянням основні геометричні характеристики гіперболи — центр, півосі, вершини, фокуси, асимптоти та ексцентриситет; визначати для параболи вершину, вісь симетрії, фокус, директрису та фокальний параметр; сформувати вміння приводити задані рівняння до канонічного вигляду, визначати напрям розташування та виконувати побудову кривих у прямокутній декартовій системі координат; розвивати математичне та просторове мислення; показати практичне значення рівнянь кривих другого порядку для опису геометричних форм, траєкторій та технічних залежностей.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до даної теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

Матеріал лекції побудовано за наданими Вами навчальними джерелами та відповідно до робочої програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». За календарною структурою робочої програми **Лекція 9 має точну назву «Криві другого порядку: гіпербола, парабола»** і на її вивчення передбачено дві години. Після неї заплановане практичне заняття з цієї самої теми.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

- 1. Організаційний момент.*
 - 2. Перевірка домашнього завдання.*
 - 3. Повідомлення теми та мети заняття.*
 - 4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.*
 - 5. Вивчення нового матеріалу.*
1. Повторення поняття про криві другого порядку.
 2. Геометричне означення гіперболи.
 3. Канонічне рівняння гіперболи.
 4. Основні геометричні характеристики гіперболи.
 5. Вершини та фокуси гіперболи.

6. Асимптоти гіперболи.
7. Ексцентриситет гіперболи.
8. Дослідження та побудова гіперболи за її рівнянням.
9. Геометричне означення параболи.
10. Канонічне рівняння параболи.
11. Вершина та вісь симетрії параболи.
12. Фокус і директриса параболи.
13. Фокальний параметр параболи.
14. Розташування параболи залежно від її канонічного рівняння.
15. Дослідження та побудова параболи.
16. Практичне значення гіперболи та параболи.

Навчальні матеріали лекції

1. Повторення поняття про криві другого порядку

У попередній лекції були розглянуті коло та еліпс. Продовжуємо вивчення кривих другого порядку і переходимо до гіперболи та параболи.

До основних кривих другого порядку належать:

- коло;
- еліпс;
- гіпербола;
- парабола.

У наданому Вами навчальному посібнику «Математика в технічному університеті» коло, еліпс, парабола та гіпербола безпосередньо віднесені до кривих другого порядку.

Гіпербола та парабола мають свої канонічні рівняння і характерні геометричні елементи. Тому під час дослідження заданого рівняння важливо не тільки встановити вид кривої, а й визначити її основні параметри та правильно виконати графічну побудову.

2. Гіпербола

Геометричне означення гіперболи

Нехай на площині задано дві точки

$$F_1$$

і

$$F_2.$$

Ці точки називаються **фокусами гіперболи**.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких **модуль різниці відстаней до двох заданих точок — фокусів — є сталою величиною**.

Якщо M — довільна точка гіперболи, то:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

У наданому Вами навчальному матеріалі саме через сталий модуль різниці відстаней до двох фокусів подається геометричне означення гіперболи.

3. Канонічне рівняння гіперболи

Якщо центр гіперболи знаходиться в початку координат, а її дійсна вісь збігається з віссю Ox , канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де

$$a > 0, b > 0.$$

Саме це рівняння в наданому Вами виданні «Математика в технічному університеті» визначено як канонічне рівняння гіперболи.

Точка

$$O(0; 0)$$

є центром гіперболи.

Величина a називається **дійсною піввіссю гіперболи**.

Величина b називається **уявною піввіссю гіперболи**.

4. Будова гіперболи

На відміну від еліпса, гіпербола складається з **двох окремих гілок**.

Для рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гілки розташовані праворуч і ліворуч від початку координат.

Гіпербола симетрична:

- відносно осі Ox ;
- відносно осі Oy ;
- відносно початку координат.

Центром симетрії є:

$$O(0; 0).$$

5. Вершини гіперболи

Для канонічного рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вершини розташовані на осі Ox .

Їх координати:

$$A_1(-a; 0), A_2(a; 0).$$

Відстань між вершинами дорівнює:

$$2a.$$

6. Фокуси гіперболи

Фокуси також розташовані на дійсній осі гіперболи.

Для гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

фокуси мають координати:

$$F_1(-c; 0), F_2(c; 0).$$

Для гіперболи величини a , b і c пов'язані співвідношенням:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Отже:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Відстань між фокусами:

$$F_1 F_2 = 2c.$$

Зверніть увагу на важливу відмінність від еліпса.

Для еліпса:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Для гіперболи:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ці формули не можна плутати.

7. Асимптоти гіперболи

Важливою характеристикою гіперболи є її **асимптоти**.

Асимптоти — це прямі, до яких гілки гіперболи необмежено наближаються при віддаленні від центра.

Для гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

рівняння асимптот:

$$y = \frac{b}{a}x$$

і

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Отже, коротко:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Асимптоти проходять через центр гіперболи.

8. Ексцентриситет гіперболи

Ексцентриситет гіперболи визначається за формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Оскільки:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

то:

$$c > a.$$

Тому для гіперболи:

$$\varepsilon > 1.$$

Це є важливою відмінністю гіперболи від еліпса.

Для еліпса:

$$0 \leq \varepsilon < 1.$$

Для параболи, як зазначено у наданому Вами виданні «Математика в технічному університеті»:

$$\varepsilon = 1.$$

Для гіперболи:

$$\varepsilon > 1.$$

Приклад 1

Дослідити гіперболу:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити її півосі, вершини, фокуси, асимптоти та ексцентриситет.

Розв'язання

Порівнюємо задане рівняння з канонічним:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Отже:

$$\begin{aligned} a^2 &= 16, \\ b^2 &= 9. \end{aligned}$$

Крок 1. Знайдемо дійсну піввісь

$$a = \sqrt{16} = 4.$$

Крок 2. Знайдемо уявну піввісь

$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Отже:

$$\boxed{a = 4, b = 3.}$$

Крок 3. Знайдемо вершини

$$A_1(-; 40),$$

$$A_2(4; 0).$$

Крок 4. Знайдемо величину c

Для гіперболи:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Підставляємо:

$$c^2 = 16 + 9.$$

$$c^2 = 25.$$

$$c = 5.$$

Крок 5. Знайдемо фокуси

$$F_1(-; 50),$$

$$F_2(5; 0).$$

Крок 6. Знайдемо асимптоти

Використовуємо формулу:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Підставляємо:

$$y = \pm \frac{3}{4}x.$$

Отже:

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x.}$$

Крок 7. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4}.$$

$$\varepsilon = 1,25.$$

Перевірка

Для гіперболи повинна виконуватися умова:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Перевіряємо:

$$25 = 16 + 9.$$

$$25 = 25.$$

Крім того:

$$\varepsilon = 1,25 > 1.$$

Усі характеристики відповідають гіперболі.

Відповідь:

$$a = 4, b = 3, c = 5;$$

$$A_1(-; 40), A_2(4; 0);$$

$$F_1(-; 50), F_2(5; 0);$$

$$y = \pm \frac{3}{4}x;$$

$$\varepsilon = 1,25.$$

9. Гіпербола з дійсною віссю вздовж осі Oy

Гіпербола може бути розташована не тільки вздовж осі Ox .

Розглянемо рівняння:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

У цьому випадку гілки гіперболи спрямовані вгору і вниз.

Вершини:

$$A_1(0; -a), A_2(0; a).$$

Фокуси:

$$F_1(0; -c), F_2(0; c).$$

Як і раніше:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Асимптоти:

$$y = \pm \frac{a}{b}x.$$

Приклад 2

Дослідити гіперболу:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Розв'язання

Порівнюємо з канонічним рівнянням:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Маємо:

$$a^2 = 25, b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 5, b = 3.$$

Крок 1. Визначимо вершини

Оскільки додатний член містить y^2 , дійсна вісь збігається з віссю Oy .

Тому:

$$\begin{aligned} A_1(0; -5), \\ A_2(0; 5). \end{aligned}$$

Крок 2. Знайдемо c

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2. \\ c^2 &= 25 + 9 = 34. \\ c &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Крок 3. Знайдемо фокуси

$$\begin{aligned} F_1(0; -\sqrt{34}), \\ F_2(0; \sqrt{34}). \end{aligned}$$

Крок 4. Знайдемо асимптоти

$$y = \pm \frac{a}{b}x.$$

Тому:

$$y = \pm \frac{5}{3}x.$$

Крок 5. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Оскільки:

$$\sqrt{34} > 5,$$

то:

$$\varepsilon > 1.$$

Відповідь:

$$a = 5, b = 3, c = \sqrt{34};$$

$$A_1(0; -5), A_2(0; 5);$$

$$F_1(0; -\sqrt{34}), F_2(0; \sqrt{34});$$

$$y = \pm \frac{5}{3}x;$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

10. Приведення рівняння гіперболи до канонічного вигляду

На практиці рівняння гіперболи може бути задано у вигляді:

$$Ax^2 - By^2 = C.$$

Щоб привести його до канонічного вигляду, потрібно поділити обидві частини на число, що знаходиться у правій частині.

Приклад 3

Привести до канонічного вигляду рівняння:

$$25x^2 - 9y^2 = 225.$$

Визначити основні характеристики гіперболи.

Завдання з таким рівнянням на знаходження асимптот міститься серед вправ у наданому Вами навчальному матеріалі.

Розв'язання

Крок 1. Поділимо рівняння на 225

$$\frac{25x^2}{225} - \frac{9y^2}{225} = 1.$$

Скорочуємо:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1.}$$

Крок 2. Визначимо півосі

$$\begin{aligned}a^2 &= 9, \\ b^2 &= 25.\end{aligned}$$

Отже:

$$\begin{aligned}a &= 3, \\ b &= 5.\end{aligned}$$

Крок 3. Визначимо вершини

$$\begin{aligned}A_1(-; 30), \\ A_2(3; 0).\end{aligned}$$

Крок 4. Знайдемо c

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2. \\ c^2 &= 9 + 25. \\ c^2 &= 34. \\ c &= \sqrt{34}.\end{aligned}$$

Крок 5. Визначимо фокуси

$$\begin{aligned}F_1(-; \sqrt{34}0), \\ F_2(\sqrt{34}; 0).\end{aligned}$$

Крок 6. Визначимо асимптоти

$$\begin{aligned}y &= \pm \frac{b}{a}x. \\ y &= \pm \frac{5}{3}x.\end{aligned}$$

Крок 7. Визначимо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

Відповідь:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1;$$

$$a = 3, b = 5, c = \sqrt{34};$$

$$A_1(-; 30), A_2(3; 0);$$

$$F_1(-; \sqrt{34}0), F_2(\sqrt{34}; 0);$$

$$y = \pm \frac{5}{3}x.$$

11. Алгоритм дослідження гіперболи

Під час дослідження гіперболи рекомендується дотримуватися такої послідовності.

Крок 1. Привести рівняння до канонічного вигляду.

Крок 2. Визначити, яка змінна входить у рівняння з додатним знаком.

Крок 3. Визначити напрям дійсної осі.

Крок 4. Знайти a і b .

Крок 5. Визначити вершини.

Крок 6. Обчислити:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Крок 7. Визначити координати фокусів.

Крок 8. Записати рівняння асимптот.

Крок 9. За необхідності знайти ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Крок 10. Виконати побудову.

12. Побудова гіперболи

Розглянемо гіперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для її побудови спочатку позначаємо вершини:

$$(-a; 0), (a; 0).$$

Потім будуємо допоміжний прямокутник з вершинами:

$$(a; b), (a; -b), (-a; b), (-a; -b).$$

Діагоналі цього прямокутника лежать на прямих:

$$y = \frac{b}{a}x$$

та

$$y = -\frac{b}{a}x.$$

Це асимптоти гіперболи.

Після побудови асимптот через вершини проводять дві гілки гіперболи, які поступово наближаються до асимптот.

13. Парабола

Переходимо до другої кривої, передбаченої темою лекції.

Геометричне означення параболі

Параболою називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від заданої точки, яка називається фокусом, і заданої прямої, яка називається директрисою.

У наданому Вами навчальному посібнику це формулюється як рівність відстані точки параболі до фокуса та відстані цієї самої точки до директриси.

Нехай:

$$F$$

— фокус;

d — директриса;

M — довільна точка параболі.

Тоді:

$$MF = \text{dist}(M, d).$$

14. Канонічне рівняння параболи

Розглянемо параболу, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь симетрії збігається з віссю Ox .

Її канонічне рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

де:

$$p > 0.$$

У наданому Вами навчальному виданні «Математика в технічному університеті» величина p називається **фокальним параметром**, а величина

$$\frac{p}{2}$$

— **фокусною віддаллю**.

Вершина такої параболи:

$$O(0; 0).$$

Вісь симетрії:

$$Ox.$$

15. Фокус параболи

Для параболи

$$y^2 = 2px$$

фокус знаходиться в точці:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Відстань від вершини параболи до фокуса дорівнює:

$$\frac{p}{2}.$$

16. Директриса параболы

Директриса параболы

$$y^2 = 2px$$

має рівняння:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Отже, фокус і директриса розташовані на однаковій відстані від вершини параболы, але по різні боки від неї.

Для будь-якої точки M параболы:

$$MF = d,$$

де d — відстань від точки M до директриси.

Ці характеристики — фокус, директриса та фокальна відстань — наведені у наданому Вами навчальному джерелі.

17. Напрямок гілок параболы

Напрямок гілок параболы залежить від вигляду її канонічного рівняння.

Якщо:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

парабола відкрита **праворуч**.

Якщо:

$$y^2 = -2px, \quad p > 0,$$

парабола відкрита **ліворуч**.

Якщо:

$$x^2 = 2py, \quad p > 0,$$

парабола відкрита **вгору**.

Якщо:

$$x^2 = -2py, \quad p > 0,$$

парабола відкрита **вниз**.

Це необхідно визначати до початку графічної побудови.

18. Парабола $y^2 = 2px$

Для рівняння:

$$y^2 = 2px$$

маємо:

вершина:

$$O(0; 0);$$

вісь симетрії:

$$Ox;$$

фокус:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right);$$

директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Приклад 4

Дослідити параболу:

$$y^2 = 8x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, фокальний параметр, фокус і директрису.

Розв'язання

Порівнюємо задане рівняння з канонічним:

$$y^2 = 2px.$$

Маємо:

$$2p = 8.$$

Звідси:

$$p = 4.$$

Крок 1. Визначимо вершину

Вершина знаходиться у початку координат:

$$\boxed{O(0; 0)}.$$

Крок 2. Визначимо вісь симетрії

Оскільки змінна упіднесена до квадрата, вісь параболи збігається з віссю Ox .

Вісь симетрії — Ox .

Крок 3. Визначимо напрям

У правій частині:

$$8x.$$

Коефіцієнт додатний, тому парабола відкрита праворуч.

Крок 4. Знайдемо фокус

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Оскільки:

$$p = 4,$$

то:

$$\frac{p}{2} = 2.$$

Отже:

$F(2; 0).$

Крок 5. Запишемо рівняння директриси

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Тому:

$x = -2.$

Перевірка

Відстань від вершини $O(0; 0)$ до фокуса:

$$OF = 2.$$

Відстань від вершини до директриси $x = -2$ також дорівнює:

$$2.$$

Отже, розташування фокуса і директриси визначено правильно.

Відповідь:

$O(0; 0);$

$p = 4;$

$$F(2; 0);$$

$$x = -2;$$

парабола відкрита праворуч.

19. Парабола $y^2 = -2px$

Якщо канонічне рівняння має вигляд:

$$y^2 = -2px, \quad p > 0,$$

то парабола відкрита ліворуч.

Її вершина:

$$O(0; 0).$$

Фокус:

$$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right).$$

Директриса:

$$x = \frac{p}{2}.$$

Приклад 5

Дослідити параболу:

$$y^2 = -12x.$$

Розв'язання

Порівнюємо:

$$y^2 = -2px$$

і

$$y^2 = -12x.$$

Отже:

$$2p = 12.$$

$$p = 6.$$

Вершина:

$$O(0; 0).$$

Парабола відкрита ліворуч.

Фокус:

$$F\left(-; \frac{p}{2} 0\right).$$

$$F\left(-; \frac{6}{2} 0\right).$$

$$\boxed{F(-; 30)}.$$

Директриса:

$$x = \frac{p}{2}.$$

$$\boxed{x = 3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{p = 6, F(-; 30), x = 3;}$$

парабола відкрита ліворуч.

20. Парабола з віссю симетрії Oy

Якщо парабола має рівняння:

$$x^2 = 2py,$$

то її вісь симетрії збігається з віссю Oy .

При:

$$p > 0$$

гілки спрямовані вгору.

Фокус:

$$\boxed{F\left(0; \frac{p}{2}\right)}.$$

Директриса:

$$\boxed{y = -\frac{p}{2}}.$$

Якщо:

$$x^2 = -2py,$$

то гілки спрямовані вниз.

Фокус:

$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right).$$

Директриса:

$$y = \frac{p}{2}.$$

Приклад 6

Дослідити параболу:

$$x^2 = 16y.$$

Розв'язання

Порівнюємо з рівнянням:

$$x^2 = 2py.$$

Отже:

$$2p = 16.$$

$$p = 8.$$

Крок 1. Вершина

$$O(0; 0).$$

Крок 2. Вісь симетрії

$$Oy.$$

Крок 3. Напрямок гілок

Коефіцієнт при y додатний, тому парабола відкрита вгору.

Крок 4. Фокус

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right).$$

$$F\left(0; \frac{8}{2}\right).$$

$$F(0; 4).$$

Крок 5. Директриса

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Отже:

$$y = -4.$$

Перевірка

Відстань від вершини до фокуса:

4.

Відстань від вершини до директриси:

4.

Отже, результат правильний.

Відповідь:

$$p = 8, F(0; 4), y = -4;$$

парабола відкрита вгору.

Приклад 7

Дослідити параболу:

$$x^2 = -20y.$$

Розв'язання

Порівнюємо з рівнянням:

$$x^2 = -2py.$$

Отже:

$$2p = 20.$$

$$p = 10.$$

Вершина:

$$O(0; 0).$$

Вісь симетрії:

$$Oy.$$

Оскільки перед $2p$ стоїть знак «мінус», парабола відкрита вниз.

Фокус:

$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right).$$

$$F\left(0; -\frac{10}{2}\right).$$

$$F(0; -5).$$

Директриса:

$$y = \frac{p}{2}.$$

$$y = 5.$$

Відповідь:

$$p = 10, F(0; -5), y = 5;$$

парабола відкрита вниз.

21. Ексцентриситет параболи

У наданому Вами навчальному посібнику «Математика в технічному університеті» для параболи зазначено:

$$\varepsilon = 1.$$

Тому за значенням ексцентриситету можна порівняти три основні криві другого порядку:

для еліпса:

$$0 \leq \varepsilon < 1;$$

для параболи:

$$\varepsilon = 1;$$

для гіперболи:

$$\varepsilon > 1.$$

Для кола, як окремого випадку еліпса:

$$\varepsilon = 0.$$

22. Побудова параболи

Для побудови параболи необхідно:

1. привести рівняння до канонічного вигляду;
2. визначити вершину;
3. визначити вісь симетрії;
4. встановити напрям гілок;
5. визначити параметр p ;
6. знайти фокус;

7. записати рівняння директриси;
8. знайти декілька додаткових точок параболи;
9. побудувати криву з урахуванням її симетрії.

Приклад 8. Побудова параболи за точками

Побудувати параболу:

$$y^2 = 4x.$$

Розв'язання

Порівнюємо з канонічним рівнянням:

$$y^2 = 2px.$$

Отже:

$$2p = 4.$$

$$p = 2.$$

Фокус:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

$$\boxed{F(1; 0).}$$

Директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

$$\boxed{x = -1.}$$

Тепер знайдемо декілька точок.

Якщо $x = 0$

$$y^2 = 0.$$

$$y = 0.$$

Отримуємо вершину:

$$O(0; 0).$$

Якщо $x = 1$

$$y^2 = 4.$$

$$y = \pm 2.$$

Отримуємо точки:

$$(1; 2), (1; -2).$$

Якщо $x = 4$

$$y^2 = 16.$$

$$y = \pm 4.$$

Отримуємо точки:

$$(4; 4), (4; -4).$$

Отже, для побудови маємо точки:

$$(0; 0),$$

$$(1; 2), (1; -2),$$

$$(4; 4), (4; -4).$$

Парабола симетрична відносно осі Ox та відкрита праворуч.

Відповідь: вершина

$$O(0; 0),$$

фокус

$$F(1; 0),$$

директриса

$$x = -1.$$

23. Перевірка означення параболи на конкретній точці

Розглянемо параболу:

$$y^2 = 4x.$$

Ми вже визначили:

$$p = 2,$$

фокус:

$$F(1; 0),$$

директрису:

$$x = -1.$$

Візьмемо точку параболи:

$$M(1; 2).$$

Перевіримо геометричне означення параболи.

Крок 1. Знайдемо відстань від точки M до фокуса

$$MF = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 0)^2}.$$

$$MF = \sqrt{0 + 4}.$$

$$MF = 2.$$

Крок 2. Знайдемо відстань від точки $M(1; 2)$ до директриси $x = -1$

Відстань по горизонталі:

$$d = |1 - (-1)|.$$

$$d = 2.$$

Отже:

$$MF = d.$$

$$2 = 2.$$

Таким чином, точка $M(1; 2)$ дійсно задовольняє геометричне означення параболи.

24. Порівняння гіперболи та параболи

Гіпербола та парабола належать до кривих другого порядку, однак мають суттєво різні геометричні властивості.

Гіпербола складається з двох гілок, має центр симетрії, дві вершини, два фокуси та дві асимптоти.

Парабола має одну суцільну гілку, одну вершину, один фокус, одну директрису та одну вісь симетрії.

Для гіперболи:

$$\varepsilon > 1.$$

Для параболи:

$$\varepsilon = 1.$$

Гіпербола визначається через **модуль різниці відстаней до двох фокусів**.

Парабола визначається через **рівність відстаней до фокуса та директриси**.

25. Алгоритм дослідження параболи

Під час дослідження параболи доцільно використовувати таку послідовність.

Крок 1. Привести рівняння до канонічного вигляду.

Крок 2. Встановити, яка змінна знаходиться у квадраті.

- Крок 3.** Визначити вісь симетрії.
- Крок 4.** Встановити напрям гілок.
- Крок 5.** Визначити параметр p .
- Крок 6.** Знайти вершину.
- Крок 7.** Визначити координати фокуса.
- Крок 8.** Записати рівняння директриси.
- Крок 9.** Знайти декілька характерних точок.
- Крок 10.** Виконати графічну побудову.

26. Комплексний приклад дослідження гіперболи

Дослідити рівняння:

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

Розв'язання

Крок 1. Приведемо до канонічного вигляду

Поділимо рівняння на 36:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1.$$

Отже:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.}$$

Маємо гіперболу.

Крок 2. Визначимо півосі

$$a^2 = 9, b^2 = 4.$$

Отже:

$$a = 3, b = 2.$$

Крок 3. Визначимо вершини

$$\boxed{A_1(-; 3), A_2(3; 0).}$$

Крок 4. Знайдемо c

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$c^2 = 9 + 4 = 13.$$

$$c = \sqrt{13}.$$

Крок 5. Знайдемо фокуси

$$F_1(-; \sqrt{13}0), F_2(\sqrt{13}; 0).$$

Крок 6. Запишемо асимптоти

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Тому:

$$y = \pm \frac{2}{3}x.$$

Крок 7. Знайдемо ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Перевірка

Оскільки:

$$\sqrt{13} > 3,$$

то:

$$\frac{\sqrt{13}}{3} > 1.$$

Це відповідає властивості ексцентриситету гіперболи.

Відповідь:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$a = 3, b = 2, c = \sqrt{13};$$

$$A_1(-; 30), A_2(3; 0);$$

$$F_1(-; \sqrt{13}0), F_2(\sqrt{13}; 0);$$

$$y = \pm \frac{2}{3}x;$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

27. Комплексний приклад дослідження параболи

Дослідити рівняння:

$$3y^2 = 24x.$$

Розв'язання

Крок 1. Приведемо рівняння до канонічного вигляду

Поділимо обидві частини на 3:

$$y^2 = 8x.$$

Порівнюємо:

$$y^2 = 2px.$$

Отже:

$$2p = 8.$$

$$p = 4.$$

Крок 2. Визначимо вершину

$$\boxed{O(0; 0)}.$$

Крок 3. Визначимо вісь симетрії

Оскільки у квадраті знаходиться у:

$$\boxed{\text{вісь симетрії } Ox}.$$

Крок 4. Визначимо напрям гілок

У рівнянні:

$$y^2 = 8x$$

коефіцієнт при x додатний.

Отже, парабола відкрита праворуч.

Крок 5. Знайдемо фокус

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

$$F\left(\frac{4}{2}; 0\right).$$

$$\boxed{F(2; 0)}.$$

Крок 6. Запишемо директрису

$$x = -\frac{p}{2}.$$

$$\boxed{x = -2.}$$

Перевірка

Відстань від вершини до фокуса:

$$OF = 2.$$

Відстань від вершини до директриси також дорівнює 2.

Отже, характеристики визначені правильно.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = 8x;}$$

$$\boxed{p = 4;}$$

$$\boxed{O(0; 0);}$$

$$\boxed{F(2; 0);}$$

$$\boxed{x = -2;}$$

парабола відкрита праворуч.

28. Основні помилки під час розв'язування задач

Перша помилка — неправильне визначення дійсної осі гіперболи.

Для гіперболи потрібно дивитися, який квадрат входить у канонічне рівняння зі знаком «плюс».

Якщо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

дійсна вісь — Ox .

Якщо:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

дійсна вісь — Oy .

Друга помилка — використання формули еліпса для знаходження фокусів гіперболи.

Для гіперболи:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.}$$

Третя помилка — неправильне визначення асимптот.

Для гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

маємо:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Четверта помилка — плутання параметра p і фокусної відстані параболі.

У використаному навчальному джерелі для рівняння

$$y^2 = 2px$$

p — фокальний параметр, а відстань від вершини до фокуса:

$$\frac{p}{2}.$$

П'ята помилка — неправильне визначення напрямку параболі.

