ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ЗПО «ДПТК»
_____ Олександр СТРІЛЕЦЬ
«_28_» _серпня_ 2026 р.

ПОГОДЖЕНО
Заступник директора з НМР ЗПО «ДПТК»
_____ Сергій ГОРДІЄНКО
«_28_» _серпня_ 2026 р.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРИКТИЧНИХ, ІНДИВІДУАЛЬНИХ І МОДУЛЬНИХ РОБІТ

з дисципліни вища математика
для здобувачів освіти рівня «фаховий молодший бакалавр»
Спеціальність G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

О.В. Чопенко

Дніпро, 2026

Зміст

Практичне заняття № 1. Дії над матрицями 3
Практичне заняття № 2. Обчислення визначників 36
Практичне заняття № 3 Обернена матриця 68
Практичне заняття № 4 Дії над векторами. Скалярний добуток. Розв'язування задач на сили та їх результуючі 105
Практичне заняття № 5 Прикладне застосування 134
Практичне заняття № 6 Рішення завдань за модулем 1 153
Практичне заняття № 7 Складання рівнянь прямої. Кут між прямими, паралельність і перпендикулярність 176
Практичне заняття № 8 Криві другого порядку: коло, еліпс 214
Практичне заняття № 9 Криві другого порядку: гіпербола, парабола 248
Практичне заняття № 10 Прикладне застосування 284
Практичне заняття № 11 Рішення завдань за модулем 2 306
Практичне заняття № 12 Обчислення границь функцій 333
Практичне заняття № 13 Обчислення похідних і диференціалів функцій 367
Практичне заняття № 14 Дослідження функцій. Знаходження максимумів і мінімумів у прикладних задачах 400
Практичне заняття № 15 Рішення завдань за модулем 3 426
Практичне заняття № 16 Обчислення невизначених інтегралів 450
Практичне заняття № 17 Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи 490
Практичне заняття № 18 Рішення завдань за модулем 4 516
Практичне заняття № 19 Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку 545
Практичне заняття № 20 Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. Моделювання коливальних процесів 587
Практичне заняття № 21 Рішення завдань за модулем 5 618

Практичне заняття № 1

Тема: Дії над матрицями

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає структурі змістового модуля 1 і присвячене саме виконанню дій над матрицями, без переходу до визначників, оберненої матриці та методів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У матеріалах курсу матриці та дії над ними виділяються як окремий елемент першого змістового модуля.

Мета

Закріпити та поглибити знання здобувачів освіти про матриці; сформувати практичні вміння визначати розмір матриці, знаходити її елементи, встановлювати рівність матриць, виконувати додавання і віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці та множення матриць.

Сформувати вміння правильно визначати можливість виконання тієї чи іншої дії над матрицями, дотримуватися послідовності обчислень, перевіряти розмір отриманої матриці та аналізувати правильність результату.

Підготувати здобувачів освіти до подальшого вивчення визначників, оберненої матриці та систем лінійних алгебраїчних рівнянь, не вводячи ці теми безпосередньо в зміст цього практичного заняття.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 1 «Матриці та дії над ними», навчальні посібники з вищої математики, картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.

4. Коротке повторення основних правил виконання дій над матрицями.
5. Розв’язування прикладів на визначення розміру матриці та її елементів.
6. Розв’язування прикладів на рівність матриць.
7. Додавання і віднімання матриць.
8. Множення матриці на число.
9. Транспонування матриці.
10. Множення матриць.
11. Виконання комбінованих дій над матрицями.
12. Самостійне розв’язування завдань.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
15. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається матрицею?
2. Як позначають матриці?
3. Що називається елементом матриці?
4. Що показує перший індекс елемента матриці?
5. Що показує другий індекс елемента матриці?
6. Що називається розміром матриці?
7. Яка матриця називається прямокутною?
8. Яка матриця називається квадратною?
9. Що називається матрицею-рядком?
10. Що називається матрицею-стовпцем?
11. Яка матриця називається нульовою?
12. Які матриці називаються рівними?
13. За якої умови дві матриці можна додавати?

14. Як виконується додавання матриць?
15. За якої умови можна віднімати матриці?
16. Як виконується віднімання матриць?
17. Як виконується множення матриці на число?
18. Що називається транспонуванням матриці?
19. Як змінюється розмір матриці після транспонування?
20. За якої умови можна виконати множення двох матриць?
21. Як визначити розмір добутку двох матриць?
22. Як обчислюється елемент добутку двох матриць?
23. Чи завжди виконується рівність $AB = BA$?
24. Чи можна додати матриці різних розмірів?
25. Чи можна перемножити будь-які дві матриці?
26. Що потрібно перевірити перед множенням матриць?
27. Яку матрицю отримаємо при множенні матриці на нуль?
28. Чому під час виконання дій над матрицями важливо контролювати їх розміри?
29. У якому порядку виконуються дії у виразі, що містить множення матриць на числа та додавання?
30. Як можна перевірити правильність виконання дій над матрицями?

2. Короткі теоретичні відомості

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що складається з певної кількості рядків і стовпців.

Загальний запис матриці:

$$A = (a_{ij}),$$

де iвизначає номер рядка, а j— номер стовпця.

Якщо матриця має mрядків і nстовпців, її розмір записують:

$$m \times n.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

має два рядки та три стовпці, тому її розмір:

$$2 \times 3.$$

Для виконання практичних завдань необхідно пам’ятати основні правила:

Додавати та віднімати можна тільки матриці однакового розміру.