Необхідно враховувати не тільки змінну, яка знаходиться у квадраті, а й знак правої частини.

Шоста помилка — неправильне визначення директриси.

Для:

$$y^2 = 2px$$

директриса:

$$x = -\frac{p}{2},$$

а для:

$$x^2 = 2py$$

директриса:

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Сьома помилка — відсутність перевірки отриманих параметрів.

Для гіперболи доцільно перевірити:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

та

$$\varepsilon > 1.$$

Для параболи можна перевірити рівність відстаней від обраної точки кривої до фокуса та директриси.

29. Практичне значення гіперболи та параболи

У робочій програмі дисципліни практичне спрямування теми кривих другого порядку пов'язане з використанням їх рівнянь для опису **геометричних форм, траєкторій і технічних залежностей**, які виникають під час проєктування та аналізу конструктивних елементів.

Аналітичне рівняння дозволяє перейти від графічного зображення геометричного об'єкта до його точної математичної моделі.

За рівнянням можна визначити характерні точки та параметри кривої, встановити її розташування відносно координатних осей і виконати графічну побудову.

Саме тому після цієї лекції робочою програмою передбачене окреме практичне заняття № 9 «**Криві другого порядку: гіпербола, парабола**».

6. Закріплення вивченого матеріалу

Під час закріплення необхідно повторити геометричне означення гіперболи; канонічне рівняння гіперболи; поняття дійсної та уявної півосей; вершини; фокуси; співвідношення між a , b і c ; асимптоти; ексцентриситет; геометричне означення параболи; канонічні рівняння параболи; поняття вершини, осі симетрії, фокуса, директриси та фокального параметра; визначення напрямку гілок; алгоритми дослідження і побудови гіперболи та параболи.

Питання для закріплення

1. Які криві належать до кривих другого порядку?
2. Що називається гіперболою?
3. Які точки називаються фокусами гіперболи?
4. Яка величина є сталою для точок гіперболи?
5. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи з дійсною віссю Ox ?
6. Що називається дійсною піввіссю гіперболи?

7. Що називається уявною піввіссю гіперболи?
8. Які координати мають вершини гіперболи з дійсною віссю Ox ?
9. За якою формулою визначається c для гіперболи?
10. Які координати мають фокуси гіперболи?
11. Чому дорівнює відстань між фокусами?
12. Що називається асимптотою гіперболи?
13. Які рівняння мають асимптоти гіперболи з дійсною віссю Ox ?
14. Як визначається ексцентриситет гіперболи?
15. Яку умову задовольняє ексцентриситет гіперболи?
16. Як визначити напрям гілок гіперболи за її рівнянням?
17. Як привести рівняння гіперболи до канонічного вигляду?
18. Як виконати побудову гіперболи?
19. Для чого під час побудови використовують допоміжний прямокутник?
20. Що називається параболою?
21. Що називається фокусом параболі?
22. Що називається директрисою параболі?
23. Яку основну властивість мають усі точки параболі?
24. Який вигляд має канонічне рівняння параболі з віссю Ox ?
25. Що називається фокальним параметром?
26. Чому дорівнює відстань від вершини до фокуса для рівняння $y^2 = 2px$?
27. Де розташований фокус параболі $y^2 = 2px$?
28. Яке рівняння має її директриса?
29. У який бік відкрита парабола $y^2 = 2px$?
30. У який бік відкрита парабола $y^2 = -2px$?
31. У який бік відкрита парабола $x^2 = 2py$?
32. У який бік відкрита парабола $x^2 = -2py$?
33. Який ексцентриситет має парабола?
34. Чим геометричне означення параболі відрізняється від означення гіперболи?
35. Скільки фокусів має гіпербола?

36. Скільки фокусів має парабола?
37. Скільки асимптот має канонічна гіпербола?
38. Як перевірити правильність знайдених параметрів гіперболи?
39. Як перевірити геометричне означення параболи для конкретної точки?
40. Яке практичне значення мають рівняння гіперболи та параболи?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції **«Криві другого порядку: гіпербола, парабола»**.

Повторити геометричне означення гіперболи; канонічні рівняння гіперболи; дійсну та уявну півосі; вершини; фокуси; співвідношення

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

асимптоти; ексцентриситет гіперболи; геометричне означення параболи; канонічні рівняння параболи; вершину; вісь симетрії; фокус; директрису; фокальний параметр; напрями розташування гілок параболи.

Самостійно повторити розв'язання всіх наведених у лекції прикладів, звертаючи особливу увагу на правильне приведення рівнянь до канонічного вигляду та перевірку отриманих результатів.

Відповідно до робочої програми після лекції передбачено практичне заняття № 9 з дослідження гіперболи або параболи: необхідно привести задане рівняння до канонічного вигляду, визначити основні параметри кривої, вершини, фокуси та інші характерні точки, для гіперболи визначити асимптоти та виконати графічну побудову. Це є безпосереднім продовженням матеріалу цієї лекції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У посібнику розглянуто криві другого порядку та наведено завдання для самоконтролю з еліпса, гіперболи і параболи.
2. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. У наданому

виданні наведено канонічні рівняння та основні геометричні характеристики параболи і гіперболи, зокрема фокус, директрису і фокальний параметр параболи.

3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
4. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Робочою програмою окремо передбачено **Лекцію 9 «Криві другого порядку: гіпербола, парабола»** та відповідне практичне заняття.

Лекція 10

ТЕМА: Границя функції та її обчислення

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття границі функції в точці та на нескінченності; навчити правильно записувати та читати границю функції; розкрити геометричний зміст поняття границі; ознайомити з односторонніми границями, нескінченно малими та нескінченно великими функціями; сформувати вміння застосовувати основні властивості границь під час обчислень; навчити знаходити границі безпосередньою підстановкою та розкривати основні невизначеності шляхом алгебраїчних перетворень; ознайомити з першою та другою важливими границями та сформувати початкові навички їх застосування; розвивати логічне, аналітичне та математичне мислення, необхідне для подальшого вивчення похідної та інших розділів вищої математики.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до теми, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

Тема відповідає робочій програмі дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт»: після завершення змістового модуля з аналітичної геометрії розпочинається змістовий модуль 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної», першою темою якого є **Лекція 10 «Границя функції та її обчислення»**. Після лекції передбачено практичне заняття «Обчислення границь функцій».

Основним теоретичним джерелом для викладу є наданий Вами курс лекцій О. І. Кушлик-Дивульської та Т. В. Авдєєвої. У ньому тема границь охоплює границю функції в точці, нескінченно малі та нескінченно великі функції, границю функції при $x \rightarrow \infty$, першу та другу важливі границі.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.
5. Вивчення нового матеріалу:
 1. Поняття функції та аргументу.

2. Поняття границі функції в точці.
3. Геометричний зміст границі функції.
4. Односторонні границі.
5. Границя функції на нескінченності.
6. Нескінченно малі функції.
7. Нескінченно великі функції.
8. Основні властивості границь.
9. Безпосереднє обчислення границь.
10. Поняття невизначеності.
11. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.
12. Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.
13. Перша важлива границя.
14. Друга важлива границя.
15. Приклади обчислення границь.

Навчальні матеріали лекції

1. Мотивація вивчення теми

Поняття границі є одним із фундаментальних понять математичного аналізу. Без нього неможливо послідовно перейти до вивчення похідної, диференціала, дослідження функцій та інтегрального числення.

У технічних задачах часто необхідно визначити не лише значення певної величини в конкретний момент, а й те, до якого значення вона наближається в процесі зміни параметра.

Наприклад, швидкість автомобіля може наближатися до певного встановленого значення; температура двигуна після запуску змінюється і поступово наближається до робочої температури; значення технічного параметра може наближатися до гранично допустимого значення.

Саме математичний апарат границь дозволяє описувати подібні процеси.

2. Повторення поняття функції

Перед вивченням границі необхідно пригадати поняття функції.

Якщо кожному значенню незалежної змінної x з деякої множини за певним правилом ставиться у відповідність єдине значення змінної y , то кажуть, що y є **функцією від x** .

Записують:

$$y = f(x).$$

Змінна x називається **незалежною змінною**, або **аргументом**.

Змінна y називається **залежною змінною**, або **значенням функції**.

3. Поняття границі функції в точці

Розглянемо функцію:

$$y = f(x).$$

Нехай аргумент x наближається до деякого числа a .

Якщо при цьому значення функції $f(x)$ необмежено наближаються до певного числа A , то число A називається **границею функції $f(x)$ при x , що прямує до a** .

Записують:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Читається:

«Границя функції $f(x)$ при x , що прямує до a , дорівнює A ».

Це поняття становить основу теми про границю функції в точці в наданому Вами курсі лекцій.

Важливо розуміти: нас цікавить поведінка функції **поблизу точки a** , а не тільки безпосередньо в самій точці.

4. Геометричний зміст границі

Нехай:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Це означає, що коли значення x наближаються до a , відповідні точки графіка функції наближаються до рівня:

$$y = A.$$

Наприклад:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5.$$

Якщо x наближається до 2, то:

$$x + 3$$

наближається до:

$$2 + 3 = 5.$$

Приклад 1

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1).$$

Розв'язання

Функція:

$$f(x) = 3x + 1$$

визначена в точці $x = 2$.

Тому границю можна знайти безпосередньою підстановкою.

Крок 1. Підставимо $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 3 \cdot 2 + 1.$$

Крок 2. Виконаємо обчислення

$$3 \cdot 2 = 6.$$

$$6 + 1 = 7.$$

Отже:

$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7.$
--

Перевірка

Якщо x набуває значень, близьких до 2, наприклад 1,99 або 2,01, значення $3x + 1$ будуть близькими до 7.

Відповідь:

5. Односторонні границі

До точки a аргумент може наближатися зліва або справа.

Якщо:

$$x < a$$

і x наближається до a , говорять про **лівосторонню границю**.

Записують:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x).$$

Якщо:

$$x > a$$

і x наближається до a , говорять про **правосторонню границю**.

Записують:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

Скінченна границя функції в точці існує тоді, коли ліва та права границі існують і дорівнюють одна одній.

Тобто:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A.$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Приклад 2

Розглянемо функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти односторонні границі при $x \rightarrow 2$.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо лівосторонню границю

При:

$$x < 2$$

функція дорівнює:

$$f(x) = 1.$$

Тому:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1.}$$

Крок 2. Знайдемо правосторонню границю

При:

$$x > 2$$

маємо:

$$f(x) = 3.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 3.}$$

Крок 3. Порівняємо односторонні границі

$$1 \neq 3.$$

Тому загальної границі при $x \rightarrow 2$ не існує.

Відповідь:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 3;}$$

границя функції при $x \rightarrow 2$ не існує.

6. Границя функції на нескінченності

Аргумент може не тільки наближатися до певного числа, а й необмежено зростати або зменшуватися.

Записи:

$$x \rightarrow +\infty$$

та

$$x \rightarrow -\infty$$

означають відповідно необмежене збільшення і необмежене зменшення значень аргументу.

Якщо при необмеженому збільшенні x функція $f(x)$ наближається до числа A , записують:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

Аналогічно:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

Границя функції при $x \rightarrow \infty$ окремо розглядається у наданому Вами курсі лекцій перед важливими границями.

Приклад 3

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}.$$

Розв'язання

Розглянемо декілька значень аргументу.

Якщо:

$$x = 10,$$

то:

$$\frac{1}{x} = 0,1.$$

Якщо:

$$x = 100,$$

то:

$$\frac{1}{x} = 0,01.$$

Якщо:

$$x = 1000,$$

то:

$$\frac{1}{x} = 0,001.$$

Чим більшим стає x , тим ближчим до нуля стає значення функції.

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Відповідь:

$$0.$$

7. Нескінченно мала функція

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою при $x \rightarrow a$** , якщо її границя дорівнює нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Наприклад:

$$\alpha(x) = x - 3$$

є нескінченно малою функцією при:

$$x \rightarrow 3,$$

оскільки:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0.$$

Нескінченно малі та нескінченно великі функції окремо виділені у структурі наданого Вами курсу лекцій.

8. Нескінченно велика функція

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою при $x \rightarrow a$** , якщо її абсолютне значення необмежено збільшується.

Наприклад:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

при:

$$x \rightarrow 0$$

необмежено зростає.

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Символ ∞ не означає звичайне дійсне число. Він характеризує необмежене зростання величини.

9. Основні властивості границь

Нехай існують скінченні границі:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

та

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B.$$

Тоді можна використовувати такі правила.

Границя суми

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B.$$

Границя різниці

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = A - B.$$

Границя добутку

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB.$$

Границя сталого множника

Якщо C — стала величина, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Границя частки

Якщо:

$$B \neq 0,$$

то:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

10. Безпосередня підстановка

Найпростіший спосіб знаходження границі — **безпосередня підстановка**.

Спочатку в заданий вираз підставляють граничне значення аргументу.

Якщо отримано конкретне число і математична дія має зміст, це число є шуканою границею.

Приклад 4

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 4).$$

Розв'язання

Крок 1. Підставимо $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 4) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 4.$$

Крок 2. Виконаємо обчислення

$$3^2 = 9.$$

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Тому:

$$9 - 6 + 4 = 7.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 4) = 7.}$$

Відповідь:

$$\boxed{7.}$$

Приклад 5

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо знаменник

Підставляємо:

$$x = 2.$$

Знаменник:

$$2 + 1 = 3.$$

Оскільки:

$$3 \neq 0,$$

можна виконати безпосередню підстановку.

Крок 2. Обчислимо чисельник

$$2^2 + 3 \cdot 2 - 1.$$

$$4 + 6 - 1 = 9.$$

Крок 3. Обчислимо границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} = \frac{9}{3}.$$

3.

Відповідь:

3.

11. Поняття невизначеності

Безпосередня підстановка не завжди дає готову відповідь.

Наприклад, нехай потрібно знайти:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Якщо безпосередньо підставити $x = 2$, отримаємо:

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}.$$

Вираз:

$$\frac{0}{0}$$

називається **невизначеністю виду нуль, поділений на нуль**.

Це не означає, що границя дорівнює нулю.

Також це не означає, що границі обов'язково не існує.

Необхідно перетворити вираз і розкрити невизначеність.

12. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ шляхом розкладання на множники

Приклад 6

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Розв'язання

Крок 1. Виконаємо безпосередню підстановку

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність.

Крок 2. Розкладемо чисельник на множники

Використовуємо формулу різниці квадратів:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}.$$

Крок 3. Скоротимо спільний множник

При:

$$x \neq 2$$

маємо:

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2).$$

Крок 4. Виконаємо підстановку

$$2 + 2 = 4.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.}$$

Перевірка

Після алгебраїчного перетворення невизначеність зникла, і безпосередня підстановка дала число 4.

Відповідь:

$$\boxed{4.}$$

Приклад 7

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Розв'язання

Крок 1. Підставимо $x = 3$

$$\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність.

Крок 2. Розкладемо чисельник

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}.$$

Крок 3. Скоротимо

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3).$$

Крок 4. Підставимо $x = 3$

$$3 + 3 = 6.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.}$$

Відповідь:

$$\boxed{6.}$$

13. Розкриття невизначеності за допомогою спряженого виразу

Якщо у виразі містяться квадратні корені, для розкриття невизначеності виду:

$$\frac{0}{0}$$

часто застосовують множення чисельника і знаменника на спряжений вираз.

Приклад 8

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Розв'язання

Крок 1. Виконаємо безпосередню підстановку

$$\frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність.

Крок 2. Помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз

Спряженим до:

$$\sqrt{x} - 2$$

є:

$$\sqrt{x} + 2.$$

Тому:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}.$$

Одержуємо:

$$\frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}.$$

Крок 3. Використаємо різницю квадратів

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4.$$

Тому:

$$\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}.$$

Скорочуємо:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Крок 4. Обчислюємо границю

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2}.$$

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

14. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$

Під час знаходження границь раціональних функцій при:

$$x \rightarrow \infty$$

може виникати невизначеність виду:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}.$$

У такому випадку чисельник і знаменник доцільно поділити на найбільший степінь x , який міститься у знаменнику або є найвищим степенем у відповідному виразі.

Приклад 9

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4}.$$

Розв'язання

При $x \rightarrow \infty$ чисельник і знаменник необмежено зростають.

Маємо невизначеність:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Крок 1. Визначимо найбільший степінь

Найвищий степінь:

$$x^2.$$

Крок 2. Поділимо чисельник і знаменник на x^2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}}.$$

Крок 3. Знайдемо границі дробів

При:

$$x \rightarrow \infty$$

маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{x^2} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тому:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{x^2} &\rightarrow 0, \\ \frac{4}{x^2} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Крок 4. Обчислимо границю

$$\frac{3 + 0 - 0}{1 + 0} = 3.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4} = 3.}$$

Відповідь:

$$\boxed{3.}$$

Приклад 10

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{2x - 1}.$$

Розв'язання

Крок 1. Поділимо чисельник і знаменник на x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}}.$$

Крок 2. Використаємо властивість

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Отже:

$$\frac{5 + 0}{2 - 0} = \frac{5}{2}.$$

Тому:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{2x - 1} = \frac{5}{2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{5}{2}.$$

15. Перша важлива границя

У курсі математичного аналізу особливе значення має **перша важлива границя**.

Вона має вигляд:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Тут значення аргументу x вимірюється в радіанах.

Перша важлива границя окремо розглядається у наданому Вами курсі лекцій у підрозділі «Важливі границі».

Ця формула широко використовується під час знаходження границь тригонометричних функцій.

Приклад 11

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Розв'язання

Перша важлива границя має вигляд:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

У нашому прикладі під знаком синуса знаходиться $5x$.

Тому необхідно утворити у знаменнику такий самий вираз.

Крок 1. Перетворимо дріб

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5 \frac{\sin 5x}{5x}.$$

Крок 2. Знайдемо границю

При:

$$x \rightarrow 0$$

маємо:

$$5x \rightarrow 0.$$

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1.$$

5.

Відповідь:

5.

Приклад 12

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}.$$

Розв'язання

Необхідно утворити вираз:

$$\frac{\sin 3x}{3x}.$$

Перетворимо:

$$\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x}.$$

При:

$$x \rightarrow 0$$

маємо:

$$3x \rightarrow 0.$$

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \cdot 1.$$

$\frac{3}{2}.$

Відповідь:

$\frac{3}{2}.$

16. Друга важлива границя

Друга важлива границя має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

де:

$$e \approx 2,71828.$$

Число e є основою натуральних логарифмів.

Також використовується рівносильна форма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Друга важлива границя також окремо представлена у структурі наданого Вами курсу лекцій.

Приклад 13

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Розв'язання

Маємо безпосередньо другу важливу границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Відповідь:

$$e.$$

17. Загальний алгоритм обчислення границі

Під час обчислення границі рекомендується дотримуватися певної послідовності.

Крок 1. Визначити, до якого значення прямує аргумент.

Крок 2. Спробувати виконати безпосередню підстановку.

Крок 3. Якщо отримано конкретне число, записати відповідь.

Крок 4. Якщо отримано невизначеність, визначити її вид.

Наприклад:

$$\frac{0}{0}$$

або:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Крок 5. Вибрати відповідний спосіб перетворення:

- розкладання на множники;
- скорочення спільного множника;
- множення на спряжений вираз;
- ділення чисельника і знаменника на найбільший степінь аргументу;
- використання першої важливої границі;
- використання другої важливої границі.

Крок 6. Після перетворення повторно обчислити границю.

Крок 7. Записати остаточну відповідь.

18. Узагальнювальний приклад

Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

Розв'язання

Крок 1. Виконаємо безпосередню підстановку

Чисельник:

$$1^2 + 1 - 2 = 0.$$

Знаменник:

$$1 - 1 = 0.$$

Отримали:

$$\frac{0}{0}.$$

Крок 2. Розкладемо чисельник на множники

Необхідно розкласти:

$$x^2 + x - 2.$$

Маємо:

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}.$$

Крок 3. Скоротимо спільний множник

При:

$$x \neq 1$$

отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+2).$$

Крок 4. Виконаємо підстановку

$$1+2=3.$$

Отже:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3.}$$

Відповідь:

$$\boxed{3.}$$

19. Типові помилки під час обчислення границь

Перша помилка — вважати невизначеність $\frac{0}{0}$ відповіддю.

Запис:

$$\frac{0}{0}$$

не є значенням границі. Він указує на необхідність подальших перетворень.

Друга помилка — скорочувати доданки.

Скорочувати можна лише спільні **множники**, а не окремі доданки чисельника і знаменника.

Третя помилка — підставляти значення аргументу до завершення перетворення.

Якщо отримано невизначеність, спочатку необхідно виконати математичні перетворення, а потім повторити підстановку.

Четверта помилка — неправильне застосування першої важливої границі.

У чисельнику і знаменнику необхідно сформувати однаковий аргумент:

$$\frac{\sin t}{t}.$$

П'ята помилка — сприймати символ ∞ як звичайне число.

Нескінченність характеризує необмежену зміну величини і не є звичайним дійсним числом.

Шоста помилка — не визначати вид невизначеності перед початком перетворень.

Правильне визначення виду невизначеності допомагає вибрати правильний метод розв'язання.

20. Практичне значення поняття границі

Поняття границі використовується для математичного опису процесів, у яких певна величина поступово наближається до встановленого значення.

Для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт» математичний апарат границь є підґрунтям для подальшого вивчення швидкості зміни величин, похідної, дослідження функціональних залежностей та математичного опису технічних процесів.

Наприклад, залежність температури двигуна від часу можна подати функцією:

$$T = T(t).$$

Після запуску двигуна температура змінюється і за певних умов наближається до встановленого робочого значення $T_{\text{роб}}$.

Математично таку ідеалізовану поведінку можна описати записом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_{\text{роб}}.$$

Такий запис означає: зі збільшенням часу значення температури наближається до певного встановленого рівня.

Це ілюстративний приклад застосування математичного поняття границі до технічного процесу; конкретна модель температурного режиму залежить від фізичних умов роботи системи.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що називається функцією?
2. Що називається аргументом функції?
3. Що називається границею функції в точці?
4. Як записується границя функції при $x \rightarrow a$?
5. Як читається запис $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
6. У чому полягає геометричний зміст границі?
7. Чи обов'язково для існування границі функція повинна бути визначена безпосередньо в точці a ?
8. Що називається лівосторонньою границею?
9. Як позначається лівостороння границя?
10. Що називається правосторонньою границею?
11. Як позначається правостороння границя?
12. За якої умови існує двостороння границя функції?
13. Що означає запис $x \rightarrow +\infty$?
14. Що означає запис $x \rightarrow -\infty$?
15. Що називається нескінченно малою функцією?
16. Яку границю має нескінченно мала функція?
17. Що називається нескінченно великою функцією?
18. Чи є символ ∞ звичайним числом?
19. Чому дорівнює границя суми двох функцій?
20. Чому дорівнює границя добутку двох функцій?
21. За якої умови можна застосувати правило знаходження границі частки?
22. У яких випадках границю можна знайти безпосередньою підстановкою?
23. Що називається невизначеністю?
24. Що означає невизначеність виду $\frac{0}{0}$?
25. Чи можна вважати $\frac{0}{0}$ відповіддю?

26. Як розкривають невизначеність $\frac{0}{0}$, якщо чисельник можна розкласти на множники?
27. Для чого використовується спряжений вираз?
28. Коли виникає невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$?
29. Як знаходять границю відношення многочленів при $x \rightarrow \infty$?
30. Сформулюйте першу важливу границю.
31. У яких одиницях повинен вимірюватися аргумент тригонометричної функції під час застосування першої важливої границі?
32. Як застосувати першу важливу границю до виразу $\frac{\sin 5x}{x}$?
33. Сформулюйте другу важливу границю.
34. Яке число позначається літерою e ?
35. Яке наближене значення має число e ?
36. Які основні способи розкриття невизначеностей розглянуто в лекції?
37. Яка послідовність дій використовується під час знаходження границі?
38. Чому поняття границі є важливим для подальшого вивчення похідної?
39. Як за допомогою границі можна описати наближення технічного параметра до встановленого значення?
40. Які типові помилки виникають під час обчислення границь?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Границя функції та її обчислення».

Повторити:

- поняття границі функції в точці;
- односторонні границі;
- границю функції на нескінченності;
- нескінченно малі та нескінченно великі функції;
- основні властивості границь;
- безпосередню підстановку;
- невизначеність виду $\frac{0}{0}$;

- розкладання на множники під час обчислення границь;
- використання спряженого виразу;
- невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;
- першу важливу границю;
- другу важливу границю.

Самостійно повторити розв'язання всіх прикладів лекції та підготуватися до практичного заняття **«Обчислення границь функцій»**, яке відповідно до робочої програми проводиться після Лекції 10.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У структурі посібника окремо розглянуто функцію і границю функції в точці, нескінченно малі та нескінченно великі функції, границю при $x \rightarrow \infty$, першу і другу важливі границі.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2 / за редакцією О. І. Клесова.* Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Робочою програмою передбачено Лекцію 10 **«Границя функції та її обчислення»** та наступне практичне заняття **«Обчислення границь функцій»**.

Лекція 11

ТЕМА: Похідна. Правила диференціювання

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти цілісне уявлення про похідну функції як одну з основних характеристик швидкості зміни величини; пояснити зв'язок поняття похідної з раніше вивченим поняттям границі функції; сформувати вміння знаходити приріст аргументу та приріст функції; розкрити означення похідної через границю відношення приросту функції до приросту аргументу; пояснити геометричний та механічний зміст похідної; ознайомити з основними позначеннями похідної; розглянути правила диференціювання сталої величини, суми, різниці, добутку та частки функцій; систематизувати основні формули диференціювання елементарних функцій; сформувати навички знаходження похідних степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій та їх комбінацій; показати значення похідної для опису швидкості зміни фізичних і технічних величин, зокрема величин, що характеризують рух автомобіля; розвивати математичне, логічне та аналітичне мислення.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти до теми, навчальні посібники з вищої математики, таблиця похідних основних елементарних функцій, мультимедійні засоби.

Матеріал лекції побудовано насамперед за наданим Вами курсом лекцій О. І. Кушлик-Дивульської та Т. В. Авдєєвої. У ньому розділ про похідну послідовно охоплює поняття похідної та її геометричний зміст, зв'язок неперервності й диференційованості, правила диференціювання, похідні основних елементарних функцій, диференціювання складеної функції та таблицю похідних із прикладами застосування формул.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.
5. Вивчення нового матеріалу:
 1. Поняття приросту аргументу.
 2. Поняття приросту функції.

3. Означення похідної функції.
4. Позначення похідної.
5. Алгоритм знаходження похідної за означенням.
6. Геометричний зміст похідної.
7. Механічний зміст похідної.
8. Зв'язок між диференційованістю і неперервністю функції.
9. Основні правила диференціювання.
10. Похідна сталої величини.
11. Похідна степеневої функції.
12. Похідна суми та різниці функцій.
13. Похідна добутку функцій.
14. Похідна частки функцій.
15. Похідні основних елементарних функцій.
16. Початкове поняття про похідну складеної функції.
17. Приклади знаходження похідних.
18. Застосування похідної до опису руху та технічних процесів.

Навчальні матеріали лекції

1. Мотивація вивчення похідної

У попередній лекції було розглянуто поняття границі функції. Саме границя дає математичну основу для введення нового надзвичайно важливого поняття — **похідної функції**.

Під час вивчення технічних процесів недостатньо знати тільки значення певної величини. Часто значно важливіше встановити, **наскільки швидко ця величина змінюється**.

Наприклад, автомобіль рухається дорогою. У певний момент його координата становить одне значення, через деякий час — інше. Але для аналізу руху необхідно знати не тільки положення автомобіля, а й швидкість, з якою змінюється це положення.

Так само температура двигуна залежить від часу. Тиск у технічній системі може змінюватися в процесі її роботи. Частота обертання колінчастого вала

змінюється під час розгону або уповільнення. Витрата палива може залежати від швидкості руху, навантаження, режиму роботи двигуна та інших параметрів.

У всіх таких випадках виникає спільне математичне питання:

як визначити швидкість зміни однієї величини відносно іншої?

Відповідь на це питання дає похідна.

Отже, похідна — це не просто математична формула. Вона є засобом кількісного опису того, **як змінюється функція при зміні її аргументу**.

2. Приріст аргументу

Нехай задано функцію:

$$y = f(x).$$

Візьмемо деяке початкове значення аргументу x .

Нехай аргумент змінився і набув нового значення:

$$x + \Delta x.$$

Величина:

$$\boxed{\Delta x}$$

називається **приростом аргументу**.

Таким чином, нове значення аргументу можна записати як:

$$\boxed{x + \Delta x.}$$

Приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним.

Якщо:

$$\Delta x > 0,$$

аргумент збільшується.

Якщо:

$$\Delta x < 0,$$

аргумент зменшується.

Якщо:

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

нове значення аргументу $x + \Delta x$ необмежено наближається до початкового значення x .

Саме така ситуація використовується під час визначення похідної.

3. Приріст функції

Початковому значенню аргументу відповідає значення функції:

$$y = f(x).$$

Новому значенню аргументу:

$$x + \Delta x$$

відповідає нове значення функції:

$$f(x + \Delta x).$$

Різниця між новим і початковим значеннями функції називається **приростом функції**.

Отже:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Саме так приріст функції вводиться в наданому Вами курсі лекцій: аргументу надається приріст Δx , після чого приріст функції визначається як різниця нового та початкового значень функції.

Приклад 1

Для функції

$$y = x^2$$

знайти приріст функції, якщо аргумент змінюється від x до $x + \Delta x$.

Розв'язання

Крок 1. Запишемо початкове значення функції

$$f(x) = x^2.$$

Крок 2. Знайдемо нове значення функції

Замість x підставляємо:

$$x + \Delta x.$$

Отримуємо:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

Розкриємо квадрат суми:

$$f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Крок 3. Знайдемо приріст функції

За означенням:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Тому:

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2.$$

Скорочуємо:

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Винесемо Δx за дужки:

$$\Delta y = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Відповідь:

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

4. Відношення приросту функції до приросту аргументу

Розглянемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Воно показує, наскільки в середньому змінюється значення функції при зміні аргументу на Δx .

Для попереднього прикладу:

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тому:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

При:

$$\Delta x \neq 0$$

скорочуємо на Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Тепер будемо зменшувати приріст аргументу.

Якщо:

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

то:

$$2x + \Delta x \rightarrow 2x.$$

Саме цей граничний перехід приводить нас до поняття похідної.

5. Означення похідної

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, за умови, що ця границя існує.

Це означення безпосередньо відповідає означенню, наведеному в курсі лекцій О. І. Кушлик-Дивульської та Т. В. Авдєєвої.

Математично:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оскільки:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

означення можна записати коротше:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отже, похідна характеризує **граничну швидкість зміни функції відносно її аргументу.**

6. Позначення похідної

Для функції:

$$y = f(x)$$

похідну можна позначати різними способами:

$$y'$$

$$f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\frac{df}{dx}}.$$

Такі позначення похідної наведено і в основному навчальному джерелі.

Наприклад, якщо:

$$y = x^2,$$

то:

$$y' = 2x.$$

Або:

$$f'(x) = 2x.$$

7. Алгоритм знаходження похідної за означенням

Щоб знайти похідну функції за означенням, необхідно послідовно виконати такі дії.

Крок 1. Записати початкову функцію:

$$y = f(x).$$

Крок 2. Надати аргументу приріст:

$$x + \Delta x.$$

Крок 3. Знайти:

$$f(x + \Delta x).$$

Крок 4. Обчислити приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Крок 5. Скласти відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Крок 6. Виконати необхідні алгебраїчні перетворення.

Крок 7. Знайти границю при:

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

Отриманий результат є похідною функції.

Приклад 2. Знаходження похідної за означенням

Знайти похідну функції:

$$y = x^2.$$

Розв'язання

Крок 1. Запишемо функцію

$$f(x) = x^2.$$

Крок 2. Знайдемо значення функції при $x + \Delta x$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

Розкриваємо дужки:

$$f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Крок 3. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Тому:

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2.$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Крок 4. Поділимо приріст функції на приріст аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

При:

$$\Delta x \neq 0$$

скорочуємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Крок 5. Перейдемо до границі

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x).$$

Оскільки:

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

одержуємо:

$$y' = 2x.$$

Отже:

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Перевірка

За таблицею похідних:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Для:

$$n = 2$$

отримуємо:

$$(x^2)' = 2x.$$

Результати збігаються.

Відповідь:

$$\boxed{y' = 2x.}$$

8. Геометричний зміст похідної

Похідна має важливий геометричний зміст.

Розглянемо графік функції:

$$y = f(x).$$

На графіку візьмемо точку:

$$M(x; f(x)).$$

Проведемо до графіка функції в цій точці дотичну.

Похідна функції в точці дорівнює **кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці**.

Тобто:

$$\boxed{f'(x) = \tan \alpha,}$$

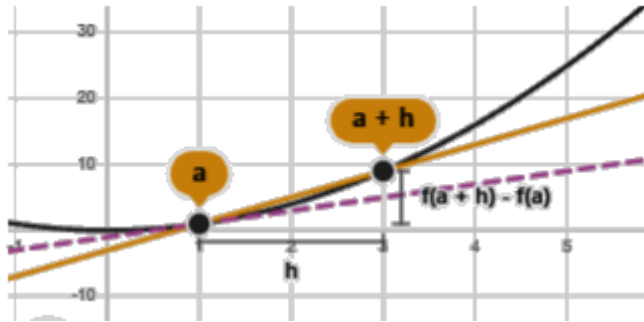
де α — кут нахилу дотичної до додатного напрямку осі абсцис.

Цей геометричний зміст похідної є окремим елементом викладу в наданому Вами курсі лекцій.

Щоб побачити, як січна при зменшенні приросту аргументу переходить у дотичну, корисно розглянути цей процес графічно.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\frac{f(1+2) - f(1)}{2} = 4 \text{ похибка} = 2$$



Якщо:

$$f'(x) > 0,$$

кутовий коефіцієнт дотичної додатний.

Якщо:

$$f'(x) < 0,$$

кутовий коефіцієнт дотичної від'ємний.

Якщо:

$$f'(x) = 0,$$

дотична в цій точці паралельна осі абсцис.

Надалі ця властивість буде використовуватися під час дослідження функцій.

9. Механічний зміст похідної

Особливо важливим для технічних спеціальностей є механічний зміст похідної.

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а її координата залежить від часу:

$$s = s(t).$$

За проміжок часу:

$$\Delta t$$

точка проходить шлях:

$$\Delta s.$$

Відношення:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

характеризує середню швидкість руху за цей проміжок часу.

Щоб знайти швидкість у конкретний момент часу, необхідно зменшувати проміжок Δt .

При:

$$\Delta t \rightarrow 0$$

отримуємо миттєву швидкість:

$$v(t) = s'(t).$$

Отже, похідна координати або шляху за часом характеризує миттєву швидкість руху.

Якщо швидкість також є функцією часу:

$$v = v(t),$$

то швидкість зміни швидкості характеризується прискоренням:

$$a(t) = v'(t).$$

Ці співвідношення пояснюють важливість похідної для спеціальності «Автомобільний транспорт».

Приклад 3. Застосування похідної до руху автомобіля

Нехай шлях автомобіля задається функцією:

$$s(t) = 5t^2 + 10t,$$

де s — шлях, а t — час.

Знайти швидкість автомобіля як функцію часу та її значення при:

$$t = 3.$$

Розв'язання

Крок 1. Запишемо закон руху

$$s(t) = 5t^2 + 10t.$$

Крок 2. Знайдемо похідну

Швидкість:

$$v(t) = s'(t).$$

Диференціюємо:

$$v(t) = (5t^2 + 10t)'.$$

Використовуємо правила диференціювання:

$$(5t^2)' = 10t,$$

$$(10t)' = 10.$$

Тому:

$$v(t) = 10t + 10.$$

Крок 3. Знайдемо швидкість при $t = 3$

$$v(3) = 10 \cdot 3 + 10.$$

$$v(3) = 30 + 10.$$

$$v(3) = 40.$$

Відповідь:

$$v(t) = 10t + 10;$$

при $t = 3$:

$$v(3) = 40.$$

Одиниці вимірювання швидкості визначаються одиницями, у яких у конкретній задачі задані шлях і час.

10. Диференціювання функції

Процес знаходження похідної функції називається **диференціюванням**.

Якщо задано:

$$y = f(x),$$

то виконати диференціювання означає знайти:

$$y' = f'(x).$$

На початковому етапі похідну можна знаходити безпосередньо за означенням. Проте для складніших функцій такий спосіб стає громіздким.

Тому використовують **таблицю похідних та правила диференціювання**.

Саме правила диференціювання та похідні основних елементарних функцій становлять окремий підрозділ наданого Вами курсу лекцій.

11. Похідна сталої величини

Якщо:

$$y = C,$$

де C — стала величина, то:

$$\boxed{C' = 0.}$$

Це легко пояснити.

Стала величина при зміні аргументу не змінюється. Отже, її приріст дорівнює нулю.

Наприклад:

$$(7)' = 0,$$

$$(-12)' = 0,$$

$$(\pi)' = 0.$$

Приклад 4

Знайти похідну:

$$y = 15.$$

Розв'язання

Функція є сталою.

Використовуємо правило:

$$C' = 0.$$

Тому:

$$\boxed{y' = 0.}$$

Відповідь:

$$\boxed{0.}$$

12. Похідна степеневої функції

Для степеневої функції:

$$y = x^n$$

використовується формула:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Це одна з основних формул таблиці похідних.

Наприклад:

$$\begin{aligned}(x^2)' &= 2x, \\(x^3)' &= 3x^2, \\(x^4)' &= 4x^3, \\(x^5)' &= 5x^4.\end{aligned}$$

Приклад 5

Знайти похідну:

$$y = x^6.$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

У нашому випадку:

$$n = 6.$$

Тому:

$$y' = 6x^{6-1}.$$

$$\boxed{y' = 6x^5.}$$

Відповідь:

$$\boxed{6x^5.}$$

13. Похідна функції $y = x$

Оскільки:

$$x = x^1,$$

то:

$$(x)' = 1 \cdot x^{1-1}.$$

$$(x)' = x^0.$$

Оскільки:

$$x^0 = 1,$$

отримуємо:

$$\boxed{x' = 1.}$$

14. Похідна функції $y = \frac{1}{x}$

Запишемо функцію у степеневій формі:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}.$$

Застосуємо правило степеневої функції:

$$(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}.$$

Отже:

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

15. Похідна квадратного кореня

Запишемо:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Тоді:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Отже:

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$$

16. Сталій множник можна винести за знак похідної

Якщо:

$$y = Cf(x),$$

де C — стала величина, то:

$$\boxed{[Cf(x)]' = Cf'(x).}$$

Це означає, що сталий числовий множник при диференціюванні зберігається.

Наприклад:

$$(5x^3)' = 5(x^3)'$$

$$(5x^3)' = 5 \cdot 3x^2.$$

Отже:

$$\boxed{(5x^3)' = 15x^2.}$$

17. Похідна суми функцій

Якщо:

$$y = f(x) + g(x),$$

то похідна суми дорівнює сумі похідних:

$$\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).}$$

Тобто кожний доданок можна диференціювати окремо.

18. Похідна різниці функцій

Якщо:

$$y = f(x) - g(x),$$

то:

$$\boxed{[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).}$$

Отже, під час диференціювання суми або різниці багатьох функцій необхідно знайти похідну кожного доданка окремо та зберегти відповідні знаки.

Приклад 6

Знайти похідну:

$$y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 9.$$

Розв'язання

Диференціюємо кожний доданок окремо:

$$y' = (4x^3)' - (5x^2)' + (7x)' - (9)'.$$

Крок 1. Похідна першого доданка

$$(4x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2.$$

Крок 2. Похідна другого доданка

$$(5x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x.$$

Крок 3. Похідна третього доданка

$$(7x)' = 7.$$

Крок 4. Похідна сталої

$$(9)' = 0.$$

Отже:

$$y' = 12x^2 - 10x + 7.$$

Перевірка

Степінь кожного степеневого доданка після диференціювання зменшився на одиницю, а стала величина зникла.

Відповідь:

$$y' = 12x^2 - 10x + 7.$$

19. Похідна добутку двох функцій

Нехай:

$$y = f(x)g(x).$$

Не можна знаходити похідну добутку шляхом простого множення похідних.

Правильне правило має вигляд:

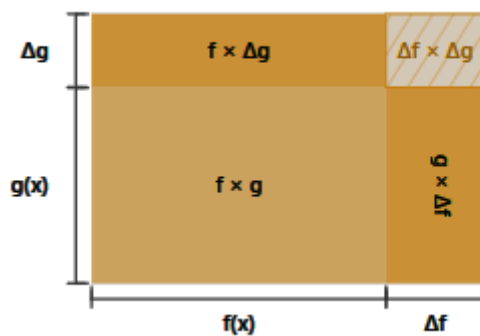
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Отже, необхідно:

1. знайти похідну першого множника і помножити її на другий множник;
2. залишити перший множник без змін і помножити його на похідну другого;
3. отримані вирази додати.

Геометричний зміст цього правила можна побачити, розглядаючи добуток двох величин як площу прямокутника: при одночасній зміні обох множників приріст складається з двох основних частин, а добуток двох малих приростів після граничного переходу не впливає на результат.

$$(fg)' = f'g + fg'$$



Приклад 7

Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 1)(x^3 - 2).$$

Розв'язання

Позначимо:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1, \\ v &= x^3 - 2. \end{aligned}$$

Тоді:

$$y = uv.$$

Використовуємо правило:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Крок 1. Знайдемо u'

$$\begin{aligned} u' &= (x^2 + 1)', \\ u' &= 2x. \end{aligned}$$

Крок 2. Знайдемо v'

$$\begin{aligned} v' &= (x^3 - 2)', \\ v' &= 3x^2. \end{aligned}$$

Крок 3. Застосуємо правило добутку

$$y' = 2x(x^3 - 2) + (x^2 + 1)3x^2.$$

Розкриємо дужки:

$$y' = 2x^4 - 4x + 3x^4 + 3x^2.$$

Зведемо подібні доданки:

$$y' = 5x^4 + 3x^2 - 4x.$$

Перевірка

Можна спочатку розкрити дужки початкової функції:

$$y = x^5 + x^3 - 2x^2 - 2.$$

Тоді:

$$y' = 5x^4 + 3x^2 - 4x.$$

Результати збігаються.

Відповідь:

$$y' = 5x^4 + 3x^2 - 4x.$$

20. Похідна частки двох функцій

Нехай:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

де:

$$g(x) \neq 0.$$

Тоді:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Необхідно звернути увагу на знак **мінус** у чисельнику.

Зручна словесна схема:

похідна чисельника, помножена на знаменник, мінус чисельник, помножений на похідну знаменника; усе це поділити на квадрат знаменника.

Приклад 8

Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 2}.$$

Розв'язання

Позначимо:

$$\begin{aligned}u &= x^2 + 1, \\v &= x + 2.\end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}u' &= 2x, \\v' &= 1.\end{aligned}$$

Використовуємо правило похідної частки:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Підставляємо:

$$y' = \frac{2x(x + 2) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}.$$

Розкриваємо дужки в чисельнику:

$$y' = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x + 2)^2}.$$

Зводимо подібні доданки:

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Відповідь:

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

21. Похідна показникової функції

Для функції:

$$y = e^x$$

маємо:

$$(e^x)' = e^x.$$

Ця функція має особливу властивість: її похідна дорівнює самій функції.

Для показникової функції з довільною додатною основою a , де $a \neq 1$:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Приклад 9

Знайти похідну:

$$y = 3e^x + 2x^3.$$

Розв'язання

Диференціюємо кожний доданок:

$$y' = (3e^x)' + (2x^3)'.$$

Для першого доданка:

$$(3e^x)' = 3e^x.$$

Для другого:

$$(2x^3)' = 6x^2.$$

Тому:

$$y' = 3e^x + 6x^2.$$

Відповідь:

$$3e^x + 6x^2.$$

22. Похідна логарифмічної функції

Для натурального логарифма:

$$y = \ln x$$

маємо:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Для логарифма з основою a :

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Приклад 10

Знайти похідну:

$$y = 4 \ln x - 3x^2.$$

Розв'язання

Диференціюємо кожний доданок:

$$y' = 4(\ln x)' - 3(x^2)'.$$

Використовуємо:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

та:

$$(x^2)' = 2x.$$

Тому:

$$y' = \frac{4}{x} - 6x.$$

Отже:

$$y' = \frac{4}{x} - 6x.$$

Відповідь:

$$\frac{4}{x} - 6x.$$

23. Похідні тригонометричних функцій

Для основних тригонометричних функцій використовуються такі формули:

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ці формули входять до таблиці похідних основних елементарних функцій, яка в наданому Вами курсі лекцій подається разом із прикладами застосування правил диференціювання.

Приклад 11

Знайти похідну:

$$y = 3 \sin x - 2 \cos x .$$

Розв'язання

Диференціюємо кожний доданок.

Перший доданок:

$$(3 \sin x)' = 3 \cos x .$$

Другий доданок:

$$(-2 \cos x)' = -2(-\sin x).$$

Отже:

$$(-2 \cos x)' = 2 \sin x .$$

Тому:

$$y' = 3 \cos x + 2 \sin x .$$

Відповідь:

$$3 \cos x + 2 \sin x .$$

24. Поняття складеної функції

У практичних задачах часто зустрічаються функції, в яких аргументом однієї функції є інша функція.

Наприклад:

$$y = (2x + 1)^5.$$

Тут зовнішньою функцією є піднесення до п'ятого степеня, а внутрішньою:

$$u = 2x + 1.$$

Таку функцію називають **складеною функцією**.

У наданому Вами курсі лекцій диференціювання складеної функції виділено окремим підрозділом після основних правил диференціювання.

Для складеної функції:

$$y = f(u), u = g(x)$$

похідна визначається за правилом:

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

Інакше кажучи: спочатку диференціюємо зовнішню функцію, залишаючи внутрішній вираз без змін, а потім множимо на похідну внутрішньої функції.

Приклад 12

Знайти похідну:

$$y = (2x + 1)^5.$$

Розв'язання

Крок 1. Виділимо внутрішню функцію

$$u = 2x + 1.$$

Тоді:

$$y = u^5.$$

Крок 2. Знайдемо похідну зовнішньої функції

$$(u^5)' = 5u^4.$$

Крок 3. Знайдемо похідну внутрішньої функції

$$u' = (2x + 1)' = 2.$$

Крок 4. Перемножимо

$$y' = 5u^4 \cdot 2.$$

Повертаємося до змінної x :

$$y' = 10(2x + 1)^4.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 10(2x + 1)^4.}$$

Приклад 13

Знайти похідну:

$$y = \sin(3x).$$

Розв'язання

Маємо складену функцію.

Внутрішня функція:

$$u = 3x.$$

Зовнішня функція:

$$y = \sin u.$$

Крок 1. Диференціюємо зовнішню функцію

$$(\sin u)' = \cos u.$$

Крок 2. Диференціюємо внутрішню функцію

$$u' = (3x)' = 3.$$

Крок 3. Перемножимо

$$y' = \cos(3x) \cdot 3.$$

Отже:

$$\boxed{y' = 3\cos(3x).}$$

Відповідь:

$$\boxed{3\cos(3x).}$$

25. Таблиця основних похідних

Для практичного знаходження похідних необхідно добре знати основні формули.

Функція	Похідна
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Таблицю похідних необхідно використовувати разом із правилами диференціювання суми, різниці, добутку, частки та складеної функції.

26. Комплексний приклад застосування кількох правил

Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 3x)(2x - 1).$$

Розв'язання

Маємо добуток двох функцій.

Позначимо:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 3x, \\ v &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Використовуємо:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Крок 1. Знайдемо похідну першої функції

$$\begin{aligned} u' &= (x^2 + 3x)', \\ u' &= 2x + 3. \end{aligned}$$

Крок 2. Знайдемо похідну другої функції

$$\begin{aligned} v' &= (2x - 1)', \\ v' &= 2. \end{aligned}$$

Крок 3. Застосуємо правило добутку

$$y' = (2x + 3)(2x - 1) + (x^2 + 3x) \cdot 2.$$

Крок 4. Розкриємо дужки

$$(2x + 3)(2x - 1) = 4x^2 + 4x - 3.$$

Також:

$$2(x^2 + 3x) = 2x^2 + 6x.$$

Тому:

$$y' = 4x^2 + 4x - 3 + 2x^2 + 6x.$$

Зводимо подібні доданки:

$$y' = 6x^2 + 10x - 3.$$

Перевірка

Розкриємо дужки в початковій функції:

$$y = 2x^3 + 5x^2 - 3x.$$

Диференціюємо:

$$y' = 6x^2 + 10x - 3.$$

Результати збігаються.

Відповідь:

$$y' = 6x^2 + 10x - 3.$$

27. Ще один приклад із часткою

Знайти похідну:

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}.$$

Розв'язання

Цю задачу можна розв'язати двома способами.

Перший спосіб. За правилом частки

Позначимо:

$$u = 2x^2 - 3x + 1,$$

$$v = x.$$

Тоді:

$$u' = 4x - 3,$$

$$v' = 1.$$

За правилом частки:

$$y' = \frac{(4x - 3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2}.$$

Розкриваємо дужки:

$$y' = \frac{4x^2 - 3x - 2x^2 + 3x - 1}{x^2}.$$

Зводимо подібні доданки:

$$y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}.$$

Отже:

$$y' = 2 - \frac{1}{x^2}.$$

Другий спосіб. Попереднє спрощення

Початкову функцію запишемо:

$$y = 2x - 3 + \frac{1}{x}.$$

Тоді:

$$y' = 2 - 0 - \frac{1}{x^2}.$$

Отже:

$$y' = 2 - \frac{1}{x^2}.$$

Результати двох способів збігаються.

Відповідь:

$$y' = 2 - \frac{1}{x^2}.$$

28. Зв'язок диференційованості та неперервності

Якщо функція має похідну в певній точці, то вона є неперервною в цій точці.

Отже, з диференційованості випливає неперервність.

Це можна коротко записати:

диференційованість $\Rightarrow$ неперервність.

Однак обернене твердження загалом неправильне: функція може бути неперервною в точці, але не мати в ній похідної.

Наприклад, функція:

$$y = |x|$$

неперервна в точці:

$$x = 0,$$

але її графік у цій точці має кут, тому звичайної двосторонньої похідної в нулі немає.

Зв'язок неперервності та диференційованості також окремо виділений у структурі наданого Вами курсу лекцій.

29. Практичне застосування похідної для спеціальності «Автомобільний транспорт»

Похідна має особливе значення в задачах, пов'язаних із рухом і зміною технічних параметрів.

Нехай:

$$s = s(t)$$

описує залежність пройденого шляху від часу.

Тоді:

$$v(t) = s'(t)$$

характеризує миттєву швидкість.

Якщо:

$$v = v(t),$$

то:

$$a(t) = v'(t)$$

характеризує прискорення.

Таким чином, за допомогою похідної можна переходити від закону руху до швидкості, а від швидкості — до прискорення.

Приклад 14. Швидкість і прискорення автомобіля

Нехай закон руху має вигляд:

$$s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 5t.$$

Знайти швидкість автомобіля та прискорення.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо швидкість

Швидкість є похідною шляху за часом:

$$v(t) = s'(t).$$

Тому:

$$v(t) = (2t^3 + 3t^2 + 5t)'.$$

Диференціюємо:

$$(2t^3)' = 6t^2,$$

$$(3t^2)' = 6t,$$

$$(5t)' = 5.$$

Отже:

$$v(t) = 6t^2 + 6t + 5.$$

Крок 2. Знайдемо прискорення

Прискорення є похідною швидкості:

$$a(t) = v'(t).$$

Тому:

$$a(t) = (6t^2 + 6t + 5)'.$$

$$a(t) = 12t + 6.$$

Отже:

$$a(t) = 12t + 6.$$

Перевірка

Диференціюючи шлях один раз, отримали швидкість. Диференціюючи отриману швидкість ще раз, отримали прискорення.