Якщо

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),$$

то

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

а

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

При множенні матриці на число кожний її елемент множиться на це число:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Під час транспонування рядки початкової матриці стають стовпцями:

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji}).$$

Для множення матриць необхідно, щоб **кількість стовпців першої матриці дорівнювала кількості рядків другої матриці**.

Саме ці дії становлять основу практичної роботи з матрицями. У матеріалах змістового модуля серед опорних питань окремо виділено умови додавання, множення матриці на число, умову множення матриць та визначення розміру їх добутку.

3. Розв’язування прикладів

Приклад 1. Визначення розміру матриці та її елементів

Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити:

1. розмір матриці;
2. елементи a_{12}, a_{21}, a_{23}.

Розв’язання

Крок 1. Визначимо кількість рядків.

Матриця містить два рядки.

Отже,

$$m = 2.$$

Крок 2. Визначимо кількість стовпців.

Матриця містить три стовпці.

Отже,

$$n = 3.$$

Тому розмір матриці:

$$2 \times 3.$$

Крок 3. Знайдемо елемент a_{12}.

Перший індекс означає номер рядка, другий — номер стовпця.

У першому рядку та другому стовпці розташоване число:

$$a_{12} = -2.$$

Крок 4. Знайдемо a_{21}.

Другий рядок, перший стовпець:

$$a_{21} = 1.$$

Крок 5. Знайдемо a_{23}.

Другий рядок, третій стовпець:

$$a_{23} = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{A_{2\times 3};\ a_{12} = -2;\ a_{21} = 1;\ a_{23} = 0.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

визначити її розмір та елементи b_{11}, b_{22}, b_{23}.

1.2. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

визначити її розмір та елементи c_{12}, c_{21}, c_{32}.

4. Рівність матриць

Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи рівні.

Приклад 2

Визначити xі y, якщо

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Рівні матриці мають рівні відповідні елементи.

Порівнюємо елементи першого рядка другого стовпця:

$$x = -3.$$

Порівнюємо елементи другого рядка першого стовпця:

$$y = 4.$$

Перевірка

Після підстановки отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Рівність виконується.

Відповідь

$$\boxed{x = -3,\ y = 4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Знайти xі y, якщо

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Знайти aі b, якщо

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Додавання матриць

Приклад 3

Обчислити $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо можливість додавання.

Матриця Aмає розмір 2×2.

Матриця Bтакож має розмір 2×2.

Отже, додавання можливе.

Крок 2. Додаємо відповідні елементи.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & -1+2 \\ 3+(-1) & 4+3 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо обчислення:

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Результат повинен мати той самий розмір, що й початкові матриці:

$$2 \times 2.$$

Отримана матриця має саме такий розмір.

Відповідь

$$\boxed{A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Обчислити $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2. Обчислити $C + D$, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Віднімання матриць

Приклад 4

Знайти $A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обидві матриці мають розмір 2×2, тому віднімання можливе.

Віднімаємо відповідні елементи:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7-4 & 3-(-1) \\ 2-5 & 6-2 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Розмір отриманої матриці:

$$2 \times 2,$$

що відповідає розмірам початкових матриць.

Відповідь

$$\boxed{A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Знайти $A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Знайти $C - D$, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Множення матриці на число

Приклад 5

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$-2A.$$

Розв’язання

При множенні матриці на число необхідно кожний її елемент помножити на це число:

$$-2A = -2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 & (-2)(-3) \\ (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо обчислення:

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Множення матриці на число не змінює її розміру.

Початкова та отримана матриці мають розмір 2×2.

Відповідь

$$\boxed{-2A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Обчислити $3A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2. Обчислити $-4B$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Транспонування матриці

Приклад 6

Транспонувати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Початкова матриця має розмір:

$$2 \times 3.$$

Під час транспонування перший рядок стає першим стовпцем:

$$(1, \ ,2 \ -3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок стає другим стовпцем:

$$(4, \ ,0 \ 5) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Матриця Aмала розмір 2×3.

Транспонована матриця повинна мати розмір:

$$3 \times 2.$$

Отриманий результат має саме такий розмір.

Відповідь

$$\boxed{A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Знайти A^T, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Знайти B^T, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Множення матриць

Під час множення матриць необхідно особливо уважно перевіряти їх розміри.

Якщо матриця Aмає розмір $m \times n$, а матриця B— $n \times k$, то добуток ABіснує та має розмір:

$$m \times k.$$

Приклад 7

Обчислити AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо можливість множення.

Матриця Aмає розмір:

$$2 \times 2.$$

Матриця Bмає розмір:

$$2 \times 2.$$

Кількість стовпців матриці Aдорівнює кількості рядків матриці B:

$$2 = 2.$$

Отже, добуток ABіснує.

Крок 2. Знайдемо елемент першого рядка першого стовпця.

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

Крок 3. Знайдемо елемент першого рядка другого стовпця.

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7.$$

Крок 4. Знайдемо елемент другого рядка першого стовпця.

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = 2.$$

Крок 5. Знайдемо елемент другого рядка другого стовпця.

$$c_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 3 + 12 = 15.$$

Отже:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Добуток матриць розмірів

$$(2 \times 2)(2 \times 2)$$

повинен мати розмір:

$$2 \times 2.$$

Умова виконується.

Відповідь

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Обчислити AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.2. Обчислити CD, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Множення прямокутних матриць

Приклад 8

Обчислити AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Визначимо розміри матриць.

$$A_{2\times 3},\ B_{3\times 2}.$$

Внутрішні розміри однакові:

$$3 = 3.$$

Отже, добуток ABіснує.

Результат матиме розмір:

$$2 \times 2.$$

Крок 2. Обчислимо перший елемент.