Відповідь:

$$v(t) = 6t^2 + 6t + 5,$$

$$a(t) = 12t + 6.$$

30. Загальний алгоритм знаходження похідної

Під час розв'язування задач на диференціювання доцільно дотримуватися такої послідовності.

Крок 1. Уважно проаналізувати задану функцію.

Крок 2. Визначити, з яких елементарних функцій вона складається.

Крок 3. Встановити математичну операцію між частинами функції: сума, різниця, добуток або частка.

Крок 4. Перевірити, чи є функція складеною.

Крок 5. Вибрати відповідне правило диференціювання.

Крок 6. Використати таблицю похідних основних елементарних функцій.

Крок 7. Виконати диференціювання.

Крок 8. Спростити отриманий вираз.

Крок 9. Якщо це можливо, виконати перевірку іншим способом.

31. Типові помилки під час знаходження похідної

Перша помилка — похідну сталої вважають рівною самій сталій

Неправильно:

$$(7)' = 7.$$

Правильно:

$$(7)' = 0.$$

Стала величина не змінюється при зміні аргументу.

Друга помилка — неправильне диференціювання степеня

Неправильно:

$$(x^5)' = x^4.$$

Правильно:

$$(x^5)' = 5x^4.$$

Необхідно не тільки зменшити показник степеня на одиницю, а й помножити на початковий показник.

Третя помилка — множення похідних при знаходженні похідної добутку

Неправильно:

$$(uv)' = u'v'.$$

Правильно:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Четверта помилка — неправильний порядок у чисельнику формули похідної частки

Правильно:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Знак мінус має принципове значення.

П'ята помилка — забувати похідну внутрішньої функції

Наприклад:

$$y = (3x + 1)^4.$$

Недостатньо записати:

$$4(3x + 1)^3.$$

Необхідно ще помножити на:

$$(3x + 1)' = 3.$$

Тому:

$$y' = 12(3x + 1)^3.$$

Шоста помилка — неправильний знак похідної косинуса

Необхідно пам'ятати:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Сьома помилка — механічне застосування формул без визначення структури функції

Перед початком обчислень необхідно визначити, чи маємо суму, добуток, частку або складену функцію. Саме структура функції визначає правило, яке потрібно застосувати.

32. Узагальнення матеріалу лекції

Похідна є однією з основних математичних характеристик зміни функції.

Вона визначається через границю відношення приросту функції до приросту аргументу.

Поняття похідної поєднує декілька важливих математичних і прикладних ідей.

З аналітичної точки зору похідна показує швидкість зміни функції.

З геометричної точки зору похідна визначає кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції.

З механічної точки зору похідна координати за часом визначає миттєву швидкість руху.

Для практичного знаходження похідних використовують таблицю похідних та правила диференціювання.

Особливо важливо навчитися спочатку бачити **структуру функції**, а вже після цього вибирати формулу. Саме такий підхід зменшує кількість помилок і дозволяє правильно диференціювати складніші вирази.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що називається приростом аргументу?
2. Як позначається приріст аргументу?
3. Що називається приростом функції?
4. За якою формулою визначається приріст функції?
5. Що показує відношення приросту функції до приросту аргументу?
6. Що називається похідною функції в точці?
7. Через яке поняття математичного аналізу визначається похідна?
8. Як записується означення похідної?
9. Якими символами можна позначати похідну?
10. Що називається диференціюванням?
11. Який алгоритм знаходження похідної за означенням?

12. У чому полягає геометричний зміст похідної?
13. Що характеризує похідна з механічної точки зору?
14. Як знайти миттєву швидкість, якщо відомий закон руху?
15. Як знайти прискорення, якщо відома залежність швидкості від часу?
16. Чому дорівнює похідна сталої?
17. Чому дорівнює похідна x ?
18. За якою формулою знаходиться похідна степеневої функції?
19. Чому дорівнює похідна $\sqrt{x}$?
20. Чому дорівнює похідна $\frac{1}{x}$?
21. Як диференціюється функція, помножена на сталу величину?
22. Як знаходиться похідна суми?
23. Як знаходиться похідна різниці?
24. Як знаходиться похідна добутку двох функцій?
25. Чому формула $(uv)' = u'v'$ є неправильною?
26. Як знаходиться похідна частки двох функцій?
27. Яка умова накладається на знаменник під час використання правила частки?
28. Чому дорівнює похідна e^x ?
29. Чому дорівнює похідна a^x ?
30. Чому дорівнює похідна натурального логарифма?
31. Чому дорівнює похідна синуса?
32. Чому дорівнює похідна косинуса?
33. Чому дорівнює похідна тангенса?
34. Чому дорівнює похідна котангенса?
35. Що називається складеною функцією?
36. Як знаходиться похідна складеної функції?
37. Чому під час диференціювання складеної функції необхідно враховувати похідну внутрішньої функції?
38. Який зв'язок існує між диференційованістю та неперервністю?

39. Чи кожна неперервна функція обов'язково має похідну?
40. Як похідна використовується для опису руху автомобіля?
41. Як за законом руху знайти швидкість?
42. Як за законом руху знайти прискорення?
43. Які правила необхідно використовувати під час диференціювання многочлена?
44. Які найпоширеніші помилки виникають під час знаходження похідної?
45. Чому перед диференціюванням необхідно визначити структуру функції?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «**Похідна. Правила диференціювання**».

Повторити означення приросту аргументу та приросту функції; означення похідної; геометричний і механічний зміст похідної; основні позначення похідної; алгоритм знаходження похідної за означенням; правила диференціювання сталої величини, суми, різниці, добутку та частки функцій; похідні степеневі, показникові, логарифмічної та основних тригонометричних функцій.

Особливу увагу звернути на таблицю похідних і правила:

$$\begin{aligned}(C)' &= 0, \\(x^n)' &= nx^{n-1}, \\(u \pm v)' &= u' \pm v', \\(uv)' &= u'v + uv', \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

Повторити розв'язання всіх наведених у лекції прикладів. Самостійно знайти похідні функцій:

$$\begin{aligned}y &= 5x^4 - 3x^2 + 7x - 4; \\y &= (x^2 + 2)(3x - 1); \\y &= \frac{x^2 + 3}{x + 1}; \\y &= 2 \sin x + 3 \cos x; \\y &= (3x + 2)^4.\end{aligned}$$

Під час виконання кожного завдання спочатку визначити структуру функції, потім вибрати відповідне правило диференціювання і лише після цього виконувати обчислення.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок. У навчальному посібнику послідовно розглянуто поняття похідної, геометричний зміст похідної, неперервність і диференційованість, правила диференціювання, похідні основних елементарних функцій, диференціювання складеної функції та таблицю похідних.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2 / за редакцією О. І. Клєсова.* Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Лекція 12

ТЕМА: Проміжки монотонності і опуклості функцій. Точки екстремуму і перегину

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти цілісне уявлення про застосування першої та другої похідних до дослідження поведінки функції; поглибити розуміння геометричного змісту похідної; сформувати поняття зростаючої та спадної функції, проміжків монотонності, критичних точок, максимуму та мінімуму функції, точок екстремуму; навчити визначати проміжки зростання і спадання функції за знаком першої похідної; сформувати вміння знаходити критичні точки та досліджувати їх на екстремум; розкрити поняття опуклості графіка функції та показати роль другої похідної у визначенні характеру опуклості; сформувати поняття точки перегину та алгоритм її знаходження; навчити послідовно застосовувати першу і другу похідні для дослідження функції; показати практичне значення такого дослідження для аналізу зміни технічних і фізичних величин у задачах автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти, навчальні посібники з вищої математики, графічні матеріали, мультимедійні засоби.

Матеріал лекції продовжує тему похідної: у попередній лекції було розглянуто поняття похідної, її геометричний зміст і правила диференціювання. Тепер похідна використовується вже як інструмент дослідження поведінки функції.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.
5. Вивчення нового матеріалу:
 1. Поняття монотонності функції.
 2. Зростаюча та спадна функції.
 3. Ознаки зростання і спадання функції.
 4. Критичні точки функції.
 5. Поняття максимуму і мінімуму функції.

6. Поняття екстремуму функції.
7. Необхідна умова існування екстремуму.
8. Достатня умова існування екстремуму за першою похідною.
9. Алгоритм знаходження проміжків монотонності та точок екстремуму.
10. Друга похідна функції.
11. Поняття опуклості графіка функції.
12. Дослідження опуклості за допомогою другої похідної.
13. Поняття точки перегину.
14. Умова існування точки перегину.
15. Алгоритм знаходження проміжків опуклості та точок перегину.
16. Комплексне дослідження функції за першою та другою похідними.
17. Прикладне значення дослідження функцій.

Навчальні матеріали лекції

1. Значення дослідження поведінки функції

Під час розв'язування прикладних задач важливо не тільки знайти значення функції в окремій точці. Часто необхідно встановити, **як функція поводить себе на певному проміжку**.

Наприклад, певна величина може збільшуватися, потім досягати найбільшого значення, після чого зменшуватися. В іншій ситуації функція може спочатку змінюватися повільно, а потім швидкість її зміни починає зростати.

Такі характеристики неможливо повністю описати тільки значеннями самої функції.

Для цього використовують її похідні.

Перша похідна дозволяє досліджувати:

- зростання функції;
- спадання функції;
- точки максимуму;
- точки мінімуму.

Друга похідна використовується для дослідження:

- характеру опуклості графіка;
- точок перегину.

Отже, похідна перетворюється на потужний інструмент дослідження функції.

2. Поняття монотонності функції

Функцію називають **монотонною на певному проміжку**, якщо на цьому проміжку вона зберігає один характер зміни: зростає або спадає.

Монотонність дозволяє описати загальну тенденцію поведінки функції.

Розрізняють:

зростаючі функції;

спадні функції.

3. Зростаюча функція

Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою на проміжку**, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Нехай:

$$x_1 < x_2.$$

Якщо при цьому:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

то функція зростає.

Таким чином:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).}$$

Графічно це означає, що під час руху вздовж графіка зліва направо він піднімається вгору.

Приклад 1

Розглянемо функцію:

$$y = 2x + 1.$$

Перевіримо її поведінку для кількох значень аргументу.

При:

$$x = 0$$

маємо:

$$y = 1.$$

При:

$$x = 1$$

маємо:

$$y = 3.$$

При:

$$x = 2$$

маємо:

$$y = 5.$$

Отже, зі збільшенням аргументу значення функції також збільшується.

Висновок: функція:

$$y = 2x + 1$$

є зростаючою на всій області визначення.

4. Спадна функція

Функція $y = f(x)$ називається **спадною на проміжку**, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Якщо:

$$x_1 < x_2,$$

а:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

то функція спадає.

Тобто:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}.$$

Графічно при русі зліва направо графік такої функції опускається.

Приклад 2

Розглянемо функцію:

$$y = -3x + 4.$$

При:

$$x = 0$$

отримуємо:

$$y = 4.$$

При:

$$x = 1$$

отримуємо:

$$y = 1.$$

При:

$$x = 2$$

отримуємо:

$$y = -2.$$

Отже, при збільшенні аргументу значення функції зменшується.

Висновок: функція є спадною на всій області визначення.

5. Зв'язок монотонності з першою похідною

У попередній лекції було встановлено, що похідна характеризує швидкість зміни функції.

Тому знак першої похідної безпосередньо пов'язаний із поведінкою функції.

Якщо на деякому проміжку:

$$f'(x) > 0,$$

то функція **зростає** на цьому проміжку.

Якщо:

$$f'(x) < 0,$$

то функція **спадає** на цьому проміжку.

Таким чином, для дослідження монотонності функції необхідно визначити знак її першої похідної.

Це один із найважливіших практичних способів застосування похідної.

6. Критичні точки функції

Під час дослідження функції особливу увагу необхідно звертати на точки, у яких характер поведінки функції може змінитися.

Критичними точками функції називають внутрішні точки її області визначення, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Отже, критичні точки шукають із умов:

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

або встановлюють точки, у яких:

$$\boxed{f'(x) \text{ не існує.}}$$

Критична точка є лише **можливою** точкою екстремуму.

Сам факт:

$$f'(x_0) = 0$$

ще не означає, що в точці x_0 обов'язково існує максимум або мінімум.

Це дуже важливо пам'ятати.

7. Поняття максимуму функції

Точка x_0 називається **точкою локального максимуму функції**, якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх значень x із цього околу виконується:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Значення:

$$f(x_0)$$

називається **локальним максимумом функції**.

Простіше кажучи, поблизу точки максимуму значення функції в самій точці є не меншим за сусідні значення.

Перед точкою максимуму функція часто зростає, а після неї — спадає.

8. Поняття мінімуму функції

Точка x_0 називається **точкою локального мінімуму функції**, якщо в деякому околі цієї точки:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Значення:

$$f(x_0)$$

називається **локальним мінімумом функції**.

Перед точкою мінімуму функція часто спадає, а після неї — зростає.

9. Екстремум функції

Максимум і мінімум функції об'єднують загальним поняттям **екстремум функції**.

Отже:

$\text{екстремум} = \text{максимум або мінімум.}$

При цьому потрібно розрізняти:

- **точку екстремуму** x_0 ;
- **значення функції в точці екстремуму** $f(x_0)$.

Наприклад, якщо:

$$x = 2$$

є точкою мінімуму і:

$$f(2) = -3,$$

то точкою мінімуму є $x = 2$, а мінімальним значенням функції в цій точці є -3 .

10. Необхідна умова екстремуму

Якщо функція має похідну в точці локального екстремуму x_0 , то:

$f'(x_0) = 0.$

Це називається **необхідною умовою екстремуму**.

Але ця умова не є достатньою.

Із рівності:

$$f'(x_0) = 0$$

не можна одразу зробити висновок, що x_0 є точкою максимуму або мінімуму.

Необхідно дослідити знак похідної зліва і справа від цієї точки.

11. Достатня умова екстремуму за першою похідною

Нехай x_0 — критична точка.

Якщо при переході через x_0 похідна змінює знак:

$$+ \rightarrow -,$$

то функція спочатку зростає, а потім спадає.

Отже:

$$x_0 \text{ — точка максимуму.}$$

Якщо похідна змінює знак:

$$- \rightarrow +,$$

то функція спочатку спадає, а потім зростає.

Отже:

$$x_0 \text{ — точка мінімуму.}$$

Якщо при переході через критичну точку знак похідної **не змінюється**, то ця критична точка не є точкою екстремуму.

12. Схема визначення екстремуму за знаком першої похідної

Знак $f'(x)$ зліва	Критична точка	Знак $f'(x)$ справа	Поведінка функції	Висновок
+	x_0	—	зростає $\rightarrow$ спадає	максимум
—	x_0	+	спадає $\rightarrow$ зростає	мінімум
+	x_0	+	зростає $\rightarrow$ зростає	екстремуму немає
—	x_0	—	спадає $\rightarrow$ спадає	екстремуму немає

13. Алгоритм дослідження функції на монотонність та екстремум

Для знаходження проміжків зростання, спадання та точок екстремуму доцільно користуватися такою послідовністю.

Крок 1. Знайти область визначення функції.

Крок 2. Знайти першу похідну:

$$f'(x).$$

Крок 3. Розв'язати рівняння:

$$f'(x) = 0.$$

Крок 4. Встановити точки області визначення, у яких похідна не існує.

Крок 5. Нанести критичні точки на числову пряму.

Крок 6. Визначити знак першої похідної на кожному отриманому проміжку.

Крок 7. За знаком першої похідної встановити проміжки зростання і спадання.

Крок 8. Перевірити зміну знака похідної біля кожної критичної точки.

Крок 9. Визначити точки максимуму та мінімуму.

Крок 10. Знайти значення функції в точках екстремуму.

Приклад 3. Дослідження функції на монотонність та екстремум

Дослідити функцію:

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо область визначення

Функція є многочленом, тому визначена для всіх дійсних значень x :

$$D(f) = (-; \infty + \infty).$$

Крок 2. Знайдемо першу похідну

$$y' = (x^2 - 4x + 3)'$$

$$\boxed{y' = 2x - 4.}$$

Крок 3. Знайдемо критичні точки

Розв'язуємо:

$$2x - 4 = 0.$$

$$2x = 4.$$

$$\boxed{x = 2.}$$

Отже, маємо одну критичну точку.

Крок 4. Розіб'ємо область визначення на проміжки

Критична точка $x = 2$ розділяє числову пряму на:

$$(-; \infty 2)$$

та:

$$(2; +\infty).$$

Крок 5. Визначимо знак похідної на першому проміжку

Візьмемо:

$$x = 0.$$

Тоді:

$$y'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0.$$

Отже, на:

$$(-; \infty)$$

функція **спадає**.

Крок 6. Визначимо знак похідної на другому проміжку

Візьмемо:

$$x = 3.$$

Тоді:

$$y'(3) = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Отже, на:

$$(2; +\infty)$$

функція **зростає**.

Крок 7. Визначимо характер критичної точки

Знак похідної змінюється:

$$- \rightarrow +.$$

Отже:

$$\boxed{x = 2}$$

є точкою мінімуму.

Крок 8. Знайдемо значення функції

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3.$$

$$y(2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Отже, точка графіка:

$$\boxed{(2; -1)}$$

є точкою локального мінімуму.

Відповідь

Функція спадає на:

$$(-; \infty)$$

і зростає на:

$$(2; +\infty).$$

Точка мінімуму:

$$x = 2,$$

мінімальне значення:

$$y_{\min} = -1.$$

Приклад 4. Функція з максимумом і мінімумом

Дослідити функцію:

$$y = x^3 - 3x.$$

Розв'язання

Крок 1. Область визначення

$$D(f) = (-; \infty + \infty).$$

Крок 2. Знайдемо першу похідну

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Винесемо число 3:

$$y' = 3(x^2 - 1).$$

Розкладемо різницю квадратів:

$$y' = 3(x - 1)(x + 1).$$

Крок 3. Знайдемо критичні точки

$$3(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отже:

$$x = -1$$

або:

$$x = 1.$$

Крок 4. Утворимо проміжки

$$\begin{aligned} &(-\infty; -1), \\ &(-1; 1), \\ &(1; +\infty). \end{aligned}$$

Крок 5. Дослідимо знак похідної

На першому проміжку візьмемо $x = -2$:

$$y'(-2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9 > 0.$$

Функція зростає.

На другому проміжку візьмемо $x = 0$:

$$y'(0) = -3 < 0.$$

Функція спадає.

На третьому проміжку візьмемо $x = 2$:

$$y'(2) = 9 > 0.$$

Функція зростає.

Отримуємо схему:

$$+ \mid_{-1} - \mid_1 +.$$

Крок 6. Визначимо екстремуми

У точці:

$$x = -1$$

знак змінюється:

$$+ \rightarrow -.$$

Отже, це точка максимуму.

Знайдемо значення функції:

$$\begin{aligned} y(-1) &= (-1)^3 - 3(-1). \\ y(-1) &= -1 + 3 = 2. \end{aligned}$$

Отже:

$$\boxed{(-1; 2)}$$

— точка максимуму графіка.

У точці:

$$x = 1$$

знак змінюється:

$$- \rightarrow +.$$

Отже, це точка мінімуму.

$$y(1) = 1 - 3 = -2.$$

Тому:

$$(1; -2)$$

— точка мінімуму графіка.

Відповідь

Функція зростає на:

$$(-; \infty - 1) \cup (1; +\infty),$$

спадає на:

$$(-; 11).$$

Точка максимуму:

$$(-; 12).$$

Точка мінімуму:

$$(1; -2).$$

14. Критична точка не завжди є точкою екстремуму

Розглянемо функцію:

$$y = x^3.$$

Приклад 5

Знайдемо похідну:

$$y' = 3x^2.$$

Критична точка визначається рівнянням:

$$3x^2 = 0.$$

Отже:

$$x = 0.$$

Перевіримо знак похідної.

Якщо:

$$x < 0,$$

то:

$$3x^2 > 0.$$

Якщо:

$$x > 0,$$

також:

$$3x^2 > 0.$$

Отже, маємо:

$$+ \mid_0 +.$$

Знак похідної не змінюється.

Тому:

$$\boxed{x = 0}$$

не є точкою екстремуму.

Функція зростає і до цієї точки, і після неї.

Цей приклад показує, чому не можна автоматично вважати кожний корінь рівняння:

$$f'(x) = 0$$

точкою максимуму або мінімуму.

15. Друга похідна функції

Для дослідження характеру вигину графіка функції використовується **друга похідна**.

Нехай:

$$y = f(x).$$

Перша похідна:

$$y' = f'(x).$$

Якщо функцію $f'(x)$ знову продиференціювати, отримаємо:

$$y'' = f''(x).$$

Ця величина називається **другою похідною функції**.

Отже:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Друга похідна характеризує швидкість зміни першої похідної.

Приклад 6

Знайти першу і другу похідні функції:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо першу похідну

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 2x)'.$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 2.$$

Крок 2. Знайдемо другу похідну

Диференціюємо першу похідну:

$$y'' = (3x^2 - 6x + 2)'.$$

$$y'' = 6x - 6.$$

Відповідь:

$$y' = 3x^2 - 6x + 2;$$

$$y'' = 6x - 6.$$

16. Геометричний зміст другої похідної

Перша похідна показує нахил дотичної до графіка.

Друга похідна показує, **як змінюється цей нахил**.

Якщо при русі вздовж графіка значення першої похідної збільшується, характер вигину графіка один.

Якщо значення першої похідної зменшується, характер вигину змінюється.

Саме тому знак другої похідної використовується для дослідження опуклості графіка.

17. Опуклість функції

Опуклість характеризує форму графіка функції на певному проміжку.

У навчальній літературі можуть використовуватися терміни «**опукла вниз**» та «**опукла вгору**». Щоб уникнути неоднозначності лише словесного опису, під час розв'язування задач доцільно обов'язково вказувати знак другої похідної.

Якщо:

$$f''(x) > 0$$

на деякому проміжку, графік має один характер опуклості.

Якщо:

$$f''(x) < 0,$$

характер опуклості є протилежним.

Для дослідження головне не механічно запам'ятати форму рисунка, а правильно:

1. знайти другу похідну;
2. визначити її нулі та точки, де вона не існує;
3. визначити знак другої похідної на кожному проміжку;
4. встановити, де знак другої похідної змінюється.

18. Точка перегину

Точкою перегину графіка функції називається точка, при переході через яку змінюється характер опуклості графіка.

Тобто з одного боку від точки графік має один характер опуклості, а з іншого — протилежний.

Якщо:

$$x = x_0$$

є точкою перегину, то координати відповідної точки графіка:

$$(x_0; f(x_0)).$$

19. Необхідна умова точки перегину

Якщо функція має другу похідну в точці перегину, то необхідною умовою є:

$$\boxed{f''(x_0) = 0.}$$

Але, як і у випадку з екстремумом, рівність:

$$f''(x_0) = 0$$

сама по собі ще не гарантує наявності точки перегину.

Необхідно перевірити, чи **змінюється знак другої похідної** при переході через цю точку.

20. Достатня ознака точки перегину

Якщо при переході через точку x_0 друга похідна змінює знак:

$$+ \rightarrow -$$

або:

$$- \rightarrow +,$$

то характер опуклості графіка змінюється.

Отже:

$$\boxed{x_0 \text{ є абсцисою точки перегину.}}$$

Після цього необхідно знайти:

$$y_0 = f(x_0).$$

І записати точку перегину:

$$\boxed{(x_0; y_0).}$$

21. Алгоритм дослідження функції на опуклість

Крок 1. Знайти область визначення функції.

Крок 2. Знайти першу похідну.

Крок 3. Знайти другу похідну:

$$f''(x).$$

Крок 4. Розв'язати рівняння:

$$f''(x) = 0.$$

Крок 5. Встановити точки, у яких друга похідна не існує, але які належать області визначення функції.

Крок 6. Розділити область визначення отриманими точками на проміжки.

Крок 7. Визначити знак другої похідної на кожному проміжку.

Крок 8. Встановити проміжки різного характеру опуклості.

Крок 9. Перевірити зміну знака другої похідної.

Крок 10. Знайти координати точок перегину.

Приклад 7. Дослідження функції на опуклість

Дослідити на опуклість функцію:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Знайти точку перегину.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо першу похідну

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Крок 2. Знайдемо другу похідну

$$y'' = 6x - 6.$$

Крок 3. Знайдемо можливу точку перегину

Розв'язуємо:

$$6x - 6 = 0.$$

$$6x = 6.$$

$$\boxed{x = 1.}$$

Крок 4. Дослідимо знак другої похідної

Точка $x = 1$ утворює проміжки:

$$(-; \infty 1)$$

та:

$$(1; +\infty).$$

Для першого проміжку візьмемо:

$$x = 0.$$

$$y''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0.$$

Для другого проміжку візьмемо:

$$x = 2.$$

$$y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0.$$

Отже, при переході через $x = 1$ друга похідна змінює знак:

$$- \rightarrow +.$$

Тому характер опуклості змінюється.

Крок 5. Знайдемо ординату точки перегину

$$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2.$$

$$y(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Отже:

$$(1; 0)$$

— точка перегину.

Відповідь:

абсциса точки перегину:

$$x = 1;$$

точка перегину:

$$(1; 0).$$

22. Важливе зауваження про рівність $f''(x) = 0$

Розглянемо функцію:

$$y = x^4.$$

Приклад 8

Знайдемо похідні:

$$y' = 4x^3,$$

$$y'' = 12x^2.$$

Розв'язуємо:

$$12x^2 = 0.$$

Отримуємо:

$$x = 0.$$

Але:

$$12x^2 > 0$$

як при $x < 0$, так і при $x > 0$, за винятком самої точки $x = 0$.

Отже, друга похідна має схему знаків:

$$+ \mid_0 +.$$

Знак не змінився.

Тому:

$$\boxed{x = 0}$$

не є абсцисою точки перегину.

Цей приклад показує:

$$\boxed{f''(x_0) = 0}$$

— лише необхідна для відповідного випадку перевірка, але не достатня підстава оголосити точку точкою перегину.