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 + 0 - 3 = -1.$$

Крок 3. Обчислимо другий елемент першого рядка.

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 1 + 6 + 6 = 13.$$

Крок 4. Обчислимо перший елемент другого рядка.

$$c_{21} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 4 + 0 - 1 = 3.$$

Крок 5. Обчислимо другий елемент другого рядка.

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 2 - 3 + 2 = 1.$$

Отже:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Обчислити AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.2. Обчислити CD, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Перевірка комутативності множення матриць

Приклад 9

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити ABі BAта порівняти результати.

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Обчислимо BA.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Порівняємо результати.

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$AB \neq BA.$$

Висновок

Множення матриць у загальному випадку **не має переставної властивості**.

Відповідь

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ AB \neq BA.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити ABі BA, порівняти результати.

9.2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CDі DC, порівняти результати.

12. Комбіновані дії над матрицями

Приклад 10

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$2A - B.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо $2A$.

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Віднімемо матрицю B.

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2-4 & 4-(-2) \\ -2-2 & 6-1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Матриці Aі Bмають однаковий розмір, тому всі виконані дії допустимі.

Відповідь

$$\boxed{2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити $3A - 2B$.

10.2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

обчислити $2C + D$.

13. Приклад із декількома діями

Приклад 11

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$AB + C.$$

Розв’язання

Крок 1. Виконаємо множення матриць.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 2 + 1(-1) & 3\cdot 0 + 1\cdot 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Додамо матрицю C.

$$AB + C = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Добуток ABмає розмір 2×2, матриця Cтакож має розмір 2×2. Отже, додавання допустиме.

Відповідь

$$\boxed{AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити $AB + C$.

11.2. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити $AB - C$.

14. Приклад на визначення можливості виконання дії

Приклад 12

Дано матриці:

$$A_{2\times3},\ B_{3\times4},\ C_{2\times4}.$$

Визначити, чи існують:

$$AB,\ BA,\ AB + C.$$

Розв'язання

1. Добуток AB

Маємо:

$$(2 \times 3)(3 \times 4).$$

Внутрішні розміри:

$$3 = 3.$$

Отже, добуток існує.

Його розмір:

$$2 \times 4.$$

2. Добуток BA

Маємо:

$$(3 \times 4)(2 \times 3).$$

Внутрішні розміри:

$$4 \neq 2.$$

Отже, добуток BAне існує.

3. Вираз $AB + C$

Встановлено, що:

$$AB$$

має розмір 2×4.

Матриця Cтакож має розмір:

$$2 \times 4.$$

Тому додавання можливе.

Відповідь

$\boxed{AB \text{ існує і має розмір } 2 \times 4;}$

$\boxed{BA \text{ не існує;}}$

$\boxed{AB + C \text{ існує.}}$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Дано матриці $A_{3\times2}$, $B_{2\times4}$, $C_{3\times4}$. Визначити, чи існують AB, BA, $AB + C$, та встановити розміри тих матриць, які існують.

12.2. Дано матриці $M_{2\times4}$, $N_{4\times3}$, $P_{2\times3}$. Визначити, чи існують MN, NM, $MN - P$, та встановити розміри можливих результатів.

15. Приклади для самостійного розв'язування

Завдання 1

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

$$A + B,\ A - B,\ 2A,\ -3B.$$

Завдання 2

Транспонувати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указати розміри матриць Aі A^T.

Завдання 3

Обчислити:

$$AB,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4

Для матриць попереднього завдання обчислити BAта перевірити, чи виконується рівність:

$$AB = BA.$$

Завдання 5

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$3A - 2B.$$

Завдання 6

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити AB.

Завдання 7

Для матриць $A_{4\times2}$ і $B_{2\times3}$ визначити, чи існують AB та BA. Якщо добуток існує, указати його розмір.

Завдання 8

Знайти x, y, z, якщо

$$\begin{pmatrix} x & 2 & z \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Додавання матриць різних розмірів.

Перед виконанням дії необхідно обов’язково визначити розміри обох матриць.

Помилка 2. Під час множення матриці на число множать лише один рядок або один стовпець.

Число необхідно помножити на **кожний елемент матриці**.

Помилка 3. Під час транспонування змінюють лише окремі елементи.

Необхідно пам’ятати: усі рядки стають відповідними стовпцями.

Помилка 4. Матриці перемножують поелементно.

Звичайний добуток матриць знаходять за правилом «рядок першої матриці на стовпець другої матриці».

Помилка 5. Не перевіряють можливість множення.

Спочатку необхідно порівняти кількість стовпців першої матриці з кількістю рядків другої.

Помилка 6. Вважають, що $AB = BA$.

Множення матриць у загальному випадку не є переставним.

Помилка 7. Неправильно визначають розмір добутку.

Якщо

$$A_{m\times n}B_{n\times k},$$

то результат має розмір

$$m \times k.$$

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні закріпити вміння:

- визначати розмір матриці;
- знаходити задані елементи матриці;
- встановлювати рівність матриць;
- додавати та віднімати матриці;
- множити матрицю на число;
- транспонувати матрицю;
- перевіряти можливість множення двох матриць;
- визначати розмір добутку;
- виконувати множення квадратних і прямокутних матриць;
- виконувати комбіновані дії;
- перевіряти правильність отриманих результатів.

Це практичне заняття не передбачає обчислення визначників, знаходження оберненої матриці або розв’язування систем лінійних рівнянь, оскільки ці питання відповідно до послідовності робочої програми опрацьовуються далі.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається матрицею?
2. Що називається елементом матриці?

3. Як позначають елементи матриці?
4. Як визначити розмір матриці?
5. Яка матриця називається квадратною?
6. Яка матриця називається прямокутною?
7. Яка матриця називається нульовою?
8. Які матриці називаються рівними?
9. За якої умови можна додавати матриці?
10. Як знайти суму двох матриць?
11. За якої умови можна віднімати матриці?
12. Як знайти різницю двох матриць?
13. Як помножити матрицю на число?
14. Чи змінюється розмір матриці при множенні на число?
15. Що називається транспонованою матрицею?
16. Як виконати транспонування?
17. Як змінюється розмір матриці після транспонування?
18. За якої умови існує добуток AB?
19. Як визначити розмір добутку AB?
20. Як обчислити елемент c_{ij} матриці-добутку?
21. Що означає правило «рядок на стовпець»?
22. Чи завжди з існування AB випливає існування BA?
23. Чи завжди $AB = BA$?
24. У якому порядку виконують комбіновані дії над матрицями?
25. Як перевірити допустимість виразу $AB + C$?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта**.

Кожний варіант містить три завдання різного рівня складності:

Завдання 1 — додавання, віднімання та множення матриць на число.

Завдання 2 — множення матриць.

Завдання 3 — комбіновані дії над матрицями.
Домашнє завдання оцінюється максимально у **2 бали**.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Для матриць $\boldsymbol{A}$і $\boldsymbol{B}$із першого завдання обчислити $\boldsymbol{3A - 2B}$.

Варіант 2

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + B}$.

Варіант 3

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - 3B}$.

Варіант 4

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A + 2B}$.

Варіант 5

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A - B}$.

Варіант 6

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + 3B}$.

Варіант 7

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $4A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - B}$.

Варіант 8

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-3B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A + 2B}$.

Варіант 9

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - 2B}$.

Варіант 10

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A + 3B}$.

Варіанти 11–20

Для цих варіантів зберігається та сама структура, але **умови не скорочуються**.

Варіант 11

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Для матриць $\boldsymbol{A}$і $\boldsymbol{B}$, заданих у першому завданні, обчислити $\boldsymbol{3A - B}$.

Варіант 12

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + 3B}$.

Варіант 13

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - B}$.

Варіант 14

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A + 2B}$.

Варіант 15

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $4B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A - 2B}$.

Варіант 16

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + B}$.

Варіант 17

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A - 2B}$.

Варіант 18

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + 2B}$.

Варіант 19

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A + B}$.

Варіант 20

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $4A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - 3B}$.

Варіанти 21–30

Варіант 21

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A - 2B}$.

Варіант 22

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A + 3B}$.

Варіант 23

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - B}$.

Варіант 24

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A + B}$.

Варіант 25

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A + 2B}$.

Варіант 26

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A - 3B}$.

Варіант 27

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $4B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{3A - 2B}$.

Варіант 28

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{A + 2B}$.

Варіант 29

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $-3B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Обчислити $\boldsymbol{2A - 2B}$.

Варіант 30

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD.

Завдання 3. Для матриць $\boldsymbol{A}$і $\boldsymbol{B}$, заданих у першому завданні, обчислити $\boldsymbol{2A + 3B}$.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно та повністю; перед множенням матриць перевірено умову можливості виконання дії; обчислення записані послідовно; відповіді правильні.

1,25–1,74 бала — основні способи виконання дій засвоєні правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи обчислювальних помилок.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні правила дій над матрицями, але допускає суттєві помилки у множенні матриць або комбінованих діях.

0,25–0,74 бала — виконано лише окремі прості дії над матрицями, наявні суттєві помилки у виборі та застосуванні правил.

0–0,24 бала — завдання практично не виконано або виконані записи не демонструють розуміння правил дій над матрицями.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 2

Тема: Обчислення визначників

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає послідовності робочої програми: після лекції «Визначники» та самостійної роботи «Властивості визначників» передбачено практичне відпрацювання способів обчислення визначників. Матеріал заняття обмежується визначниками і не переходить до оберненої матриці, яка вивчається наступною темою.

Мета

Закріпити знання здобувачів освіти про визначники квадратних матриць, їх порядок, мінори, алгебраїчні доповнення та основні властивості визначників.

Сформувати практичні вміння обчислювати визначники другого і третього порядків різними способами; застосовувати правило трикутників, розкладання визначника за елементами рядка або стовпця та властивості визначників для спрощення обчислень.

Розвивати вміння правильно організовувати математичні записи, послідовно виконувати обчислення, обирати раціональний спосіб знаходження визначника, перевіряти отримані результати та аналізувати типові помилки.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 2 «Визначники», матеріали самостійної роботи № 1 «Властивості визначників», навчальні посібники з вищої математики, картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.

4. Повторення поняття визначника та його основних властивостей.
5. Обчислення визначників другого порядку.
6. Обчислення визначників третього порядку за правилом трикутників.
7. Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень.
8. Розкладання визначника за елементами рядка.
9. Розкладання визначника за елементами стовпця.
10. Використання властивостей визначників для спрощення обчислень.
11. Розв'язування комбінованих завдань.
12. Самостійна робота здобувачів освіти.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
15. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається квадратною матрицею?
2. Що називається визначником квадратної матриці?
3. Як позначається визначник матриці?
4. Що називається порядком визначника?
5. Як записується визначник другого порядку?
6. Як обчислюється визначник другого порядку?
7. Який добуток називають добутком елементів головної діагоналі?
8. Який добуток відповідає побічній діагоналі визначника другого порядку?
9. Як записується визначник третього порядку?
10. У чому полягає правило трикутників?
11. Що називається мінором елемента визначника?
12. Як позначається мінор елемента a_{ij}?
13. Як знайти мінор елемента визначника третього порядку?
14. Що називається алгебраїчним доповненням елемента?