23. Комплексне дослідження функції

Розглянемо функцію:

$$y = x^3 - 3x^2.$$

Необхідно знайти:

- проміжки зростання;
- проміжки спадання;
- точки екстремуму;
- проміжки різного характеру опуклості;
- точку перегину.

Приклад 9

Розв'язання

Крок 1. Область визначення

Функція є многочленом:

$$D(f) = (-; \infty + \infty).$$

Крок 2. Знайдемо першу похідну

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Винесемо $3x$:

$$\boxed{y' = 3x(x - 2)}.$$

Крок 3. Знайдемо критичні точки

$$3x(x - 2) = 0.$$

Отже:

$$x = 0$$

або:

$$x = 2.$$

Крок 4. Дослідимо знак першої похідної

Маємо проміжки:

$$\begin{aligned} &(-; \infty), \\ &(0; 2), \\ &(2; +\infty). \end{aligned}$$

Для $x = -1$:

$$y'(-1) = 3(-1)(-3) = 9 > 0.$$

Для $x = 1$:

$$y'(1) = 3(1)(-1) = -3 < 0.$$

Для $x = 3$:

$$y'(3) = 3(3)(1) = 9 > 0.$$

Отже:

$$+ \quad |_0 \quad - \quad |_2 \quad +.$$

Функція зростає на:

$$\boxed{(-; \infty)}$$

та:

$$\boxed{(2; +\infty)}.$$

Функція спадає на:

$$\boxed{(0; 2)}.$$

Крок 5. Визначимо точки екстремуму

У точці:

$$x = 0$$

знак першої похідної змінюється:

$$+ \rightarrow -.$$

Отже, $x = 0$ — точка максимуму.

$$y(0) = 0.$$

Точка максимуму графіка:

$$(0; 0).$$

У точці:

$$x = 2$$

знак змінюється:

$$- \rightarrow +.$$

Отже, $x = 2$ — точка мінімуму.

$$y(2) = 8 - 12 = -4.$$

Точка мінімуму:

$$(2; -4).$$

Дослідження опуклості

Крок 6. Знайдемо другу похідну

Маємо:

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Тому:

$$y'' = 6x - 6.$$

Крок 7. Знайдемо можливу абсцису точки перегину

$$6x - 6 = 0.$$

$$x = 1.$$

Крок 8. Визначимо знак другої похідної

При:

$$x < 1$$

візьмемо $x = 0$:

$$y''(0) = -6 < 0.$$

При:

$$x > 1$$

візьмемо $x = 2$:

$$y''(2) = 6 > 0.$$

Отже:

$$- \quad |_1 \quad +.$$

Знак другої похідної змінився.

Тому:

$$x = 1$$

є абсцисою точки перегину.

Крок 9. Знайдемо ординату

$$y(1) = 1 - 3 = -2.$$

Отже, точка перегину:

$$(1; -2).$$

Відповідь

Функція зростає на:

$$(-; \infty) \cup (2; +\infty).$$

Функція спадає на:

$$(0; 2).$$

Точка максимуму:

$$(0; 0).$$

Точка мінімуму:

$$(2; -4).$$

Точка перегину:

$$(1; -2).$$

24. Дослідження екстремуму за другою похідною

У деяких випадках після знаходження критичної точки можна використати другу похідну для визначення характеру екстремуму.

Нехай:

$$f'(x_0) = 0.$$

Якщо:

$$f''(x_0) > 0,$$

то x_0 є точкою локального мінімуму.

Якщо:

$$f''(x_0) < 0,$$

то x_0 є точкою локального максимуму.

Якщо:

$$f''(x_0) = 0,$$

за цією ознакою висновок зробити не можна. Необхідне додаткове дослідження.

Приклад 10

Дослідити критичну точку функції:

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо першу похідну

$$y' = 2x - 6.$$

Крок 2. Знайдемо критичну точку

$$2x - 6 = 0.$$

$$x = 3.$$

Крок 3. Знайдемо другу похідну

$$y'' = 2.$$

Отже:

$$y''(3) = 2 > 0.$$

Тому:

$$x = 3$$

є точкою мінімуму.

Крок 4. Знайдемо значення функції

$$y(3) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

Відповідь:

$$(3; -4)$$

— точка мінімуму графіка функції.

25. Перша і друга похідні: що саме вони показують

Для правильного дослідження функції важливо чітко розрізняти призначення першої та другої похідних.

Перша похідна

$$f'(x)$$

використовується насамперед для встановлення:

- проміжків зростання;
- проміжків спадання;
- критичних точок;
- точок максимуму;
- точок мінімуму.

Друга похідна

$$f''(x)$$

використовується для:

- дослідження характеру опуклості;
- знаходження можливих точок перегину;
- перевірки характеру деяких критичних точок.

Таким чином, перша та друга похідні дають різну, але взаємопов'язану інформацію про функцію.

26. Практичний зміст монотонності

У прикладних задачах зростання або спадання функції означає зміну певної фізичної чи технічної величини.

Наприклад, якщо:

$$v = v(t)$$

описує швидкість автомобіля залежно від часу, то:

$$v'(t) = a(t).$$

Якщо:

$$a(t) > 0,$$

швидкість у відповідному математичному проміжку зростає.

Якщо:

$$a(t) < 0,$$

швидкість спадає.

Отже, дослідження знака похідної дозволяє математично встановити інтервали збільшення або зменшення досліджуваної величини.

Приклад 11. Дослідження зміни швидкості

Нехай швидкість задається функцією:

$$v(t) = -t^2 + 6t + 4.$$

Визначити, коли швидкість зростає, а коли спадає.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо похідну швидкості

$$v'(t) = -2t + 6.$$

У механічному змісті це прискорення:

$$a(t) = -2t + 6.$$

Крок 2. Знайдемо критичне значення часу

$$-2t + 6 = 0.$$

$$t = 3.$$

Крок 3. Дослідимо знак

При:

$$t < 3$$

маємо:

$$v'(t) > 0.$$

Отже, швидкість зростає.

При:

$$t > 3$$

маємо:

$$v'(t) < 0.$$

Отже, швидкість спадає.

У фізичній задачі час розглядаємо при:

$$t \geq 0.$$

Тому швидкість зростає на:

$$(0; 3)$$

і спадає при:

$$t > 3$$

у межах того часового інтервалу, на якому задана математична модель.

27. Загальна схема дослідження за першою і другою похідними

Для задач цієї лекції зручно користуватися єдиною схемою.

Дослідження за першою похідною

Знайти:

$$f'(x).$$

Далі визначити критичні точки, встановити знаки першої похідної та записати:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{функція зростає};$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{функція спадає}.$$

Після цього дослідити зміну знаків:

$$+ \rightarrow - \Rightarrow \text{максимум};$$

$$- \rightarrow + \Rightarrow \text{мінімум}.$$

Дослідження за другою похідною

Знайти:

$$f''(x).$$

Потім визначити точки:

$$f''(x) = 0$$

та точки, у яких друга похідна не існує.

Після цього дослідити знак $f''(x)$ на отриманих проміжках.

Якщо при переході через певну точку знак другої похідної змінюється, характер опуклості змінюється і відповідна точка графіка є точкою перегину.

28. Типові помилки

Перша помилка

Здобувач освіти знаходить:

$$f'(x) = 0$$

і одразу називає всі корені точками екстремуму.

Це неправильно.

Потрібно дослідити знак першої похідної.

Друга помилка

Плутають точку екстремуму і значення функції.

Якщо:

$$x_0 = 2,$$

а:

$$f(2) = -5,$$

то $x = 2$ — абсциса точки екстремуму, а -5 — значення функції в ній.

Третя помилка

Плутають максимум і мінімум.

Потрібно дивитися на зміну знака:

$$+ \rightarrow -$$

— максимум;

$$- \rightarrow +$$

— мінімум.

Четверта помилка

Знаходять другу похідну, прирівнюють її до нуля і кожний корінь автоматично називають точкою перегину.

Це неправильно.

Необхідно перевірити зміну знака другої похідної.

П'ята помилка

Знаходять лише абсцису точки перегину, але не визначають її ординату.

Якщо:

$$x = x_0,$$

необхідно обчислити:

$$y_0 = f(x_0).$$

Точка перегину записується:

$$(x_0; y_0).$$

Шоста помилка

Не враховують область визначення функції.

Дослідження знаків похідної повинно проводитися тільки на тих проміжках, які належать області визначення початкової функції.

29. Узагальнення матеріалу

Похідна дозволяє не тільки виконувати обчислення, а й досліджувати характер поведінки функції.

Перша похідна відповідає на запитання:

де функція зростає і де вона спадає?

За зміною знака першої похідної можна встановити точки максимуму та мінімуму.

Друга похідна дозволяє визначити характер опуклості графіка та знайти точки перегину.

Основні співвідношення, які необхідно запам'ятати:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ зростає};$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ спадає}.$$

Для екстремуму:

$$+ \rightarrow - \Rightarrow \text{максимум};$$

$$- \rightarrow + \Rightarrow \text{мінімум}.$$

Для точки перегину визначальним є не тільки виконання рівняння:

$$f''(x) = 0,$$

а зміна знака другої похідної при переході через відповідне значення аргументу.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що називається монотонністю функції?
2. Яку функцію називають зростаючою?
3. Яку функцію називають спадною?
4. Як знак першої похідної пов'язаний зі зростанням функції?
5. За якої умови функція спадає?
6. Що називається критичною точкою функції?
7. Як знаходять критичні точки?
8. Чи кожна критична точка є точкою екстремуму?
9. Що називається локальним максимумом функції?
10. Що називається локальним мінімумом функції?
11. Що називається екстремумом функції?
12. Яка необхідна умова екстремуму диференційованої функції?
13. Чому рівність $f'(x_0) = 0$ не гарантує існування екстремуму?
14. Яка зміна знака першої похідної відповідає максимуму?
15. Яка зміна знака першої похідної відповідає мінімуму?
16. Що відбувається, якщо знак першої похідної біля критичної точки не змінюється?
17. Як знайти проміжки зростання функції?
18. Як знайти проміжки спадання функції?
19. Який алгоритм дослідження функції на монотонність?
20. Як знайти значення функції в точці екстремуму?
21. Що називається другою похідною?
22. Як позначається друга похідна?

23. Як знайти другу похідну функції?
24. Який геометричний зміст має друга похідна?
25. Для чого використовується друга похідна?
26. Що характеризує опуклість функції?
27. Як знак другої похідної пов'язаний з характером опуклості?
28. Що називається точкою перегину?
29. Яка умова може вказувати на можливу точку перегину?
30. Чи достатньо виконання рівності $f''(x_0) = 0$ для існування точки перегину?
31. Яку перевірку необхідно виконати після знаходження коренів рівняння $f''(x) = 0$?
32. Як знайти координати точки перегину?
33. Чим точка перегину відрізняється від точки екстремуму?
34. Чи може критична точка не бути точкою екстремуму?
35. Чи може точка, в якій $f''(x) = 0$, не бути точкою перегину?
36. Як за другою похідною перевірити характер критичної точки?
37. Що означає умова $f''(x_0) > 0$, якщо $f'(x_0) = 0$?
38. Що означає умова $f''(x_0) < 0$, якщо $f'(x_0) = 0$?
39. Чому під час дослідження функції потрібно враховувати її область визначення?
40. Як похідна може використовуватися для аналізу зміни швидкості автомобіля?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Проміжки монотонності і опуклості функцій. Точки екстремуму і перегину».

Повторити поняття першої та другої похідних.

Вивчити ознаки зростання і спадання функції:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \\ f'(x) &< 0. \end{aligned}$$

Повторити правила визначення максимуму та мінімуму за зміною знака першої похідної.

Засвоїти алгоритм знаходження проміжків монотонності та точок екстремуму.

Повторити поняття другої похідної, опуклості та точки перегину.

Особливу увагу звернути на те, що рівності:

$$f'(x) = 0$$

і:

$$f''(x) = 0$$

дають точки для подальшого дослідження, але самі по собі не завжди достатні для остаточного висновку про екстремум або перегин.

Самостійно дослідити на монотонність, екстремуми та, де можливо, на опуклість і точки перегину функції:

$$y = x^2 - 6x + 8;$$

$$y = x^3 - 3x^2;$$

$$y = x^3 - 12x;$$

$$y = x^4 - 2x^2;$$

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 4.$$

Під час виконання завдань обов'язково записувати **область визначення** → **першу похідну** → **критичні точки** → **знаки першої похідної** → **проміжки монотонності** → **екстремуми** → **другу похідну** → **знаки другої похідної** → **характер опуклості** → **точки перегину**.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.

4. **Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.** *Математика в технічному університеті. Том 2* / за редакцією О. І. Клесова. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Лекція 13

Тема: Загальна схема дослідження функції

МЕТА: сформувати цілісне уявлення про повне дослідження функції та послідовність його проведення; систематизувати знання про область визначення функції, нулі функції, проміжки знакосталості, парність і непарність, періодичність, неперервність, точки розриву, асимптоти, проміжки зростання і спадання, точки максимуму та мінімуму, опуклість, увігнутість і точки перегину.

Навчити здобувачів освіти застосовувати першу та другу похідні як основні засоби дослідження поведінки функції, скласти таблицю дослідження функції, визначати характерні точки її графіка та на підставі отриманих результатів виконувати схематичну побудову графіка.

Здобувачі освіти повинні знати:

- поняття області визначення функції;
- способи знаходження нулів функції;
- поняття парної та непарної функції;
- поняття проміжків знакосталості;
- поняття неперервності та точки розриву;
- поняття вертикальної, горизонтальної та похилої асимптот;
- ознаки зростання та спадання функції;
- поняття критичної точки;
- необхідну та достатню умови екстремуму;
- поняття максимуму і мінімуму функції;
- ознаки опуклості та увігнутості графіка;
- поняття точки перегину;
- загальну послідовність повного дослідження функції.

Здобувачі освіти повинні вміти:

- знаходити область визначення функції;
- знаходити точки перетину графіка з координатними осями;
- досліджувати функцію на парність і непарність;
- визначати проміжки знакосталості;

- знаходити точки розриву;
- досліджувати функцію на наявність асимптот;
- обчислювати першу похідну;
- знаходити критичні точки;
- визначати проміжки зростання та спадання;
- знаходити точки максимуму і мінімуму;
- обчислювати другу похідну;
- визначати характер опуклості графіка;
- знаходити точки перегину;
- скласти узагальнену таблицю дослідження;
- будувати схематичний графік функції.

ТИП ЗАНЯТТЯ

Лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ

Опорні конспекти, навчальні посібники з вищої математики, графічні матеріали, мультимедійні засоби, матеріали попередніх лекцій з тем «Похідна. Правила диференціювання» та «Проміжки монотонності і опуклості функцій. Точки екстремуму і перегину».

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.
5. Вивчення нового матеріалу:
 - поняття повного дослідження функції;
 - область визначення;
 - точки перетину графіка з координатними осями;
 - парність і непарність;
 - проміжки знакосталості;
 - дослідження поведінки функції біля особливих точок;

- асимптоти графіка;
 - дослідження за першою похідною;
 - дослідження за другою похідною;
 - загальна схема дослідження функції;
 - побудова графіка за результатами дослідження.
6. Закріплення вивченого матеріалу.
 7. Підведення підсумків.
 8. Домашнє завдання.

НАВЧАЛЬНІ МАТЕРІАЛИ ЛЕКЦІЇ

1. Мотивація вивчення теми

На попередніх заняттях окремо розглядалися похідна, правила диференціювання, проміжки зростання і спадання функції, екстремуми, друга похідна, опуклість графіка та точки перегину. Тепер необхідно об'єднати ці відомості в єдину **послідовну систему дослідження функції**.

Повне дослідження функції дає можливість не обчислювати велику кількість її значень, а за допомогою аналітичних методів встановити загальний характер її поведінки.

Наприклад, якщо відома функція $s(t)$, яка описує пройдений автомобілем шлях, то її похідна характеризує швидкість руху, а друга похідна — прискорення. Проте мета цієї лекції полягає насамперед у формуванні **загального математичного алгоритму дослідження функції**. Професійно орієнтовані задачі на знаходження максимумів і мінімумів будуть детально розглянуті на практичному занятті 14.

2. Поняття дослідження функції

Дослідити функцію означає встановити її основні властивості, характер зміни та на підставі отриманих результатів побудувати її графік.

Нехай задано функцію

$$y = f(x).$$

Під час її повного дослідження необхідно послідовно отримати відповіді на такі запитання:

1. Для яких значень x функція існує?
2. Де графік перетинає координатні осі?
3. Де функція набуває додатних і від'ємних значень?
4. Чи є функція парною або непарною?
5. Чи має функція точки розриву?
6. Як поводиться функція поблизу точок розриву та на нескінченності?
7. Чи має графік асимптоти?
8. На яких проміжках функція зростає?
9. На яких проміжках функція спадає?
10. Де знаходяться точки максимуму та мінімуму?
11. Який характер опуклості має графік?
12. Чи має графік точки перегину?
13. Як побудувати графік функції за результатами дослідження?

Таким чином, дослідження функції є не окремою математичною операцією, а **системою взаємопов'язаних дій**.

3. Область визначення функції

Областю визначення функції називають множину всіх значень незалежної змінної x , для яких функція має зміст.

Позначають область визначення:

$$D(f).$$

Під час знаходження області визначення необхідно пам'ятати основні обмеження:

- знаменник дробу не може дорівнювати нулю;
- вираз під знаком квадратного кореня повинен бути невід'ємним;
- аргумент логарифма повинен бути додатним;
- для деяких складених функцій одночасно враховуються декілька умов.

Приклад 1

Знайти область визначення функції

$$y = \frac{x + 1}{x - 3}.$$

Розв'язання

Функція є дробово-раціональною. Знаменник не повинен дорівнювати нулю:

$$x - 3 \neq 0.$$

Отже,

$$x \neq 3.$$

Тому

$$D(f) = (-; \infty 3) \cup (3; +\infty).$$

Відповідь

$$\boxed{D(f) = (-; \infty 3) \cup (3; +\infty).}$$

Приклад 2

Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{5 - x}.$$

Розв'язання

Підкореневий вираз повинен бути невід'ємним:

$$5 - x \geq 0.$$

Звідси

$$x \leq 5.$$

Відповідь

$$\boxed{D(f) = (-; \infty 5].}$$

4. Точки перетину графіка з координатними осями

Для побудови графіка важливо визначити його характерні точки.

Перетин з віссю Oy

Необхідно покласти

$$x = 0.$$

Якщо $0 \in D(f)$, то

$$y = f(0).$$

Отримуємо точку

$$A(0; f(0)).$$

Перетин з віссю Ox

Необхідно розв'язати рівняння

$$f(x) = 0.$$

Корені цього рівняння є абсцисами точок перетину графіка з віссю Ox .

Приклад 3

Знайти точки перетину графіка функції

$$y = x^2 - 4$$

з координатними осями.

Розв'язання

1. Перетин з віссю Oy .

Покладемо

$$x = 0.$$

Тоді

$$y = 0^2 - 4 = -4.$$

Отже, маємо точку

$$A(0; -4).$$

2. Перетин з віссю Ox .

Покладемо

$$y = 0.$$

Тоді

$$x^2 - 4 = 0.$$

Розкладемо на множники:

$$(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Звідси

$$x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Отже, точки перетину:

$$B(-; 20), C(2; 0).$$

Відповідь

$$A(0; -4), B(-; 20), C(2; 0).$$

5. Дослідження функції на парність і непарність

Функція називається **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для кожного x з області визначення виконується

$$f(-x) = f(x).$$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy .

Функція називається **непарною**, якщо

$$f(-x) = -f(x).$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Якщо не виконується жодна з цих умов, функція є ані парною, ані непарною.

Приклад 4

Дослідити на парність функцію

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2.$$

Розв'язання

Знайдемо $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2.$$

Оскільки

$$(-x)^4 = x^4, (-x)^2 = x^2,$$

то

$$f(-x) = x^4 - 3x^2 + 2.$$

Отже,

$$f(-x) = f(x).$$

Відповідь

$$\boxed{\text{Функція парна.}}$$

Її графік симетричний відносно осі Oy .

Приклад 5

Дослідити на парність функцію

$$f(x) = x^3 - 2x.$$

Розв'язання

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x).$$

$$f(-x) = -x^3 + 2x.$$

Винесемо знак мінус:

$$f(-x) = -(x^3 - 2x).$$

Отже,

$$f(-x) = -f(x).$$

Відповідь

Функція непарна.

6. Проміжки знакосталості функції

Проміжками знакосталості називають проміжки, на яких функція зберігає один і той самий знак.

Якщо

$$f(x) > 0,$$

то графік розташований вище осі Ox .

Якщо

$$f(x) < 0,$$

то графік розташований нижче осі Ox .

Для знаходження проміжків знакосталості необхідно:

1. знайти нулі функції;
2. урахувати точки, які не належать області визначення;
3. розбити числову пряму цими точками на проміжки;
4. визначити знак функції на кожному проміжку.

Приклад 6

Визначити проміжки знакосталості функції

$$f(x) = x^2 - 9.$$

Розв'язання

Знайдемо нулі:

$$x^2 - 9 = 0.$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Отже,

$$x = -3, x = 3.$$

Розглядаємо проміжки:

$$(-; \infty - 3), (-; 33), (3; +\infty).$$

Оскільки

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3),$$

одержуємо:

$$f(x) > 0$$

при

$$x \in (-; \infty - 3) \cup (3; +\infty),$$

а

$$f(x) < 0$$

при

$$x \in (-; 33).$$

Відповідь

$$\boxed{f(x) > 0 \text{ при } x \in (-; \infty - 3) \cup (3; +\infty);}$$

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ при } x \in (-; 33).}$$

7. Дослідження функції на неперервність

Під час повного дослідження необхідно встановити, чи є функція неперервною на своїй області визначення.

Якщо в точці $x = a$ функція не визначена або не виконується умова неперервності, ця точка може бути точкою розриву.

Для раціональних функцій особливу увагу необхідно приділяти нулям знаменника.

Наприклад, для функції

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

точка

$$x = 2$$

не належить області визначення та є точкою розриву.

8. Асимптоти графіка функції

Асимптотою називається пряма, до якої необмежено наближається графік функції.

Під час дослідження функції найчастіше розглядають:

- вертикальні асимптоти;
- горизонтальні асимптоти;
- похилі асимптоти.

8.1. Вертикальна асимптота

Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції при $x \rightarrow a$ є нескінченною, то пряма

$$x = a$$

є вертикальною асимптотою.

Приклад 7

Знайти вертикальну асимптоту функції

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Розв'язання

Функція не визначена при

$$x = 3.$$

При наближенні x до 3 значення функції необмежено зростає за модулем:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty,$$
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Отже, пряма

$$x = 3$$

є вертикальною асимптотою.

Відповідь

$$\boxed{x = 3.}$$

8.2. Горизонтальна асимптота

Якщо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

або

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$$

то пряма

$$y = b$$

є горизонтальною асимптотою.

Приклад 8

Знайти горизонтальну асимптоту функції

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}.$$

Розв'язання

Знайдемо границю при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x + 3}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2.$$

Отже,

$$y = 2$$

є горизонтальною асимптотою.

Відповідь

$$\boxed{y = 2.}$$

8.3. Похила асимптота

Похилу асимптоту шукають у вигляді

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

а

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

якщо відповідні границі існують і є скінченними.

9. Дослідження функції за першою похідною

Перша похідна дає можливість установити:

- критичні точки;
- проміжки зростання;
- проміжки спадання;
- точки максимуму;
- точки мінімуму.

Якщо на деякому проміжку

$$f'(x) > 0,$$

то функція на цьому проміжку зростає.

Якщо

$$f'(x) < 0,$$

то функція спадає.

Критичними точками називають внутрішні точки області визначення функції, в яких

$$f'(x) = 0$$

або похідна не існує.

Сам факт виконання рівності

$$f'(x_0) = 0$$

ще не означає, що в точці x_0 обов'язково є екстремум. Необхідно дослідити зміну знака похідної.

Якщо похідна змінює знак

$$+ \rightarrow -,$$

то функція має локальний максимум.

Якщо похідна змінює знак

$$- \rightarrow +,$$

то функція має локальний мінімум.

Приклад 9

Дослідити на монотонність і знайти екстремуми функції

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо похідну.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Винесемо 3:

$$f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

$$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Крок 2. Знайдемо критичні точки.

$$3(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отже,

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Крок 3. Дослідимо знак похідної.

На проміжку

$$(-; \infty - 1)$$

похідна додатна.

На проміжку

$$(-; 1)$$

похідна від'ємна.

На проміжку

$$(1; +\infty)$$

похідна додатна.

Отже, функція зростає на

$$(-; \infty - 1)$$

та

$$(1; +\infty),$$

і спадає на

$$(-; 11).$$

Крок 4. Знайдемо екстремуми.

У точці $x = -1$ похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», тому маємо максимум.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2.$$

Точка максимуму:

$$(-; 12).$$

У точці $x = 1$ похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», тому маємо мінімум.

$$f(1) = 1 - 3 = -2.$$

Точка мінімуму:

$$(1; -2).$$

Відповідь

Функція зростає на

$$\boxed{(-; \infty - 1) \cup (1; +\infty)}$$

і спадає на

$$\boxed{(-; 11)}.$$

Точка максимуму:

$$\boxed{(-; 12)}.$$

Точка мінімуму:

$$\boxed{(1; -2)}.$$

10. Дослідження функції за другою похідною

Друга похідна використовується для визначення характеру опуклості графіка та знаходження точок перегину.

Якщо

$$f''(x) > 0,$$

то похідна $f'(x)$ зростає, а графік функції має відповідний характер опуклості.

Якщо

$$f''(x) < 0,$$

характер опуклості змінюється на протилежний.

У різних навчальних джерелах терміни «опукла вгору», «опукла вниз», «увігнута» можуть уживатися по-різному, тому під час дослідження доцільно насамперед чітко вказувати **знак другої похідної**.

Точкою перегину називають точку графіка, під час проходження через яку змінюється характер опуклості.

Рівність

$$f''(x_0) = 0$$

є лише можливим способом знаходження кандидата на точку перегину. Необхідно перевірити зміну знака другої похідної.

Приклад 10

Знайти точку перегину функції

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Розв'язання

Перша похідна:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Друга похідна:

$$f''(x) = 6x.$$

Знайдемо можливу точку перегину:

$$6x = 0.$$

$$x = 0.$$

Перевіримо знак другої похідної.

При

$$x < 0$$

маємо

$$f''(x) < 0.$$

При

$$x > 0$$

маємо

$$f''(x) > 0.$$

Отже, знак другої похідної змінюється, тому $x = 0$ є абсцисою точки перегину.

Знайдемо ординату:

$$f(0) = 0.$$

Відповідь

$$(0; 0)$$

— точка перегину графіка функції.

11. Загальна схема дослідження функції

Під час повного дослідження функції рекомендується дотримуватися такої послідовності.

Крок 1. Знайти область визначення функції

Встановити всі обмеження на незалежну змінну.

Крок 2. Дослідити функцію на парність і непарність

Обчислити $f(-x)$ і порівняти отриманий вираз з $f(x)$ та $-f(x)$.

Крок 3. Дослідити функцію на періодичність, якщо це доцільно

Для алгебраїчних функцій цей етап часто не дає періоду, але для тригонометричних функцій він має істотне значення.

Крок 4. Знайти точки перетину графіка з координатними осями

Для осі Oy :

$$x = 0.$$

Для осі Ox :

$$f(x) = 0.$$

Крок 5. Визначити проміжки знакосталості

Розв'язати нерівності

$$f(x) > 0$$

та

$$f(x) < 0.$$

Крок 6. Дослідити неперервність і знайти точки розриву

Особливо уважно дослідити точки, які не належать області визначення.

Крок 7. Дослідити поведінку функції біля точок розриву та на нескінченності

Обчислити відповідні границі.

Крок 8. Знайти асимптоти графіка

Дослідити наявність:

$$\begin{aligned}x &= a, \\y &= b, \\y &= kx + b.\end{aligned}$$

Крок 9. Знайти першу похідну

$$f'(x).$$

Крок 10. Знайти критичні точки

Розв'язати рівняння

$$f'(x) = 0$$

і врахувати внутрішні точки області визначення, у яких похідна не існує.

Крок 11. Визначити проміжки зростання і спадання

Дослідити знак $f'(x)$.

Крок 12. Знайти точки екстремуму

Визначити зміну знака першої похідної в критичних точках і знайти відповідні значення функції.

Крок 13. Знайти другу похідну

$$f''(x).$$

Крок 14. Дослідити характер опуклості графіка

Визначити знак другої похідної на відповідних проміжках.

Крок 15. Знайти точки перегину

Знайти можливі точки та перевірити зміну знака другої похідної.

Крок 16. Скласти узагальнену таблицю дослідження

У таблиці доцільно відобразити критичні точки, знаки першої і другої похідних, проміжки монотонності, екстремуми та характер опуклості.

Крок 17. Побудувати графік

На графіку необхідно врахувати всі встановлені властивості функції.

12. Повне дослідження функції**Приклад 11**

Провести повне дослідження функції

$$f(x) = x^3 - 3x$$

та підготувати дані для побудови її графіка.

Розв'язання**Крок 1. Область визначення**

Функція є многочленом, тому визначена для всіх дійсних значень x :

$$D(f) = (-; \infty + \infty).$$

Крок 2. Парність

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x).$$

$$f(-x) = -x^3 + 3x.$$

$$f(-x) = -(x^3 - 3x).$$

Отже,

$$f(-x) = -f(x).$$

Функція непарна.

Графік симетричний відносно початку координат.

Крок 3. Точки перетину з координатними осями

Знайдемо нулі:

$$x^3 - 3x = 0.$$

Винесемо x :

$$x(x^2 - 3) = 0.$$

Звідси

$$x = 0$$

або

$$x^2 = 3.$$

Тому

$$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}.$$

Точки перетину з віссю Ox :

$$(-; \sqrt{3}0), (0; 0), (\sqrt{3}; 0).$$

З віссю Oy :

$$f(0) = 0.$$

Отже, маємо точку

$$(0; 0).$$

Крок 4. Проміжки знакосталості

Маємо

$$f(x) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Критичними для визначення знака самої функції є числа

$$-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}.$$

Отже:

$$f(x) < 0$$

при

$$x \in (-; \infty - \sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3}),$$

а

$$f(x) > 0$$

при

$$x \in (-; \sqrt{3}0) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

Крок 5. Неперервність

Оскільки функція є многочленом, вона неперервна на всій числовій прямій.

Точок розриву немає.

Крок 6. Асимптоти

Для многочлена третього степеня вертикальних, горизонтальних і похилих асимптот немає.

Крок 7. Перша похідна

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

$$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Крок 8. Критичні точки

$$f'(x) = 0.$$

$$3(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отже,

$$x = -1, x = 1.$$

Крок 9. Проміжки монотонності

При

$$x < -1$$

маємо

$$f'(x) > 0.$$

При

$$-1 < x < 1$$

маємо

$$f'(x) < 0.$$

При

$$x > 1$$

маємо

$$f'(x) > 0.$$

Тому функція зростає на

$$(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

та

$$(1; +\infty),$$

і спадає на

$$(-; 11).$$

Крок 10. Екстремуми

При $x = -1$ знак похідної змінюється:

$$+ \rightarrow -.$$

Отже, це точка локального максимуму.

$$f(-1) = 2.$$

Маємо точку

$$(-; 12).$$

При $x = 1$ знак похідної змінюється:

$$- \rightarrow +.$$

Отже, це точка локального мінімуму.

$$f(1) = -2.$$

Маємо точку

$$(1; -2).$$

Крок 11. Друга похідна

$$f''(x) = 6x.$$

Крок 12. Можлива точка перегину

$$f''(x) = 0.$$

$$6x = 0.$$

$$x = 0.$$

Крок 13. Перевірка зміни знака другої похідної

При

$$x < 0$$

маємо

$$f''(x) < 0.$$

При

$$x > 0$$

маємо

$$f''(x) > 0.$$

Отже, характер опуклості змінюється.

Тому

$$x = 0$$

є абсцисою точки перегину.

$$f(0) = 0.$$

Точка перегину:

$$(0; 0).$$

Крок 14. Поведінка на нескінченності

При

$$x \rightarrow +\infty$$

маємо

$$f(x) \rightarrow +\infty.$$

При

$$x \rightarrow -\infty$$

маємо

$$f(x) \rightarrow -\infty.$$

Крок 15. Узагальнення результатів

Функція:

- визначена на всій числовій прямій;
- непарна;
- неперервна;
- має три нулі;
- не має асимптот;
- має локальний максимум у точці $(-; 12)$;
- має локальний мінімум у точці $(1; -2)$;
- має точку перегину $(0; 0)$;

- зростає на двох проміжках;
- спадає між точками екстремуму.

Відповідь

Основні характерні точки:

$$(-; \sqrt{30}), (-; 12), (0; 0), (1; -2), (\sqrt{3}; 0).$$

На підставі отриманих результатів можна виконати достатньо точну схематичну побудову графіка.

13. Ще один приклад повного дослідження

Приклад 12

Дослідити функцію

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Розв'язання

Крок 1. Область визначення

Функція є многочленом:

$$D(f) = (-; \infty + \infty).$$

Крок 2. Парність

$$f(-x) = x^2 + 4x + 3.$$

Цей вираз не дорівнює ні $f(x)$, ні $-f(x)$.

Отже, функція ані парна, ані непарна.

Крок 3. Нулі функції

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Розкладемо на множники:

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Тому

$$x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Точки перетину з віссю Ox :

$$(1; 0), (3; 0).$$

Крок 4. Перетин з віссю Oy

$$f(0) = 3.$$

Отже,

$$(0; 3).$$

Крок 5. Перша похідна

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Крок 6. Критична точка

$$2x - 4 = 0.$$

$$x = 2.$$

Крок 7. Монотонність

При

$$x < 2$$

маємо

$$f'(x) < 0.$$

Тому функція спадає.

При

$$x > 2$$

маємо

$$f'(x) > 0.$$

Тому функція зростає.

Крок 8. Екстремум

У точці $x = 2$ знак похідної змінюється:

$$- \rightarrow +.$$

Отже, маємо мінімум.

$$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Точка мінімуму:

$$(2; -1).$$

Крок 9. Друга похідна

$$f''(x) = 2.$$

Оскільки

$$f''(x) > 0$$

для всіх x , знак другої похідної не змінюється.

Отже, точок перегину немає.

Крок 10. Асимптоти

Функція є квадратним многочленом, тому асимптот не має.

Відповідь

Функція спадає на

$$(-\infty; 2)$$

і зростає на

$$(2; +\infty).$$

Точка мінімуму:

$$(2; -1).$$

Нулі:

$$x = 1, x = 3.$$

Точок перегину та асимптот немає.

14. Типові помилки під час дослідження функції

Перша помилка — починати обчислення похідної, не знайшовши область визначення функції.

Друга помилка — включати до критичних точок значення, які не належать області визначення.

Третя помилка — вважати будь-який корінь рівняння

$$f'(x) = 0$$

точкою екстремуму без перевірки зміни знака похідної.

Четверта помилка — вважати будь-який корінь рівняння

$$f''(x) = 0$$

точкою перегину без перевірки зміни характеру опуклості.

П'ята помилка — плутати нулі функції з критичними точками.

Нулі функції знаходять із рівняння

$$f(x) = 0,$$

а стаціонарні точки — із рівняння

$$f'(x) = 0.$$

Шоста помилка — визначати вертикальну асимптоту лише за умовою, що знаменник дорівнює нулю, не дослідивши відповідну границю.

Сьома помилка — будувати графік тільки за кількома обчисленими значеннями, ігноруючи результати дослідження похідних.

Восьма помилка — не знаходити ординату точки екстремуму або перегину. Якщо знайдено абсцису x_0 , необхідно обчислити

$$y_0 = f(x_0).$$

15. Раціональна послідовність оформлення дослідження

У письмовій роботі рекомендується оформлювати повне дослідження в такій послідовності:

1. Записати функцію.
2. Знайти область визначення.
3. Дослідити парність, непарність та, за необхідності, періодичність.
4. Знайти точки перетину з координатними осями.
5. Визначити знак функції.
6. Дослідити неперервність.
7. Знайти асимптоти.
8. Обчислити першу похідну.
9. Знайти критичні точки.
10. Скласти таблицю знаків першої похідної.
11. Записати проміжки зростання і спадання.
12. Знайти точки екстремуму.
13. Обчислити другу похідну.
14. Знайти можливі точки перегину.
15. Дослідити знак другої похідної.
16. Визначити характер опуклості та точки перегину.

17. Дослідити поведінку функції на межах області визначення.
 18. Нанести характерні точки й асимптоти на координатну площину.
 19. Побудувати графік з урахуванням усіх установлених властивостей.
-

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що означає дослідити функцію?
2. Що називається областю визначення функції?
3. Чому повне дослідження необхідно починати з області визначення?
4. Як знайти точки перетину графіка з віссю Ox ?
5. Як знайти точку перетину графіка з віссю Oy ?
6. Що називається нулем функції?
7. Яка функція називається парною?
8. Яку геометричну симетрію має графік парної функції?
9. Яка функція називається непарною?
10. Яку симетрію має графік непарної функції?
11. Що називається проміжками знакосталості?
12. Як визначити проміжки, на яких функція додатна?
13. Що називається точкою розриву?
14. Що називається асимптотою графіка?
15. Яка асимптота називається вертикальною?
16. Яка асимптота називається горизонтальною?
17. У якому вигляді записують похилу асимптоту?
18. Яке значення має перша похідна під час дослідження функції?
19. Які точки називаються критичними?
20. Чи кожна критична точка є точкою екстремуму?
21. Яка ознака вказує на локальний максимум?
22. Яка ознака вказує на локальний мінімум?

23. Як за знаком першої похідної визначають проміжки зростання?
24. Як за знаком першої похідної визначають проміжки спадання?
25. Для чого використовується друга похідна?
26. Що називається точкою перегину?
27. Чи достатньо рівності $f''(x_0) = 0$ для висновку про наявність точки перегину?
28. Чому під час знаходження точки перегину необхідно перевіряти знак другої похідної?
29. Для чого складають таблицю дослідження функції?
30. Які основні елементи необхідно врахувати під час побудови графіка?
31. Чим нуль функції відрізняється від критичної точки?
32. Чим точка максимуму відрізняється від найбільшого значення функції на заданому проміжку?
33. Чому точки, що не належать області визначення, не можуть бути точками екстремуму функції?
34. Які дані повного дослідження визначають форму графіка?
35. У якій послідовності доцільно виконувати повне дослідження функції?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Опрацювати теоретичний матеріал лекції

Повторити:

- область визначення;
- нулі функції;
- парність і непарність;
- проміжки знакосталості;
- неперервність;
- асимптоти;
- першу похідну;
- критичні точки;
- проміжки монотонності;

- екстремуми;
- другу похідну;
- точки перегину;
- загальну схему дослідження функції.

2. Провести повне дослідження функції

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Необхідно:

1. знайти область визначення;
2. дослідити функцію на парність і непарність;
3. знайти точки перетину з координатними осями;
4. визначити проміжки знакосталості;
5. дослідити неперервність;
6. визначити наявність асимптот;
7. знайти першу похідну;
8. знайти критичні точки;
9. визначити проміжки зростання і спадання;
10. знайти точки максимуму та мінімуму;
11. знайти другу похідну;
12. визначити характер опуклості;
13. знайти точку перегину, якщо вона існує;
14. скласти таблицю дослідження;
15. побудувати схематичний графік функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний

університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Лекція 14

ТЕМА: Основні методи інтегрування

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти системне уявлення про основні способи знаходження невизначених інтегралів; закріпити поняття первісної та невизначеного інтеграла; повторити основні властивості невизначеного інтеграла та таблицю основних інтегралів; навчити правильно аналізувати підінтегральну функцію та обирати доцільний метод інтегрування; сформувати практичні навички безпосереднього інтегрування, інтегрування методом заміни змінної та методом інтегрування частинами; навчити виконувати алгебраїчні перетворення підінтегральних виразів перед інтегруванням; сформувати вміння перевіряти правильність знайденої первісної за допомогою диференціювання; показати взаємний зв'язок операцій диференціювання та інтегрування; розкрити практичне значення інтегрального числення для відновлення функціональної залежності за відомою швидкістю її зміни та для розв'язування задач механіки й автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти, навчальні посібники з вищої математики, таблиця основних інтегралів, мультимедійні засоби.

У робочій програмі дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт» тема інтегрування охоплює поняття первісної, основну властивість первісної, невизначений інтеграл, його властивості, таблицю основних інтегралів, **безпосереднє інтегрування, метод заміни змінної, інтегрування частинами та перевірку результату інтегрування за допомогою диференціювання.** Саме ці методи становлять основу цієї лекції.

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.
5. Вивчення нового матеріалу:
 1. Повторення поняття первісної.
 2. Невизначений інтеграл.
 3. Основні властивості невизначеного інтеграла.

4. Таблиця основних інтегралів.
5. Поняття методу інтегрування.
6. Безпосереднє інтегрування.
7. Попередні перетворення підінтегральної функції.
8. Метод заміни змінної.
9. Алгоритм інтегрування методом заміни змінної.
10. Інтегрування частинами.
11. Вибір функцій під час інтегрування частинами.
12. Комбіноване застосування методів інтегрування.
13. Перевірка результату інтегрування диференціюванням.
14. Типові помилки під час інтегрування.
15. Практичне значення інтегрування для задач автомобільного транспорту.

Навчальні матеріали лекції

1. Мотивація вивчення теми

У попередніх темах було розглянуто похідну функції. Якщо відома функція:

$$y = F(x),$$

то за допомогою диференціювання можна знайти швидкість її зміни:

$$F'(x) = f(x).$$

Але в багатьох практичних задачах виникає обернена ситуація: відома швидкість зміни певної величини, а необхідно відновити саму величину.

Саме таку задачу розв'язує **інтегрування**.

Наприклад, якщо відома швидкість автомобіля:

$$v = v(t),$$

то за допомогою інтегрування можна відновити залежність пройденого шляху від часу.

Якщо відоме прискорення:

$$a = a(t),$$

то інтегрування дозволяє знайти закон зміни швидкості.

Тому диференціювання та інтегрування є взаємно пов'язаними математичними операціями.

У робочій програмі практичний акцент цієї теми безпосередньо пов'язано з формуванням уміння відновлювати функціональну залежність за відомою швидкістю її зміни та застосовувати методи інтегрування в задачах механіки й автомобільного транспорту.

2. Повторення поняття первісної

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Отже, щоб перевірити, чи є знайдена функція первісною, необхідно знайти її похідну.

Якщо після диференціювання отримано початкову підінтегральну функцію, інтегрування виконано правильно.

Приклад 1

Перевірити, чи є функція

$$F(x) = x^3$$

первісною для функції:

$$f(x) = 3x^2.$$

Розв'язання

Необхідно знайти похідну функції $F(x)$:

$$F'(x) = (x^3)'.$$

За правилом диференціювання степеневі функції:

$$F'(x) = 3x^2.$$

Отримали:

$$F'(x) = f(x).$$

Отже:

$$F(x) = x^3$$

є первісною для:

$$f(x) = 3x^2.$$

Відповідь: функція $F(x) = x^3$ є первісною для $f(x) = 3x^2$.

3. Невизначений інтеграл

Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то будь-яка функція:

$$F(x) + C,$$

де C — довільна стала величина, також є первісною для $f(x)$.

Дійсно:

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C'.$$

Оскільки:

$$C' = 0,$$

маємо:

$$[F(x) + C]' = f(x).$$

Сукупність усіх первісних функцій $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом**.

Записують:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Тут:

$$\int$$

— знак інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x) dx$ — підінтегральний вираз;

x — змінна інтегрування;

C — довільна стала інтегрування.

4. Інтегрування

Процес знаходження невизначеного інтеграла називається **інтегруванням**.

Іншими словами, інтегрувати функцію означає знайти множину всіх її первісних.

Якщо:

$$F'(x) = f(x),$$

то:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Таким чином, інтегування є операцією, оберненою до диференціювання.

5. Основні властивості невизначеного інтеграла

Перед вивченням методів інтегрування необхідно повторити властивості, які постійно використовуються під час обчислень.

Властивість 1. Сталий множник можна винести за знак інтеграла

Якщо k — стала величина, то:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Наприклад:

$$\int 5 x^2 dx = 5 \int x^2 dx.$$

Властивість 2. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Властивість 3. Інтеграл різниці

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

Ці властивості дозволяють розділяти складний підінтегральний вираз на простіші складові.

6. Основні табличні інтеграли

Для практичного інтегрування необхідно знати таблицю основних невизначених інтегралів.

Підінтегральна функція	Невизначений інтеграл
0	C
1	$x + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$

Особливо часто використовується степенева формула:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

Необхідно пам'ятати, що при:

$$n = -1$$

ця формула не застосовується.

У цьому випадку:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

7. Що означає «вибрати метод інтегрування»

Під час диференціювання за виглядом функції зазвичай досить легко визначити необхідне правило.

Під час інтегрування ситуація складніша.

Одну підінтегральну функцію можна одразу знайти в таблиці інтегралів. Іншу потрібно спочатку перетворити. У третій доцільно виконати заміну змінної. Для четвертої необхідне інтегрування частинами.

Тому перед початком розв'язання потрібно **проаналізувати структуру підінтегральної функції**.

Основні методи, передбачені робочою програмою, такі:

1. безпосереднє інтегрування;
 2. метод заміни змінної;
 3. інтегрування частинами.
-

8. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднім інтегруванням називають знаходження інтеграла шляхом прямого застосування таблиці основних інтегралів та властивостей невизначеного інтеграла.

Цей метод застосовують тоді, коли підінтегральна функція:

- уже має табличний вигляд;
- або легко зводиться до табличного вигляду за допомогою простих алгебраїчних перетворень.

Приклад 2

Обчислити:

$$\int x^4 dx.$$

Розв'язання

Використовуємо степеневу формулу:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

У нашому випадку:

$$n = 4.$$

Тому:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C.$$

Отримуємо:

$$\boxed{\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.}$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^5}{5} + C \right)' &= \frac{1}{5} \cdot 5x^4 + 0. \\ &= x^4. \end{aligned}$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^5}{5} + C.}$$

Приклад 3

Обчислити:

$$\int (3x^2 - 4x + 5) dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Розділимо інтеграл на суму інтегралів

$$\int (3x^2 - 4x + 5) dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int dx.$$

Крок 2. Використаємо табличні інтеграли

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\int dx = x.$$

Тому:

$$3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

Крок 3. Спростимо

$$\boxed{x^3 - 2x^2 + 5x + C.}$$

Перевірка

$$(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5.$$

Отримали початкову функцію.

Відповідь:

$$\boxed{x^3 - 2x^2 + 5x + C.}$$

9. Попереднє перетворення підінтегральної функції

Не завжди інтеграл одразу має табличний вигляд.

Іноді перед інтегруванням потрібно:

- розкрити дужки;
- скоротити дріб;
- розділити чисельник на знаменник;
- записати корінь у вигляді степеня;
- записати дріб як степінь із від'ємним показником.

Таке попереднє перетворення часто значно спрощує інтегрування.

Приклад 4

Обчислити:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Перетворимо функції у степеневий вигляд

Маємо:

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

а:

$$\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}.$$

Тому:

$$\int (x^{1/2} + 2x^{-2}) dx.$$

Крок 2. Розділимо інтеграл

$$\int x^{1/2} dx + 2 \int x^{-2} dx.$$

Крок 3. Використаємо степеневу формулу

Для першого інтеграла:

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}.$$

Отже:

$$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

Для другого:

$$\begin{aligned} 2 \int x^{-2} dx &= 2 \frac{x^{-1}}{-1}. \\ &= -2x^{-1}. \end{aligned}$$

Тому:

$$\boxed{\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{x} + C.}$$

Перевірка

$$\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{x} + C \right)' = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{x} + C.}$$

10. Метод заміни змінної

Безпосереднє інтегрування не завжди можливе.

Розглянемо, наприклад:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx.$$

Вираз:

$$(x^2 + 1)^5$$

не є просто степенем x . Проте всередині нього міститься вираз:

$$x^2 + 1,$$

а його похідна:

$$2x$$

також присутня в підінтегральному виразі.

У такому випадку доцільно застосувати **метод заміни змінної**.

Ідея методу полягає в тому, щоб складний внутрішній вираз позначити новою змінною і тим самим звести інтеграл до простішого табличного вигляду.

11. Основна схема методу заміни змінної

Нехай:

$$u = \varphi(x).$$

Тоді:

$$du = \varphi'(x) dx.$$

Якщо в початковому інтегралі присутні $\varphi(x)$, і $\varphi'(x) dx$, то можна перейти від змінної x до змінної u .

У загальному вигляді:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du.}$$

Після знаходження інтеграла необхідно повернутися до початкової змінної.

12. Алгоритм методу заміни змінної

Крок 1. Проаналізувати підінтегральний вираз.

Крок 2. Виділити внутрішній вираз, який доцільно позначити новою змінною.

Крок 3. Записати:

$$u = \varphi(x).$$

Крок 4. Знайти диференціал:

$$du = \varphi'(x) dx.$$

Крок 5. Перетворити початковий інтеграл до нової змінної.

Крок 6. Обчислити отриманий інтеграл.

Крок 7. Повернутися до змінної x .

Крок 8. Додати сталу інтегрування C .

Крок 9. Перевірити результат диференціюванням.

Приклад 5

Обчислити:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Виберемо заміну

Позначимо:

$$u = x^2 + 1.$$

Крок 2. Знайдемо диференціал

$$du = 2x dx.$$

У початковому інтегралі якраз присутній множник:

$$2x dx.$$

Тому:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \int u^5 du.$$

Крок 3. Інтегруємо

За степеневою формулою:

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C.$$

Крок 4. Повернемося до змінної x

Оскільки:

$$u = x^2 + 1,$$

отримуємо:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$\left[\frac{(x^2 + 1)^6}{6} \right]' = \frac{1}{6} \cdot 6(x^2 + 1)^5 \cdot 2x.$$

Скорочуємо:

$$= 2x(x^2 + 1)^5.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C.$$

Приклад 6

Обчислити:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx.$$

Розв'язання

У знаменнику міститься вираз:

$$x^2 + 4.$$

Його похідна:

$$2x.$$

Саме такий множник знаходиться в чисельнику.

Крок 1. Виконаємо заміну

$$u = x^2 + 4.$$

Крок 2. Знайдемо диференціал

$$du = 2x dx.$$

Тоді:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \int \frac{du}{u}.$$

Крок 3. Використаємо табличний інтеграл

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

Крок 4. Повернемося до x

$$\ln |x^2 + 4| + C.$$

Оскільки:

$$x^2 + 4 > 0$$

для всіх дійсних x , можна записати:

$$\boxed{\ln(x^2 + 4) + C.}$$

Перевірка

$$[\ln(x^2 + 4)]' = \frac{2x}{x^2 + 4}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\ln(x^2 + 4) + C.}$$

Приклад 7

Обчислити:

$$\int \cos(3x) dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Виконаємо заміну

$$u = 3x.$$

Тоді:

$$du = 3dx.$$

Звідси:

$$dx = \frac{1}{3} du.$$

Крок 2. Підставимо

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int \cos u du.$$

Крок 3. Використаємо таблицю

$$\int \cos u du = \sin u + C.$$

Отже:

$$\frac{1}{3} \sin u + C.$$

Крок 4. Повернемося до x

$$\boxed{\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C.}$$

Перевірка

$$\left[\frac{1}{3} \sin(3x) \right]' = \frac{1}{3} \cos(3x) \cdot 3 = \cos(3x).$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{3} \sin(3x) + C.}$$

13. Як розпізнати інтеграл для заміни змінної

Метод заміни особливо зручний, коли підінтегральний вираз має структуру:

$$f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Тобто в інтегралі присутня деяка складена функція і, можливо з точністю до сталого множника, похідна її внутрішньої частини.