15.Як пов’язані мінор та алгебраїчне доповнення?

16.Від чого залежить знак алгебраїчного доповнення?

17.Які алгебраїчні доповнення мають знак «плюс»?

18.Які алгебраїчні доповнення мають знак «мінус»?

19.Як розкласти визначник за елементами першого рядка?

20.Чи можна розкладати визначник за елементами будь-якого рядка?

21.Чи можна розкладати визначник за елементами будь-якого стовпця?

22.Як змінюється визначник при перестановці двох рядків?

23.Як змінюється визначник при перестановці двох стовпців?

24.Чому дорівнює визначник, якщо один із його рядків складається з нулів?

25.Чому дорівнює визначник, якщо два рядки однакові?

26.Чому дорівнює визначник, якщо два рядки пропорційні?

27.Як винести спільний множник елементів рядка за знак визначника?

28.Чи змінюється визначник при транспонуванні?

29.Як можна використати властивості визначника для спрощення обчислень?

30.За яким рядком або стовпцем доцільно виконувати розкладання визначника?

2. Короткі теоретичні відомості

Визначником називається число, яке за певним правилом ставиться у відповідність квадратній матриці.

Для квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

визначник другого порядку обчислюється за правилом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже, від добутку елементів головної діагоналі необхідно відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Для визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

можна використовувати правило трикутників або розкладання за елементами рядка чи стовпця.

Мінором M_{ij}елемента a_{ij}називається визначник, який отримують після викреслення рядка iта стовпця j, на перетині яких знаходиться цей елемент.

Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Схема знаків алгебраїчних доповнень має вигляд

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Під час практичної роботи необхідно не тільки отримати числову відповідь, а й показати основні етапи обчислення.

3. Обчислення визначника другого порядку

Приклад 1

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Використаємо правило обчислення визначника другого порядку:

$$\Delta = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5.$$

Обчислюємо добутки:

$$3 \cdot 4 = 12,$$

$$2 \cdot 5 = 10.$$

Тому

$$\Delta = 12 - 10 = 2.$$

Перевірка

Добуток елементів головної діагоналі дорівнює 12, а побічної — 10. Від першого добутку віднято другий.

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.2. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Визначник другого порядку з від'ємними елементами

Приклад 2

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

За формулою визначника другого порядку:

$$\Delta = (-2)(-1) - 3 \cdot 4.$$

Обчислюємо:

$$(-2)(-1) = 2,$$

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Отже,

$$\Delta = 2 - 12 = -10.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -10.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.2.

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислення визначника третього порядку

Приклад 3

Обчислити визначник за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Для визначника третього порядку враховуємо три добутки зі знаком «плюс» і три добутки зі знаком «мінус»:

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 1.$$

Обчислюємо окремі добутки:

$$1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16,$$

$$3 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6,$$

$$2 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.$$

Отже,

$$\Delta = 0 + 16 + 0 - 6 - 0 - 4.$$

$$\Delta = 6.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 6.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Знаходження мінорів

Приклад 4

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти мінори M_{11}, M_{12}і M_{23}.

Розв'язання

1. Знайдемо M_{11}

Викреслюємо перший рядок і перший стовпець:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1.$$

2. Знайдемо M_{12}

Викреслюємо перший рядок і другий стовпець:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6.$$

3. Знайдемо M_{23}

Викреслюємо другий рядок і третій стовпець:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$M_{23} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5.$$

Відповідь

$$\boxed{M_{11} = -1,\ M_{12} = -6,\ M_{23} = -5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11}, M_{12}, M_{23}.

4.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{21}, M_{22}, M_{33}.

7. Знаходження алгебраїчних доповнень

Приклад 5

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення A_{11}, A_{12}і A_{23}.

Розв'язання

Із попереднього прикладу:

$$M_{11} = -1,\ M_{12} = -6,\ M_{23} = -5.$$

Алгебраїчне доповнення визначається формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

1. Знайдемо A_{11}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}.$$

$$A_{11} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

2. Знайдемо A_{12}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}.$$

$$A_{12} = -1 \cdot (-6) = 6.$$

3. Знайдемо A_{23}

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}.$$

$$A_{23} = -1 \cdot (-5) = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{A_{11} = -1,\ A_{12} = 6,\ A_{23} = 5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти A_{11}, A_{12}, A_{23}.

5.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти A_{21}, A_{22}, A_{33}.

8. Розкладання визначника за елементами рядка

Приклад 6

Обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладаємо за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Оскільки

$$a_{13} = 0,$$

третій доданок дорівнюватиме нулю.

Крок 1. Знайдемо A_{11}

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -5 - 8 = -13.$$

Оскільки знак для A_{11}додатний:

$$A_{11} = -13.$$

Крок 2. Знайдемо A_{12}

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13.$$

Для елемента a_{12}знак від'ємний:

$$A_{12} = -13.$$

Крок 3. Виконаємо розкладання

$$\Delta = 2(-13) + 1(-13) + 0 \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = -26 - 13 = -39.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -39.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Розкладанням за елементами першого рядка обчислити:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

6.2. Розкладанням за елементами першого рядка обчислити:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вибір раціонального рядка для розкладання

Приклад 7

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

У другому рядку містяться два нульові елементи:

$$(0, \ , 4 \ 0).$$

Тому найраціональніше розкласти визначник за елементами другого рядка.

Маємо:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 4A_{22} + 0 \cdot A_{23}.$$

Залишається обчислити тільки A_{22}.

Оскільки

$$(-1)^{2+2} = 1,$$

то

$$A_{22} = M_{22}.$$

Викреслюємо другий рядок і другий стовпець:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$M_{22} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 4 - 5 = -1.$$

Отже,

$$A_{22} = -1.$$

Тоді

$$\Delta = 4(-1) = -4.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

7.2. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Застосування властивості визначника

Приклад 8

Не виконуючи громіздких обчислень, знайти значення визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Порівняємо перший і другий рядки:

$$(2, \ ,1 \ 3),$$

$$(4, \ ,2 \ 6).$$

Другий рядок отримано множенням першого рядка на число 2:

$$(4, \ ,2 \ 6) = 2(2, \ ,1 \ 3).$$

Отже, два рядки визначника пропорційні.

За властивістю визначників, якщо два рядки пропорційні, визначник дорівнює нулю.

Тому

$$\Delta = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 0.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Не виконуючи повного розкладання, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

8.2. Не виконуючи повного розкладання, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

11. Винесення спільного множника

Приклад 9

Обчислити визначник, використовуючи його властивості:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Із першого рядка можна винести число 3:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тепер бачимо, що другий рядок отримано множенням першого на 2:

$$(4,\ 2) = 2(2,\ 1).$$

Тому внутрішній визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже,

$$\Delta = 3 \cdot 0 = 0.$$

Перевірка безпосереднім обчисленням

$$\Delta = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 0.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

9.2.

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

12. Визначник трикутного виду

Приклад 10

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Визначник має трикутний вигляд: усі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

Для такого визначника його значення дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot (-2).$$

$$\Delta = -16.$$

Перевірка

Розкладемо за першим стовпцем. У ньому тільки один ненульовий елемент:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 2[4(-2) - 5 \cdot 0].$$

$$\Delta = 2(-8) = -16.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -16.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

10.2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

13. Порівняння двох способів обчислення

Приклад 11

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

раціональним способом.

Розв'язання

У другому стовпці маємо:

$$0,\ 4,\ 0.$$

Тому доцільно виконати розкладання за другим стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + 4A_{22} + 0 \cdot A_{32}.$$

Отже,

$$\Delta = 4A_{22}.$$

Знак A_{22}додатний:

$$A_{22} = M_{22}.$$

Викреслюємо другий рядок та другий стовпець:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{22} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1.$$

Тому

$$\Delta = 4 \cdot 1 = 4.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

11.2.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

14. Комплексне завдання

Приклад 12

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

необхідно:

1. знайти мінор M_{12};
2. знайти алгебраїчне доповнення A_{12};
3. обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо M_{12}

Викреслюємо перший рядок і другий стовпець:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13.$$

Крок 2. Знайдемо A_{12}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}.$$

$$A_{12} = -13.$$

Крок 3. Обчислимо визначник

Розкладаємо за першим рядком:

$$\Delta = 2A_{11} + 1A_{12} + 0A_{13}.$$

Знайдемо A_{11}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = 4 \cdot 5 - 2(-1) = 20 + 2 = 22.$$

Знак A_{11}додатний, тому

$$A_{11} = 22.$$

Тепер:

$$\Delta = 2 \cdot 22 + 1 \cdot (-13) + 0.$$

$$\Delta = 44 - 13 = 31.$$

Перевірка

За правилом трикутників:

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot (-1) - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot (-1).$$

$$\Delta = 40 + 2 - 15 + 4 = 31.$$

Результати збігаються.

Відповідь

$$\boxed{M_{12} = 13,\ A_{12} = -13,\ \Delta = 31.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

12.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник раціональним способом.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Обчислити за правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 4. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{21}, M_{22}, A_{21}, A_{22}.

Завдання 5. Обчислити розкладанням за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 6. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Завдання 7. Не виконуючи повного обчислення, знайти:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 8. Обчислити та перевірити результат двома різними способами:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Неправильний знак у визначнику другого порядку.

Необхідно пам’ятати: від добутку елементів головної діагоналі віднімають добуток елементів побічної діагоналі.

Помилка 2. Втрата одного з шести добутків під час обчислення визначника третього порядку.

Необхідно записувати всі три додатні та всі три від’ємні добутки.

Помилка 3. Неправильне знаходження мінора.

Потрібно викреслювати саме той рядок і той стовпець, на перетині яких знаходиться відповідний елемент.

Помилка 4. Плутанина між мінором і алгебраїчним доповненням.

Мінор є визначником меншого порядку, а алгебраїчне доповнення додатково враховує множник $(-1)^{i+j}$.

Помилка 5. Неправильні знаки алгебраїчних доповнень.

Доцільно користуватися схемою знаків:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Помилка 6. Нераціональний вибір рядка або стовпця.

Для розкладання доцільно обирати рядок або стовпець із найбільшою кількістю нульових елементів.

Помилка 7. Невикористання властивостей визначника.

Перед громіздким обчисленням необхідно перевірити, чи немає однакових, пропорційних або нульових рядків чи стовпців.

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні навчитися впевнено обчислювати визначники другого та третього порядків, знаходити мінори й алгебраїчні доповнення, виконувати розкладання за елементами рядка або стовпця та використовувати властивості визначників для спрощення обчислень.

Особливу увагу необхідно звернути не на механічне запам’ятовування правил, а на вибір раціонального способу обчислення. Якщо у рядку або стовпці є нульові елементи, розкладання доцільно виконувати саме за ним. Якщо рядки або стовпці пропорційні, повне обчислення взагалі не потрібне.