Наприклад:

$$\begin{aligned} &\int x(x^2 + 5)^4 dx; \\ &\int \frac{x}{x^2 + 1} dx; \\ &\int e^{2x} dx; \\ &\int \sin(5x) dx. \end{aligned}$$

У кожному випадку необхідно знайти внутрішній вираз і перевірити, чи присутня його похідна в підінтегральному виразі.

Приклад 8

Обчислити:

$$\int x (x^2 + 3)^4 dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Позначимо внутрішній вираз

$$u = x^2 + 3.$$

Крок 2. Знайдемо диференціал

$$du = 2x dx.$$

У початковому інтегралі маємо лише:

$$x dx.$$

Тому:

$$x dx = \frac{1}{2} du.$$

Крок 3. Виконаємо заміну

$$\int x (x^2 + 3)^4 dx = \frac{1}{2} \int u^4 du.$$

Крок 4. Інтегруємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + C. \\ & = \frac{u^5}{10} + C. \end{aligned}$$

Крок 5. Повертаємося до змінної x

$$\boxed{\frac{(x^2 + 3)^5}{10} + C.}$$

Перевірка

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(x^2 + 3)^5}{10} \right]' = \frac{1}{10} \cdot 5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x. \\ & = x(x^2 + 3)^4. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{(x^2 + 3)^5}{10} + C.}$$

14. Інтегрування частинами

Наступним основним методом є **інтегрування частинами**.

Він ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій.

Відомо:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

У диференціальній формі:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Після перетворення отримуємо основну формулу інтегрування частинами:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.}$$

Інтегрування частинами прямо передбачено робочою програмою як один з основних методів інтегрування.

15. Сутність методу інтегрування частинами

Початковий інтеграл подають у вигляді:

$$\int u dv.$$

Після цього:

1. вибирають u ;
2. решту підінтегрального виразу приймають за dv ;
3. знаходять du ;
4. інтегрують dv і знаходять v ;
5. застосовують формулу:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Мета такого перетворення полягає в тому, щоб новий інтеграл:

$$\int v \, du$$

був простішим за початковий.

16. Як вибирати u і dv

Це один із найважливіших моментів методу.

Зазвичай за u доцільно вибирати таку частину підінтегрального виразу, яка спрощується після диференціювання.

Наприклад, для:

$$x, x^2, x^3$$

після диференціювання степінь зменшується.

Тому в інтегралах виду:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx, \\ \int x \sin x \, dx, \\ \int x \cos x \, dx \end{aligned}$$

за u зазвичай доцільно брати степеневий множник x .

Приклад 9

Обчислити:

$$\int x e^x \, dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Виберемо u і dv

Нехай:

$$u = x.$$

Тоді:

$$dv = e^x \, dx.$$

Крок 2. Знайдемо du

$$du = dx.$$

Крок 3. Знайдемо v

$$v = \int e^x dx.$$
$$v = e^x.$$

Крок 4. Застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Тому:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx.$$

Крок 5. Обчислимо залишковий інтеграл

$$\int e^x dx = e^x.$$

Отже:

$$\boxed{\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.}$$

Можна винести e^x :

$$\boxed{e^x(x - 1) + C.}$$

Перевірка

$$[e^x(x - 1)]' = e^x(x - 1) + e^x.$$
$$= e^x x.$$

Отже:

$$[e^x(x - 1)]' = x e^x.$$

Відповідь:

$$\boxed{e^x(x - 1) + C.}$$

Приклад 10

Обчислити:

$$\int x \cos x dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Виберемо функції

Нехай:

$$u = x,$$
$$dv = \cos x \, dx.$$

Крок 2. Знайдемо du

$$du = dx.$$

Крок 3. Знайдемо v

$$v = \int \cos x \, dx.$$
$$v = \sin x.$$

Крок 4. Застосуємо формулу

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx.$$

Відомо:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x.$$

Тому:

$$x \sin x - (-\cos x).$$

Отже:

$$\boxed{\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C.}$$

Перевірка

$$(x \sin x + \cos x)'.$$

Застосовуємо правило похідної добутку:

$$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

Також:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Тому:

$$\sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\boxed{x \sin x + \cos x + C.}$$

Приклад 11

Обчислити:

$$\int x \sin x \, dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Вибираємо

$$\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Крок 2. Знаходимо du

$$du = dx.$$

Крок 3. Знаходимо v

$$\begin{aligned} v &= \int \sin x \, dx. \\ v &= -\cos x. \end{aligned}$$

Крок 4. Використовуємо формулу

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx.$$

Отже:

$$\begin{aligned} &= -x \cos x + \int \cos x \, dx. \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\boxed{\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.}$$

Перевірка

$$(-x \cos x + \sin x)'$$

За правилом добутку:

$$(-x \cos x)' = -\cos x + x \sin x.$$

Також:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Отже:

$$-\cos x + x \sin x + \cos x = x \sin x.$$

Відповідь:

$$\boxed{-x \cos x + \sin x + C.}$$

17. Інтегрування логарифмічної функції частинами

На перший погляд інтеграл:

$$\int \ln x \, dx$$

не є добутком двох функцій.

Але його можна записати:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Тому також можна використати інтегрування частинами.

Приклад 12

Обчислити:

$$\int \ln x \, dx.$$

Розв'язання

Виберемо:

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \\ dv &= dx. \end{aligned}$$

Тоді:

$$du = \frac{1}{x} dx,$$

а:

$$v = x.$$

Застосовуємо:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Отримуємо:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx.$$

Скорочуємо:

$$= x \ln x - \int 1 \, dx.$$

Тому:

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.}$$

Перевірка

$$(x \ln x - x)'.$$

За правилом добутку:

$$(x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Тому:

$$\begin{aligned} (x \ln x - x)' &= \ln x + 1 - 1. \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\boxed{x \ln x - x + C.}$$

18. Повторне інтегрування частинами

Іноді одного застосування формули інтегрування частинами недостатньо.

Наприклад, якщо в інтегралі міститься:

$$x^2 e^x,$$

після першого інтегрування частинами виникне інтеграл:

$$\int x e^x \, dx,$$

який також потрібно інтегрувати частинами.

Приклад 13

Обчислити:

$$\int x^2 e^x dx.$$

Розв'язання

Перше інтегрування частинами

Виберемо:

$$u = x^2, \\ dv = e^x dx.$$

Тоді:

$$du = 2x dx, \\ v = e^x.$$

Отже:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Але інтеграл:

$$\int x e^x dx$$

уже був розглянутий.

Він дорівнює:

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x.$$

Тому:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C.$$

Розкриваємо дужки:

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Виносимо e^x :

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.}$$

Перевірка

Диференціюємо:

$$[e^x(x^2 - 2x + 2)]'.$$

За правилом добутку:

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2).$$

Виносимо e^x :

$$\begin{aligned} &= e^x[x^2 - 2x + 2 + 2x - 2]. \\ &= x^2 e^x. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\boxed{e^x(x^2 - 2x + 2) + C.}$$

19. Порівняння основних методів інтегрування

Для правильного вибору методу корисно розрізняти характерні ознаки.

Вид підінтегральної функції	Доцільний метод
Таблична функція	безпосереднє інтегрування
Сума або різниця табличних функцій	безпосереднє інтегрування
Вираз, який після алгебраїчного перетворення стає табличним	безпосереднє інтегрування
Складена функція разом із похідною внутрішнього виразу	заміна змінної
Добуток степеневі функції на показникову або тригонометричну	інтегрування частинами
Логарифмічна функція	часто інтегрування частинами

Ця таблиця не є механічним правилом для всіх можливих інтегралів, але вона допомагає правильно обирати метод у типових навчальних задачах.

20. Як визначити метод інтегрування

Перед виконанням інтеграла доцільно поставити собі кілька запитань.

Перше запитання: чи є інтеграл табличним?

Якщо так — застосовуємо безпосереднє інтегрування.

Друге запитання: чи можна спростити підінтегральний вираз?

Якщо можна — спочатку виконуємо алгебраїчні перетворення.

Третє запитання: чи містить інтеграл складений вираз та його похідну?

Якщо так — доцільно використати заміну змінної.

Четверте запитання: чи є підінтегральний вираз добутком функцій, одна з яких спрощується після диференціювання?

Якщо так — доцільно перевірити можливість інтегрування частинами.

21. Комплексний приклад

Обчислити:

$$\int \left(4x^3 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx.$$

Розв’язання

У цьому прикладі потрібно використати різні прийоми.

Крок 1. Розділимо інтеграл

$$\int 4x^3 dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$$

Крок 2. Обчислимо перший інтеграл безпосередньо

$$\begin{aligned} & 4 \int x^3 dx. \\ & = 4 \cdot \frac{x^4}{4}. \\ & = x^4. \end{aligned}$$

Крок 3. Для другого інтеграла використаємо заміну

Нехай:

$$u = x^2 + 1.$$

Тоді:

$$du = 2x dx.$$

Отже:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{du}{u}. \\ &= \ln |u|. \end{aligned}$$

Оскільки:

$$x^2 + 1 > 0,$$

маємо:

$$= \ln(x^2 + 1).$$

Крок 4. Запишемо загальний результат

$$\boxed{x^4 + \ln(x^2 + 1) + C.}$$

Перевірка

$$[x^4 + \ln(x^2 + 1) + C]' = 4x^3 + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\boxed{x^4 + \ln(x^2 + 1) + C.}$$

22. Перевірка інтеграла за допомогою диференціювання

Перевірка є важливою частиною розв'язання.

Якщо отримано:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то необхідно перевірити:

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо рівність виконується, результат інтегрування правильний.

Робоча програма окремо передбачає **перевірку результату інтегрування за допомогою диференціювання**.

23. Приклад перевірки

Нехай отримано:

$$\int (6x^2 + 4x) dx = 2x^3 + 2x^2 + C.$$

Перевіримо.

Знайдемо похідну:

$$\begin{aligned} & (2x^3 + 2x^2 + C)' \\ &= 6x^2 + 4x. \end{aligned}$$

Це початкова підінтегральна функція.

Отже, результат правильний.

24. Типові помилки під час інтегрування

Перша помилка — відсутність сталої інтегрування

Неправильно:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Правильно:

$$\boxed{\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.}$$

Для невизначеного інтеграла сталу C необхідно записувати.

Друга помилка — неправильне застосування степеневої формули

Неправильно:

$$\int x^3 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Правильно спочатку збільшити показник степеня на одиницю:

$$3 + 1 = 4,$$

а потім поділити на новий показник:

$$\boxed{\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.}$$

Третя помилка — застосування степеневої формули до $\frac{1}{x}$

Не можна використовувати:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

при:

$$n = -1,$$

оскільки знаменник став би нулем.

Тому:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.}$$

Четверта помилка — неправильна заміна змінної

Якщо:

$$u = x^2 + 1,$$

то обов'язково:

$$du = 2x \, dx.$$

Не можна замінити тільки вираз $x^2 + 1$, не врахувавши зміну диференціала.

П'ята помилка — після заміни залишають одночасно x і u

Після правильно виконаної заміни інтеграл повинен бути повністю записаний через нову змінну.

Не слід отримувати вирази, у яких без необхідності одночасно залишаються x і u .

Шоста помилка — неправильний вибір u під час інтегрування частинами

Функцію u бажано вибирати так, щоб після диференціювання вона ставала простішою.

Сьома помилка — неправильний знак у формулі інтегрування частинами

Необхідно пам'ятати:

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du.}$$

Перед другим інтегралом стоїть знак **мінус**.

Восьма помилка — відсутність перевірки

Навіть невелика помилка в коефіцієнті або знаку може дати неправильний результат.

Тому після знаходження первісної бажано виконувати диференціювання.

25. Зв'язок інтегрування з автомобільним транспортом

Робоча програма підкреслює прикладний характер теми: методи інтегрування використовуються для відновлення функціональної залежності за відомою швидкістю її зміни та в задачах механіки й автомобільного транспорту.

Найпростіший приклад — зв'язок між прискоренням, швидкістю та шляхом.

Якщо:

$$a(t) = v'(t),$$

то, знаючи прискорення, швидкість можна відновити інтегруванням:

$$v(t) = \int a(t) dt.$$

А якщо:

$$v(t) = s'(t),$$

то за відомою швидкістю можна знайти закон зміни координати або шляху:

$$s(t) = \int v(t) dt.$$

Під час роботи з невизначеним інтегралом у результаті виникає довільна стала. Для визначення її конкретного значення необхідна додаткова початкова умова.

Приклад 14. Відновлення швидкості за прискоренням

Прискорення автомобіля змінюється за законом:

$$a(t) = 6t + 2.$$

Знайти загальний закон зміни швидкості.

Розв'язання

Оскільки:

$$a(t) = v'(t),$$

то:

$$v(t) = \int a(t) dt.$$

Підставляємо:

$$v(t) = \int (6t + 2) dt.$$

Розділяємо:

$$v(t) = 6 \int t dt + 2 \int dt.$$

Обчислюємо:

$$6 \cdot \frac{t^2}{2} + 2t + C.$$

Отже:

$$v(t) = 3t^2 + 2t + C.$$

Перевірка

$$v'(t) = (3t^2 + 2t + C)'$$

$$v'(t) = 6t + 2.$$

Отримали задане прискорення.

Відповідь:

$$v(t) = 3t^2 + 2t + C.$$

Якщо додатково буде відома початкова швидкість, можна визначити конкретне значення сталої C .

26. Приклад відновлення закону руху

Нехай швидкість руху задано функцією:

$$v(t) = 4t + 3.$$

Знайти загальний закон зміни координати.

Розв'язання

Оскільки:

$$v(t) = s'(t),$$

маємо:

$$s(t) = \int v(t) dt.$$

Тому:

$$s(t) = \int (4t + 3) dt.$$

Розділяємо:

$$s(t) = 4 \int t dt + 3 \int dt.$$

Отримуємо:

$$s(t) = 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t + C.$$

Отже:

$$s(t) = 2t^2 + 3t + C.$$

Перевірка

$$s'(t) = (2t^2 + 3t + C)'$$

$$s'(t) = 4t + 3.$$

Це початкова функція швидкості.

Відповідь:

$$s(t) = 2t^2 + 3t + C.$$

27. Загальний алгоритм обчислення невизначеного інтеграла

Під час розв'язування задач рекомендується дотримуватися такої послідовності.

Крок 1. Проаналізувати підінтегральну функцію.

Крок 2. Перевірити, чи є інтеграл табличним.

Крок 3. Якщо необхідно, виконати алгебраїчні перетворення.

Крок 4. Визначити метод інтегрування.

Якщо функція має табличний вигляд — використати **безпосереднє інтегрування**.

Якщо бачимо складену функцію разом із похідною її внутрішнього виразу — перевірити **метод заміни змінної**.

Якщо маємо відповідний добуток функцій — перевірити **інтегрування частинами**.

Крок 5. Виконати обчислення.

Крок 6. Повернутися до початкової змінної, якщо використовувалася заміна.

Крок 7. Обов'язково додати:

$$+C.$$

Крок 8. Перевірити результат диференціюванням.

28. Узагальнення матеріалу лекції

Основним завданням невизначеного інтегрування є знаходження первісної заданої функції.

При цьому не існує одного універсального обчислювального прийому для всіх інтегралів. Необхідно навчитися аналізувати структуру підінтегральної функції та вибирати відповідний метод.

Безпосереднє інтегрування застосовується, коли інтеграл уже є табличним або легко зводиться до табличного.

Метод заміни змінної доцільний, коли в підінтегральному виразі можна виділити складену функцію та похідну її внутрішнього виразу.

Інтегрування частинами використовується тоді, коли підінтегральний вираз доцільно представити у вигляді $u dv$, а після застосування формули отримується простіший інтеграл.

Особливо важливим етапом є перевірка.

Якщо:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то повинно виконуватися:

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

Саме ця перевірка демонструє взаємно обернений зв'язок між диференціюванням та інтегруванням.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що називається первісною функції?
2. Яка рівність пов'язує первісну з початковою функцією?
3. Що називається невизначеним інтегралом?
4. Що означає знак інтеграла?
5. Що називається підінтегральною функцією?
6. Що називається підінтегральним виразом?
7. Що означає dx у записі інтеграла?
8. Чому до результату невизначеного інтегрування додається стала C ?
9. Що називається інтегруванням?
10. Який зв'язок існує між диференціюванням та інтегруванням?

11. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
12. Чи можна сталий множник винести за знак інтеграла?
13. Як інтегрується сума функцій?
14. Як інтегрується різниця функцій?
15. Яка формула використовується для інтегрування степеневі функції?
16. Чому ця формула не застосовується при $n = -1$?
17. Чому дорівнює інтеграл від $\frac{1}{x}$?
18. Чому дорівнює інтеграл від e^x ?
19. Чому дорівнює інтеграл від $\sin x$?
20. Чому дорівнює інтеграл від $\cos x$?
21. Що називається безпосереднім інтегруванням?
22. У яких випадках застосовується безпосереднє інтегрування?
23. Які перетворення можна виконувати перед інтегруванням?
24. У чому полягає метод заміни змінної?
25. Який вираз доцільно вибирати як нову змінну?
26. Як знаходиться du після введення нової змінної?
27. Чому після заміни бажано повністю перейти до нової змінної?
28. Який алгоритм інтегрування методом заміни змінної?
29. За якою формулою виконується інтегрування частинами?
30. На якому правилі диференціювання ґрунтується інтегрування частинами?
31. Як доцільно вибирати функцію u ?
32. Що потрібно знайти, якщо задано dv ?
33. Чому новий інтеграл після інтегрування частинами повинен бути простішим?
34. Чи можна застосовувати інтегрування частинами декілька разів?
35. Як інтегрувати $\ln x$ методом частин?
36. Які характерні інтеграли доцільно знаходити методом частин?
37. Як перевірити результат інтегрування?

38. Чому диференціювання є надійним способом перевірки невизначеного інтеграла?
39. Які типові помилки виникають під час заміни змінної?
40. Які типові помилки виникають під час інтегрування частинами?
41. Чому не можна забувати сталу інтегрування?
42. Як за відомим прискоренням відновити закон зміни швидкості?
43. Як за відомою швидкістю відновити закон зміни координати?
44. Для чого в прикладній задачі потрібні початкові умови?
45. Які три основні методи інтегрування розглянуто в лекції?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Основні методи інтегрування».

Повторити поняття первісної та невизначеного інтеграла, основні властивості невизначеного інтеграла і таблицю основних інтегралів.

Вивчити та вміти пояснювати три основні методи:

безпосереднє інтегрування;

метод заміни змінної;

інтегрування частинами.

Особливу увагу звернути на формули:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du;$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Самостійно обчислити інтеграли:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 2) dx;$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx;$$

$$\int 2x(x^2 + 5)^3 dx;$$

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx;$$

$$\int \sin(4x) dx;$$

$$\int x e^x dx;$$

$$\int x \sin x dx;$$

$$\int x \cos x dx;$$

$$\int \ln x dx;$$

$$\int x^2 e^x dx.$$

Для кожного знайденого невизначеного інтеграла виконати **перевірку диференціюванням**.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
4. Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І. *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.

5. Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Тема 4.1 передбачає вивчення первісної, невизначеного інтеграла, його властивостей, таблиці інтегралів, безпосереднього інтегрування, методу заміни змінної, інтегрування частинами та перевірки результатів диференціюванням.

Лекція 15

ТЕМА: Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

МЕТА: сформувати у здобувачів освіти поняття про диференціальні рівняння та їх роль у математичному описі процесів, що змінюються з часом; ознайомити з поняттями порядку диференціального рівняння, загального та частинного розв'язків, інтегральної кривої, початкової умови та задачі Коші; навчити розпізнавати диференціальні рівняння першого порядку; сформувати практичні навички розв'язування найпростіших диференціальних рівнянь першого порядку та рівнянь з відокремлюваними змінними; навчити правильно відокремлювати змінні, інтегрувати отримані вирази, знаходити довільну сталу за початковою умовою та перевіряти отриманий розв'язок підстановкою у вихідне рівняння; показати практичне значення диференціальних рівнянь для опису процесів руху, зміни швидкості та інших технічних процесів автомобільного транспорту.

ТИП ЗАНЯТТЯ: лекція з елементами практики.

ОСНАЩЕННЯ: опорні конспекти, навчальні посібники з вищої математики, мультимедійні засоби.

Тема повністю відповідає робочій програмі дисципліни «Вища математика» для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт». Вона відкриває змістовий модуль 5 «Диференціальні рівняння». Після цієї лекції програмою окремо передбачено самостійну роботу «Диференціальні лінійні рівняння першого порядку» та практичне заняття «Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку». Тому в цій лекції основну увагу приділяємо саме загальним поняттям і рівнянням з відокремлюваними змінними, не переходячи завчасно до лінійних диференціальних рівнянь.

Теоретичну основу лекції також становить навчальний посібник Г. Г. Кашканової та А. А. Коломієць «Диференціальні рівняння», у якому окремо виділено розділи «Диференціальні рівняння першого порядку» та «Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними».

ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.

4. Мотивація навчальної діяльності, актуалізація опорних знань.

5. Вивчення нового матеріалу:

1. Поняття про диференціальне рівняння.
2. Звичайне диференціальне рівняння.
3. Порядок диференціального рівняння.
4. Диференціальне рівняння першого порядку.
5. Розв'язок диференціального рівняння.
6. Загальний та частинний розв'язки.
7. Інтегральна крива.
8. Початкова умова. Задача Коші.
9. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку.
10. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
11. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
12. Алгоритм розв'язування рівнянь з відокремлюваними змінними.
13. Знаходження частинного розв'язку за початковою умовою.
14. Перевірка отриманого розв'язку.
15. Застосування диференціальних рівнянь у механіці та автомобільному транспорті.

Навчальні матеріали лекції

1. Мотивація вивчення диференціальних рівнянь

Під час вивчення похідної ми встановили, що похідна характеризує **швидкість зміни функції**. Наприклад, якщо координата матеріальної точки залежить від часу:

$$s = s(t),$$

то її швидкість визначається похідною:

$$v(t) = s'(t).$$

У свою чергу, прискорення є похідною швидкості:

$$a(t) = v'(t).$$

У попередній лекції було встановлено, що за відомою похідною функцію можна відновити за допомогою інтегрування.

Проте в реальних технічних процесах швидкість зміни величини часто залежить не тільки від часу, а й від самої величини.

Наприклад, можна розглядати ситуацію, коли швидкість зміни певного параметра упрорційна його поточному значенню. Математично це можна записати:

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

де k — стала величина.

У цьому рівнянні невідомою є не число y , а **функція** $y = y(x)$.

Такі рівняння називають диференціальними.

Диференціальні рівняння є одним із важливих засобів математичного моделювання, оскільки дозволяють описувати не тільки стан системи в певний момент, а й **закон її зміни**.

Для майбутнього фахівця автомобільного транспорту це важливо під час математичного опису руху автомобіля, зміни швидкості, прискорення, коливальних та інших механічних процесів. Робоча програма надалі окремо передбачає математичне моделювання коливань підвіски, процесів розгону та гальмування автомобіля.

2. Поняття диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке містить невідому функцію, її похідні або диференціали.

Наприклад:

$$\begin{aligned}y' &= 2x; \\y' &= 3y; \\y' &= xy; \\y'' + 4y &= 0.\end{aligned}$$

На відміну від звичайного алгебраїчного рівняння, де необхідно знайти невідоме число, у диференціальному рівнянні необхідно знайти **невідому функцію**.

Наприклад, у рівнянні:

$$y' = 2x$$

потрібно знайти функцію $y = y(x)$, похідна якої дорівнює $2x$.

Інтегруємо:

$$y = \int 2x \, dx.$$

Отримуємо:

$$y = x^2 + C.$$

Отже, розв'язком є не одне число, а ціла сім'я функцій:

$$\boxed{y = x^2 + C.}$$

3. Звичайне диференціальне рівняння

Якщо невідома функція залежить від однієї незалежної змінної, то відповідне диференціальне рівняння називають **звичайним диференціальним рівнянням**.

У нашому курсі розглядаємо функцію:

$$y = y(x).$$

Її похідні:

$$y', y'', y''', \dots$$

залежать від тієї самої незалежної змінної x .

У технічних задачах незалежною змінною часто є час t . Тоді можна мати:

$$v = v(t),$$

а диференціальне рівняння міститиме похідну:

$$\frac{dv}{dt}.$$

4. Порядок диференціального рівняння

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної невідомої функції, яка входить до цього рівняння.

Розглянемо приклади.

Перше рівняння

$$y' = x + y.$$

Найвища похідна:

$$y'.$$

Це похідна першого порядку.

Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку.

Друге рівняння

$$y'' + 3y' - 2y = 0.$$

Найвища похідна:

$$y''.$$

Отже, це диференціальне рівняння другого порядку.

Третє рівняння

$$y''' + y = 5x.$$

Найвища похідна має третій порядок.

Отже, це диференціальне рівняння третього порядку.

Приклад 1

Визначити порядок диференціального рівняння:

$$y' + 4xy = 0.$$

Розв'язання

У рівнянні міститься похідна:

$$y'.$$

Це похідна першого порядку.

Похідних другого або вищих порядків у рівнянні немає.

Отже, дане рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку.

Відповідь: рівняння першого порядку.

Приклад 2

Визначити порядок рівняння:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Розв'язання

У рівнянні містяться:

$$y'$$

та:

$$y''.$$

Найвищою є похідна:

$$y''.$$

Отже, порядок рівняння дорівнює двом.

Відповідь: диференціальне рівняння другого порядку.

5. Диференціальне рівняння першого порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку можна подати як співвідношення між незалежною змінною x , невідомою функцією y та її першою похідною y' :

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо рівняння можна розв'язати відносно похідної, воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y).$$

Оскільки:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

те саме рівняння можна записувати:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Саме диференціальні рівняння першого порядку є предметом цієї лекції.

6. Що означає розв'язати диференціальне рівняння

Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти таку функцію $y = \varphi(x)$, яка після підстановки разом зі своїми необхідними похідними перетворює диференціальне рівняння на правильну рівність.