Матеріал заняття є безпосередньою практичною основою для подальшого вивчення теми «Обернена матриця та її знаходження», однак знаходження оберненої матриці в межах практичного заняття № 2 не розглядається.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається визначником?
2. Для яких матриць визначається визначник?
3. Що називається порядком визначника?
4. Як обчислюється визначник другого порядку?
5. Які діагоналі має визначник другого порядку?
6. Як записується визначник третього порядку?
7. У чому полягає правило трикутників?
8. Скільки добутків використовується під час обчислення визначника третього порядку?
9. Що називається мінором елемента?
10. Як знайти мінор елемента визначника третього порядку?
11. Що називається алгебраїчним доповненням?
12. Як обчислюється алгебраїчне доповнення?
13. Як визначити знак алгебраїчного доповнення?
14. Як розкласти визначник за елементами рядка?
15. Як розкласти визначник за елементами стовпця?
16. За яким рядком доцільно виконувати розкладання?
17. Що відбувається з визначником при перестановці двох рядків?
18. Чому дорівнює визначник із нульовим рядком?
19. Чому дорівнює визначник із двома однаковими рядками?
20. Чому дорівнює визначник із двома пропорційними рядками?
21. Як винести спільний множник рядка за знак визначника?
22. Чи змінюється визначник при транспонуванні?
23. Як використати нульові елементи для спрощення обчислення?

24. Чому перед безпосереднім обчисленням необхідно проаналізувати структуру визначника?

25. Як перевірити правильність знайденого значення визначника?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта** та оцінюється максимально у **2 бали**.

Кожний варіант містить три повністю сформульовані завдання різного рівня складності.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти мінор M_{12}, алгебраїчне доповнення A_{12} та обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

Варіант 2

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 3

Завдання 1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11}, A_{11}та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 4

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 5

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 6

Завдання 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник.

Варіант 7

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший рядок для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 8

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

обрати раціональний рядок або стовпець та обчислити визначник.

Варіант 9

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11}, A_{11}та обчислити визначник.

Варіант 10

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 11

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 12

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник.

Варіант 13

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший спосіб розкладання та обчислити визначник.

Варіант 14

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

визначити його значення, використовуючи властивості визначників, та пояснити вибраний спосіб.

Варіант 15

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

обрати найзручніший стовпець для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 16

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник.

Варіант 17

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

обчислити значення раціональним способом.

Варіант 18

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

використати властивості визначників і знайти його значення без повного розкладання.

Варіант 19

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

обрати раціональний спосіб розкладання та обчислити визначник.

Варіант 20

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11}, A_{11}та обчислити визначник.

Варіант 21

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

обчислити визначник розкладанням за стовпцем, який містить найбільшу кількість нульових елементів.

Варіант 22

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

застосувати властивості визначників та знайти його значення без повного розкладання.

Варіант 23

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12}, A_{12}та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 24

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший стовпець для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 25

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

знайти M_{23}, A_{23}та обчислити визначник.

Варіант 26

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

обчислити визначник раціональним способом та пояснити вибір рядка або стовпця для розкладання.

Варіант 27

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

використати властивості визначників та знайти його значення без виконання повного розкладання.

Варіант 28

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти його значення розкладанням за другим стовпцем.

Варіант 29

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13}, A_{13}та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 30

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

визначити найбільш раціональний рядок або стовпець для розкладання, обчислити визначник і перевірити отриманий результат іншим способом.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно і повністю; правильно застосовано формули та властивості визначників; мінори й алгебраїчні доповнення знайдено правильно; обчислення записані послідовно; у складному завданні обрано раціональний спосіб.

1,25–1,74 бала — основні способи обчислення визначників засвоєно правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних помилок, які не свідчать про нерозуміння методу.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні правила, але допускає суттєві помилки у знаках, знаходженні мінорів, алгебраїчних доповнень або розкладанні визначника.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі елементи завдання; наявні суттєві помилки у виборі способу обчислення та застосуванні формул.

0–0,24 бала — завдання практично не виконано або виконання не демонструє розуміння способів обчислення визначників.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 3

Тема: Обернена матриця

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає робочій програмі дисципліни та проводиться після лекції № 3 «Обернена матриця та її знаходження». Під час заняття відпрацьовуються поняття невиродженої матриці, мінорів, алгебраїчних доповнень, приєднаної матриці, алгоритм знаходження оберненої матриці та перевірка результату множенням. Методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у цьому практичному занятті не розглядаються, оскільки відповідно до робочої програми вони вивчаються далі.

Мета

Закріпити та поглибити знання здобувачів освіти про квадратні матриці, визначники, мінори та алгебраїчні доповнення; сформувати поняття про невироджену та вироджену матриці.

Сформувати практичні вміння встановлювати існування оберненої матриці, знаходити обернені матриці другого і третього порядків за допомогою визначника та алгебраїчних доповнень, правильно складати матрицю алгебраїчних доповнень і транспонувати її.