Наприклад, розглянемо:

$$y' = 2x.$$

Припустимо, що:

$$y = x^2 + 5.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x.$$

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$2x = 2x.$$

Отримали правильну рівність.

Отже:

$$y = x^2 + 5$$

є одним із розв'язків рівняння.

Але число 5 можна замінити будь-якою сталою C , тому:

$$\boxed{y = x^2 + C}$$

задає сім'ю розв'язків.

7. Загальний розв'язок диференціального рівняння

Для диференціального рівняння першого порядку загальний розв'язок зазвичай містить **одну довільну сталу**.

У явному вигляді його можна записати:

$$\boxed{y = \varphi(x, C),}$$

де C — довільна стала.

Наприклад:

$$y' = 3x^2.$$

Інтегруємо:

$$y = \int 3x^2 dx.$$

Отримуємо:

$$\boxed{y = x^3 + C.}$$

Це загальний розв'язок рівняння.

При різних значеннях C отримуємо різні функції:

$$y = x^3;$$

$$y = x^3 + 1;$$

$$y = x^3 - 2;$$

і так далі.

8. Частинний розв'язок

Якщо довільній сталій C надати конкретне значення, отримаємо **частинний розв'язок**.

Наприклад, загальний розв'язок:

$$y = x^2 + C.$$

Якщо:

$$C = 3,$$

то:

$$y = x^2 + 3.$$

Це один із частинних розв'язків.

Якщо:

$$C = -5,$$

то:

$$y = x^2 - 5.$$

Це інший частинний розв'язок того самого диференціального рівняння.

9. Інтегральна крива

Графік конкретного розв'язку диференціального рівняння називають **інтегральною кривою** цього рівняння.

Наприклад, загальному розв'язку:

$$y = x^2 + C$$

відповідає сім'я парабол.

При:

$$C = 0$$

маємо:

$$y = x^2.$$

При:

$$C = 2$$

маємо:

$$y = x^2 + 2.$$

При:

$$C = -2$$

маємо:

$$y = x^2 - 2.$$

Кожна з цих парабол є окремою інтегральною кривою.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає не обов'язково одну криву, а цілу сім'ю кривих.

10. Початкова умова

Для того щоб із сім'ї розв'язків вибрати один конкретний розв'язок, задають додаткову умову.

Для рівняння першого порядку початкову умову записують:

$$\boxed{y(x_0) = y_0.}$$

Це означає, що шукана інтегральна крива повинна проходити через точку:

$$M(x_0; y_0).$$

11. Задача Коші

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє задану початкову умову:

$$y(x_0) = y_0,$$

називається **задачею Коші**.

Схематично:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Спочатку знаходять загальний розв'язок, а потім за початковою умовою визначають довільну сталу.

Приклад 3

Розв'язати рівняння:

$$y' = 2x$$

за початкової умови:

$$y(0) = 3.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо загальний розв'язок

Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Звідси:

$$dy = 2x \, dx.$$

Інтегруємо:

$$\int d y = \int 2 x \, dx.$$

Отримуємо:

$$y = x^2 + C.$$

Крок 2. Використаємо початкову умову

Відомо:

$$y(0) = 3.$$

Підставляємо:

$$3 = 0^2 + C.$$

Отже:

$$C = 3.$$

Крок 3. Запишемо частинний розв'язок

$$\boxed{y = x^2 + 3.}$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x.$$

Вона збігається з правою частиною вихідного рівняння.

Перевіримо початкову умову:

$$y(0) = 0^2 + 3 = 3.$$

Умова також виконується.

Відповідь:

$$y = x^2 + 3.$$

12. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Найпростішим типом диференціальних рівнянь першого порядку є рівняння, у яких змінні вже розміщені окремо.

Таке рівняння можна подати у вигляді:

$$M(x) dx + N(y) dy = 0.$$

Тут перший доданок залежить тільки від x , а другий — тільки від y .

Наприклад:

$$x dx + y dy = 0.$$

У цьому рівнянні змінні вже відокремлені.

Для розв'язування достатньо проінтегрувати обидві частини.

Приклад 4

Розв'язати:

$$x dx + y dy = 0.$$

Розв'язання

Перенесемо один доданок у праву частину:

$$y dy = -x dx.$$

Інтегруємо:

$$\int y dy = - \int x dx.$$

За степеневою формулою:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Перенесемо член з x у ліву частину:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Помножимо рівність на 2:

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Довільну сталу після множення можна позначити новою сталою C_1 .

Отже, загальний розв'язок можна записати:

$$\boxed{x^2 + y^2 = C.}$$

Перевірка

Диференціюємо рівність:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Отримуємо:

$$2x dx + 2y dy = 0.$$

Ділимо на 2:

$$x dx + y dy = 0.$$

Отримали початкове рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{x^2 + y^2 = C.}$$

13. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Значно частіше змінні у вихідному рівнянні ще не відокремлені, але їх можна відокремити за допомогою алгебраїчних перетворень.

Такі рівняння називають **диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними**.

Один із типових видів такого рівняння:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).}$$

Ідея методу полягає в тому, щоб усі вирази, які містять y , перенести до частини з dy , а всі вирази, які містять x , — до частини з dx .

Якщо:

$$g(y) \neq 0,$$

то ділимо на $g(y)$:

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Множимо на dx :

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Тепер змінні відокремлені.

Далі інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Саме рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними виділено в наданому навчальному посібнику як окремий тип диференціальних рівнянь першого порядку.

14. Алгоритм розв’язування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

Розв’язування доцільно виконувати в чіткій послідовності.

Крок 1. Записати похідну у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Крок 2. Виконати алгебраїчні перетворення та відокремити змінні.

У лівій частині повинні залишитися вирази з y і dy , а у правій — вирази з x і dx .

Крок 3. Проінтегрувати обидві частини.

Крок 4. Обчислити отримані інтеграли.

Крок 5. Записати довільну сталу.

Крок 6. За можливості виразити учереz x .

Крок 7. Якщо задано початкову умову, знайти значення довільної сталої.

Крок 8. Перевірити отриманий розв’язок.

Приклад 5

Розв’язати диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Розв’язання

Крок 1. Аналізуємо рівняння

У правій частині маємо добуток:

$$x \cdot y.$$

Отже, змінні можна відокремити.

Крок 2. Відокремлюємо змінні

Ділимо на y :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x.$$

Множимо на dx :

$$\frac{dy}{y} = x \, dx.$$

Змінні відокремлено.

Крок 3. Інтегруємо обидві частини

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx.$$

Отримуємо:

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

Крок 4. Виразимо y

Піднесемо обидві частини до степеня з основою e :

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C}.$$

Використовуємо властивість показникової функції:

$$|y| = e^C e^{x^2/2}.$$

Сталий множник разом зі знаком можна позначити через нову довільну сталу C_1 .

Тоді:

$$\boxed{y = C_1 e^{x^2/2}.$$

Зазвичай індекс у довільної сталої надалі опускають:

$$\boxed{y = C e^{x^2/2}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = Ce^{x^2/2} \cdot x.$$

Але:

$$Ce^{x^2/2} = y.$$

Тому:

$$y' = xy.$$

Отримали вихідне рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{x^2/2}}.$$

15. Важливе зауваження щодо ділення на функцію

Під час відокремлення змінних у попередньому прикладі ми поділили рівняння на y .

Але ділення на упередбачає:

$$y \neq 0.$$

Тому необхідно окремо перевірити, чи не є:

$$y = 0$$

розв'язком початкового рівняння.

Підставляємо:

$$y = 0.$$

Тоді:

$$y' = 0,$$

а:

$$xy = x \cdot 0 = 0.$$

Отримуємо:

$$0 = 0.$$

Отже:

$$y = 0$$

також є розв'язком.

У формі:

$$y = C e^{x^2/2}$$

цей розв'язок уже враховано при:

$$C = 0.$$

Однак сам принцип дуже важливий: **якщо під час перетворень ділимо на вираз, що містить невідому функцію, необхідно перевірити випадок, коли цей вираз дорівнює нулю.**

Приклад 6

Розв'язати:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Розв'язання

Крок 1. Відокремлюємо змінні

При $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 2x \, dx.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx.$$

Ліва частина:

$$\ln |y|.$$

Права частина:

$$x^2 + C.$$

Отже:

$$\ln |y| = x^2 + C.$$

Крок 3. Виразимо y

$$|y| = e^{x^2+C}.$$

$$|y| = e^C e^{x^2}.$$

Об'єднуємо сталий множник та знак у довільну сталу:

$$\boxed{y = Ce^{x^2}.}$$

Перевірка

$$y' = Ce^{x^2} \cdot 2x.$$

Оскільки:

$$Ce^{x^2} = y,$$

отримуємо:

$$y' = 2xy.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{x^2}.}$$

Приклад 7

Розв'язати:

$$y' = x(1 + y^2).$$

Розв'язання

Запишемо:

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2).$$

Крок 1. Відокремимо змінні

Ділимо на:

$$1 + y^2.$$

Отримуємо:

$$\frac{1}{1 + y^2} \frac{dy}{dx} = x.$$

Множимо на dx :

$$\frac{dy}{1 + y^2} = x \, dx.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x \, dx.$$

Використовуємо табличні інтеграли:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y,$$

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Отже:

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Крок 3. Виразимо у

Застосовуємо функцію тангенса:

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x^2}{2} + C\right)} \cdot x.$$

Використовуємо тотожність:

$$\frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z.$$

Оскільки:

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

то:

$$y' = x(1 + y^2).$$

Отримали вихідне рівняння.

Відповідь:

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

16. Рівняння з дробовою правою частиною

Рівняння з відокремлюваними змінними може мати вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Тоді множимо обидві частини на:

$$g(y) dx.$$

Отримуємо:

$$g(y) dy = f(x) dx.$$

Після цього інтегруємо обидві частини.

Приклад 8

Розв'язати:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Розв'язання

Крок 1. Відокремимо змінні

Помножимо на:

$$y dx.$$

Отримаємо:

$$y dy = x dx.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int y dy = \int x dx.$$

Отже:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C_1.$$

Переназвемо довільну сталу:

$$\boxed{y^2 - x^2 = C.}$$

За необхідності можна виразити у:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + C}.$$

Проте неявна форма:

$$\boxed{y^2 - x^2 = C}$$

також є зручним записом загального розв'язку.

Перевірка

Диференціюємо:

$$y^2 - x^2 = C.$$

Отримуємо:

$$2yy' - 2x = 0.$$

Звідси:

$$2yy' = 2x.$$

$$yy' = x.$$

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Отримали вихідне рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 - x^2 = C.}$$

17. Рівняння, у якому потрібно спочатку виконати перетворення

Не завжди можливість відокремлення змінних помітна одразу.

Іноді необхідно спочатку розкрити дріб, перенести множники або переписати похідну через диференціали.

Приклад 9

Розв'язати:

$$(1 + x^2)y' = 2xy.$$

Розв'язання

Крок 1. Виразимо похідну

$$y' = \frac{2xy}{1 + x^2}.$$

Отже:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} y.$$

Крок 2. Відокремимо змінні

При $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Крок 3. Інтегруємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Ліва частина:

$$\ln |y|.$$

Для правої частини виконаємо заміну:

$$u = 1 + x^2.$$

Тоді:

$$du = 2x dx.$$

Отже:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{1+x^2} dx &= \int \frac{du}{u}. \\ &= \ln |u| + C. \end{aligned}$$

Повертаємося до x :

$$\ln |y| = \ln(1+x^2) + C.$$

Оскільки:

$$1+x^2 > 0,$$

модуль у правій частині не потрібний.

Крок 4. Виразимо y

$$|y| = e^C(1+x^2).$$

Отже:

$$\boxed{y = C(1+x^2).}$$

Перевірка

$$y' = 2Cx.$$

Права частина після вираження похідної:

$$\frac{2xy}{1+x^2}.$$

Підставляємо:

$$y = C(1+x^2).$$

Тоді:

$$\frac{2xC(1+x^2)}{1+x^2} = 2Cx.$$

Ліва і права частини збігаються.

Відповідь:

$$\boxed{y = C(1+x^2).}$$

18. Знаходження частинного розв'язку

Якщо разом із диференціальним рівнянням задано початкову умову, після знаходження загального розв'язку необхідно визначити довільну сталу.

Розглянемо детальний приклад.

Приклад 10

Розв'язати задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

якщо:

$$y(0) = 2.$$

Розв'язання

Крок 1. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dy}{y} = x \, dx.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx.$$
$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

Крок 3. Виразимо у

Отримуємо:

$$y = C_1 e^{x^2/2}.$$

Для зручності запишемо:

$$y = C e^{x^2/2}.$$

Крок 4. Використаємо початкову умову

За умовою:

$$y(0) = 2.$$

Підставляємо:

$$2 = C e^{0^2/2}.$$

Оскільки:

$$e^0 = 1,$$

отримуємо:

$$C = 2.$$

Крок 5. Записуємо частинний розв'язок

$$\boxed{y = 2e^{x^2/2}.$$

Перевірка рівняння

Знайдемо похідну:

$$y' = 2e^{x^2/2} \cdot x.$$

Отже:

$$y' = 2xe^{x^2/2}.$$

Права частина:

$$xy = x \cdot 2e^{x^2/2}.$$

$$xy = 2xe^{x^2/2}.$$

Отже:

$$y' = xy.$$

Перевірка початкової умови

$$y(0) = 2e^0 = 2.$$

Усі умови виконуються.

Відповідь:

$$\boxed{y = 2e^{x^2/2}.$$

19. Приклад із початковою умовою та неявним розв'язком

Розв'язати:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

якщо:

$$y(0) = 2.$$

Розв'язання

Крок 1. Відокремлюємо змінні

$$y \, dy = x \, dx.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int y \, dy = \int x \, dx.$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C_1.$$

Крок 3. Використаємо початкову умову

При:

$$x = 0, \, y = 2.$$

Підставляємо:

$$2^2 = 0^2 + C_1.$$

Отже:

$$C_1 = 4.$$

Маємо:

$$y^2 = x^2 + 4.$$

Звідси:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 4}.$$

Але початкова умова:

$$y(0) = 2 > 0$$

визначає додатну гілку.

Тому:

$$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Перевірка

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Оскільки:

$$y = \sqrt{x^2 + 4},$$

отримуємо:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Початкова умова:

$$y(0) = \sqrt{4} = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 4}.$$

20. Диференціальне рівняння як математична модель процесу

Важливо розуміти, що диференціальне рівняння — це не лише математичний запис для виконання формальних обчислень.

Воно дозволяє описати **закон зміни певної величини**.

Загальна логіка математичного моделювання така:

реальний процес → залежність між величинами → диференціальне рівняння → розв'язок рівняння → аналіз процесу.

Наприклад, якщо швидкість зміни величини упропорційна самій величині y , то:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Його розв'язання дозволяє визначити, як величина узалежить від часу.

Приклад 11. Модель зміни швидкості

Розглянемо навчальну математичну модель, у якій швидкість зміни швидкості автомобіля пропорційна самій швидкості:

$$\frac{dv}{dt} = kv,$$

де k — стала величина.

Знайти загальний закон $v = v(t)$.

Розв'язання

Крок 1. Відокремлюємо змінні

При $v \neq 0$:

$$\frac{dv}{v} = k dt.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int \frac{dv}{v} = \int k dt.$$

Отримуємо:

$$\ln |v| = kt + C.$$

Крок 3. Виразимо швидкість

$$|v| = e^{kt+C}.$$

$$|v| = e^C e^{kt}.$$

Об'єднаємо сталий множник і знак у нову сталу:

$$\boxed{v = Ce^{kt}}.$$

Перевірка

$$\frac{dv}{dt} = Cke^{kt}.$$

Але:

$$v = Ce^{kt}.$$

Тому:

$$\frac{dv}{dt} = kv.$$

Відповідь:

$$\boxed{v = Ce^{kt}.$$

Цей приклад показує загальний принцип побудови математичної моделі. Конкретний фізичний зміст коефіцієнта k , знак цього коефіцієнта та придатність такої моделі мають визначатися умовами конкретного технічного процесу.

21. Приклад із заданим початковим значенням швидкості

Нехай:

$$\frac{dv}{dt} = -0,2v,$$

а при:

$$t = 0$$

швидкість дорівнює:

$$v(0) = 20.$$

Знайти функцію $v(t)$.

Розв'язання

Крок 1. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dv}{v} = -0,2 dt.$$

Крок 2. Інтегруємо

$$\int \frac{dv}{v} = -0,2 \int dt.$$

Отримуємо:

$$\ln |v| = -0,2t + C.$$

Крок 3. Виразимо v

$$v = Ce^{-0,2t}.$$

Крок 4. Використаємо початкову умову

$$v(0) = 20.$$

Тому:

$$20 = Ce^0.$$
$$C = 20.$$

Отже:

$$\boxed{v(t) = 20e^{-0,2t}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$v'(t) = 20(-0,2)e^{-0,2t}.$$
$$v'(t) = -4e^{-0,2t}.$$

Обчислимо:

$$-0,2v = -0,2 \cdot 20e^{-0,2t}.$$
$$= -4e^{-0,2t}.$$

Отже:

$$v' = -0,2v.$$

Перевіримо початкову умову:

$$v(0) = 20e^0 = 20.$$

Відповідь:

$$\boxed{v(t) = 20e^{-0,2t}.$$

22. Що потрібно пам'ятати про довільну сталу

Після інтегрування обох частин формально можна записати дві довільні сталі:

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2.$$

Перенесемо:

$$F(y) = G(x) + C_2 - C_1.$$

Оскільки різниця двох довільних сталих також є довільною сталою, позначаємо:

$$C = C_2 - C_1.$$

Тому достатньо записати:

$$\boxed{F(y) = G(x) + C.}$$

Не потрібно залишати дві незалежні сталі після інтегрування обох частин.

23. Явний і неявний запис розв'язку

Розв'язок диференціального рівняння може бути поданий у **явній формі**:

$$y = \varphi(x),$$

або у **неявній формі**:

$$\Phi(x, y) = C.$$

Наприклад:

$$y^2 - x^2 = C$$

є неявною формою розв'язку.

Якщо виразити y :

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C},$$

отримуємо явний запис відповідних гілок розв'язку.

Не завжди необхідно будь-якою ціною виражати y . У багатьох задачах неявний запис є повноцінним і зручним результатом.

24. Перевірка розв'язку диференціального рівняння

Перевірка є важливою частиною розв'язання.

Якщо отримано:

$$y = \varphi(x),$$

потрібно:

1. знайти необхідну похідну;
2. підставити функцію та її похідну у вихідне диференціальне рівняння;
3. переконатися, що отримана правильна рівність;
4. якщо була задана початкова умова — перевірити і її.

Наприклад, для:

$$y' = 2xy$$

отримано:

$$y = Ce^{x^2}.$$

Знаходимо:

$$y' = 2xCe^{x^2}.$$

Права частина:

$$2xy = 2xCe^{x^2}.$$

Отже:

$$y' = 2xy.$$

Розв'язок правильний.

25. Типові помилки під час розв'язування

Перша помилка — невідокремлені змінні

Неправильно залишати вирази з x і y змішаними в обох частинах, якщо далі планується безпосереднє інтегрування за різними змінними.

Потрібно привести рівняння до структури:

$\text{вираз з } y \cdot dy = \text{вираз з } x \cdot dx.$

Друга помилка — неправильне перенесення множника

Якщо:

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

то після відокремлення:

$\frac{dy}{y} = x dx.$

Не можна записувати:

$$y dy = x dx.$$

Це вже інше рівняння.

Третя помилка — неправильне інтегрування $\frac{1}{y}$

Необхідно пам'ятати:

$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C.$

Четверта помилка — дві непотрібні довільні сталі

Не потрібно залишати:

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2.$$

Достатньо об'єднати сталі:

$$F(y) = G(x) + C.$$

П'ята помилка — втрата окремих розв'язків

Якщо під час відокремлення змінних виконується ділення на:

$$g(y),$$

необхідно перевірити значення, для яких:

$$g(y) = 0.$$

Вони можуть відповідати окремим сталим розв'язкам.

Шоста помилка — неправильне використання початкової умови

Початкову умову необхідно підставляти у загальний розв'язок, щоб визначити довільну сталу.

Сьома помилка — відсутність перевірки

Навіть правильно вибраний метод не гарантує відсутності арифметичних або знакових помилок.

Тому знайдений розв'язок необхідно перевірити.

26. Загальний алгоритм розв'язування задачі

Якщо задано диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, рекомендується діяти так:

Крок 1. Визначити невідому функцію та незалежну змінну.

Крок 2. Записати похідну у вигляді дробу:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Крок 3. Проаналізувати, чи можна відокремити змінні.

Крок 4. Перенести всі множники з dy частини з dy , а множники з x — до частини з dx .

Крок 5. Перевірити, чи не виконувалося ділення на вираз, який може дорівнювати нулю.

Крок 6. Проінтегрувати обидві частини.

Крок 7. Обчислити інтеграли.

Крок 8. Об'єднати довільні сталі в одну сталу C .

Крок 9. За можливості отримати явний розв'язок.

Крок 10. Якщо задано початкову умову, визначити C .

Крок 11. Записати частинний розв'язок.

Крок 12. Виконати перевірку.

27. Узагальнення матеріалу лекції

Диференціальне рівняння встановлює залежність між невідомою функцією та її похідними.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної, що входить до рівняння.

Для рівняння першого порядку загальний вигляд можна подати:

$$F(x, y, y') = 0,$$

а якщо рівняння розв'язане відносно похідної:

$$y' = f(x, y).$$

Розв'язком є функція, яка після підстановки у рівняння перетворює його на правильну рівність.

Загальний розв'язок рівняння першого порядку зазвичай містить одну довільну сталу:

$$y = \varphi(x, C).$$

Початкова умова:

$$y(x_0) = y_0$$

дозволяє визначити конкретне значення довільної сталої та отримати частинний розв'язок.

Для рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

основний принцип полягає у відокремленні змінних:

$$\boxed{\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx,}$$

після чого:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Отже, для успішного розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними необхідно добре володіти алгебраїчними перетвореннями та методами інтегрування, вивченими у попередньому змістовому модулі.

У наданих навчальних матеріалах рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними розглядаються як базовий тип рівнянь першого порядку; складніші типи можуть зводитися до них відповідними перетвореннями.

6. Закріплення вивченого матеріалу

Питання для самоперевірки

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що є невідомим у диференціальному рівнянні?
3. Чим диференціальне рівняння відрізняється від алгебраїчного?
4. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
5. Що називається порядком диференціального рівняння?
6. Як визначити порядок диференціального рівняння?
7. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням першого порядку?
8. Який загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку?
9. Як записується рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної?
10. Що означає розв'язати диференціальне рівняння?
11. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
12. Що називається загальним розв'язком?
13. Скільки довільних сталих зазвичай містить загальний розв'язок рівняння першого порядку?
14. Що називається частинним розв'язком?
15. Що називається інтегральною кривою?
16. Що називається початковою умовою?
17. Як записується початкова умова для рівняння першого порядку?

- 18.Що називається задачею Коші?
- 19.Для чого потрібна початкова умова?
- 20.Як із загального розв'язку отримати частинний?
- 21.Які рівняння називаються рівняннями з відокремленими змінними?
- 22.Які рівняння називаються рівняннями з відокремлюваними змінними?
- 23.Який типовий вигляд рівняння з відокремлюваними змінними?
- 24.У чому полягає основна ідея методу відокремлення змінних?
- 25.Де після відокремлення повинні знаходитися вирази зі змінною y ?
- 26.Де повинні знаходитися вирази зі змінною x ?
- 27.Що роблять після відокремлення змінних?
- 28.Чому після інтегрування достатньо записувати одну довільну сталу?
- 29.Коли необхідно перевіряти окремі сталі розв'язки?
- 30.Чому ділення на вираз, що містить y , потребує додаткової перевірки?
- 31.Що таке явний розв'язок?
- 32.Що таке неявний розв'язок?
- 33.Чи завжди необхідно виражати учезез x ?
- 34.Як перевірити знайдений розв'язок?
- 35.Як перевірити виконання початкової умови?
- 36.Який зв'язок існує між інтегруванням та розв'язуванням диференціальних рівнянь?
- 37.Чому знання таблиці інтегралів потрібне для розв'язування диференціальних рівнянь?
- 38.Як диференціальні рівняння використовують для опису зміни швидкості?
- 39.Який вигляд має рівняння, якщо швидкість зміни величини пропорційна самій величині?
- 40.Які етапи містить розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними?
- 41.Що необхідно зробити після знаходження загального розв'язку задачі Коші?
- 42.Яка роль диференціальних рівнянь у математичному моделюванні?
- 43.Чому диференціальне рівняння описує не тільки стан, а й зміну системи?

44. Які процеси автомобільного транспорту можуть описуватися за допомогою диференціальних рівнянь?

45. Чому правильність математичної моделі необхідно відрізнити від правильності математичного розв'язання самого рівняння?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати конспект лекції «Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними».

Повторити:

- поняття похідної;
- поняття первісної;
- таблицю основних інтегралів;
- безпосереднє інтегрування;
- метод заміни змінної.

Вивчити означення:

диференціальне рівняння; порядок диференціального рівняння; диференціальне рівняння першого порядку; загальний розв'язок; частинний розв'язок; інтегральна крива; початкова умова; задача Коші; диференціальне рівняння з відокремленими змінними; диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Особливу увагу звернути на основну схему:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.}$$

Самостійно розв'язати:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = xy;$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2);$$

$$(1 + x^2)y' = 2xy.$$

Розв'язати задачі Коші:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, y(0) = 3;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, y(0) = 1.$$

Для кожного отриманого розв'язку виконати **перевірку підстановкою у вихідне диференціальне рівняння**.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок. У посібнику подано теоретичні відомості, методи й алгоритми розв'язування диференціальних рівнянь першого та вищих порядків; окремо виділено диференціальні рівняння першого порядку та рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.
2. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
5. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика»** для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти

«Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Змістовий модуль 5 «Диференціальні рівняння» передбачає лекцію 15 «Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними», подальше самостійне опрацювання лінійних рівнянь першого порядку та практичне розв’язування рівнянь першого порядку.