Навчити здобувачів освіти виконувати обов’язкову перевірку знайденої оберненої матриці за допомогою добутку початкової та оберненої матриць, аналізувати отриманий результат і виявляти типові обчислювальні помилки.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 3 «Обернена матриця та її знаходження», навчальні посібники з вищої математики, матеріали попередніх занять із тем «Дії над матрицями» та «Обчислення визначників», картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення поняття оберненої матриці та умови її існування.
5. Визначення можливості знаходження оберненої матриці.
6. Знаходження оберненої матриці другого порядку.
7. Перевірка оберненої матриці множенням.
8. Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень.
9. Складання матриці алгебраїчних доповнень.
10. Побудова приєднаної матриці.
11. Знаходження оберненої матриці третього порядку.
12. Розв'язування прикладів різного рівня складності.
13. Самостійна робота здобувачів освіти.
14. Аналіз типових помилок.
15. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
16. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Яка матриця називається квадратною?
2. Що називається порядком квадратної матриці?
3. Що називається одиничною матрицею?
4. Як позначається одинична матриця?
5. Який вигляд має одинична матриця другого порядку?
6. Який вигляд має одинична матриця третього порядку?
7. Що називається визначником квадратної матриці?
8. Як обчислюється визначник другого порядку?
9. Якими способами можна обчислити визначник третього порядку?
10. Що називається мінором елемента матриці?
11. Як знайти мінор M_{ij}?

12.Що називається алгебраїчним доповненням?

13.За якою формулою знаходиться алгебраїчне доповнення A_{ij}?

14.Як визначають знак алгебраїчного доповнення?

15.Що називається транспонованою матрицею?

16.Як виконується транспонування матриці?

17.За якої умови можна перемножити дві матриці?

18.Як обчислюється добуток двох матриць?

19.Яка матриця називається оберненою до даної?

20.Як позначається матриця, обернена до матриці A?

21.Яка рівність характеризує обернену матрицю?

22.За якої умови обернена матриця існує?

23.Яка матриця називається невиродженою?

24.Яка матриця називається виродженою?

25.Чи має вироджена матриця обернену?

26.Що необхідно обчислити перед початком знаходження оберненої матриці?

27.Що називається матрицею алгебраїчних доповнень?

28.Як отримують приєднану матрицю?

29.Як перевірити правильність знайденої оберненої матриці?

30.Чому перевірка множенням є важливою частиною розв'язання?

2. Короткі теоретичні відомості

Нехай A— квадратна матриця. Матриця A^{-1}називається **оберненою до матриці** A, якщо виконується рівність

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де E— одинична матриця відповідного порядку.

Обернена матриця існує тільки тоді, коли визначник початкової матриці не дорівнює нулю:

$$\det A \neq 0.$$

Квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається **невиродженою**.

Якщо

$$\det A = 0,$$

матриця називається **виродженою**, а оберненої матриці для неї не існує.

Для знаходження оберненої матриці використовується послідовність:

Крок 1. Обчислити визначник матриці.

Крок 2. Перевірити умову:

$$\det A \neq 0.$$

Крок 3. Знайти мінори всіх елементів.

Крок 4. Знайти відповідні алгебраїчні доповнення.

Крок 5. Скласти матрицю алгебраїчних доповнень.

Крок 6. Транспонувати її та отримати приєднану матрицю.

Крок 7. Знайти обернену матрицю.

Крок 8. Виконати перевірку:

$$AA^{-1} = E.$$

3. Перевірка існування оберненої матриці

Приклад 1

Визначити, чи існує обернена матриця для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для існування оберненої матриці необхідно перевірити визначник матриці A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3.$$

$$\det A = 8 - 3 = 5.$$

Отримали:

$$\det A = 5 \neq 0.$$

Отже, матриця Aє невиродженою, тому обернена матриця існує.

Відповідь

$$\boxed{\det A = 5 \neq 0,\ \text{обернена матриця існує.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Визначити, чи існує обернена матриця для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначити, чи існує обернена матриця для

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Випадок виродженої матриці

Приклад 2

Визначити, чи має обернену матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислюємо визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1.$$

$$\det A = 4 - 4 = 0.$$

Оскільки

$$\det A = 0,$$

матриця є виродженою.

Для виродженої матриці оберненої матриці не існує.

Відповідь

$$\boxed{\det A = 0,\ A^{-1} \text{ не існує.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Визначити можливість знаходження оберненої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Визначити можливість знаходження оберненої матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Обернена матриця другого порядку

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

за умови

$$ad - bc \neq 0$$

обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Приклад 3

Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо визначник.

$$\det A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3.$$

$$\det A = 4 - 3 = 1.$$

Оскільки

$$\det A = 1 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 2. Застосуємо формулу.

Міняємо місцями елементи головної діагоналі та змінюємо знаки елементів побічної діагоналі:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Обчислимо AA^{-1}:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Перевірка підтверджує правильність результату.

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Обернена матриця з дробовими елементами

Приклад 4

Знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2.$$

$$\det A = 12 - 2 = 10.$$

Оскільки

$$10 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 2. Знайдемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Перший елемент:

$$3 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1.$$

Другий елемент першого рядка:

$$3\left(-\frac{1}{10}\right) + 1 \cdot \frac{3}{10} = 0.$$

Перший елемент другого рядка:

$$2 \cdot \frac{2}{5} + 4\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0.$$

Другий елемент:

$$2\left(-\frac{1}{10}\right) + 4 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{2}{10} + \frac{12}{10} = 1.$$

Тому

$$AA^{-1} = E.$$

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Знайти A^{-1}та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2. Знайти B^{-1}та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Знаходження мінорів для матриці третього порядку

Приклад 5

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори першого рядка M_{11}, M_{12}, M_{13}.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо M_{11}

Викреслюємо перший рядок і перший стовпець:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Крок 2. Знайдемо M_{12}

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -1.$$

Крок 3. Знайдемо M_{13}

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$M_{13} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3.$$

Відповідь

$$\boxed{M_{11} = 1,\ M_{12} = -1,\ M_{13} = -3.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти M_{11}, M_{12}, M_{13}.

5.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти M_{21}, M_{22}, M_{23}.

8. Алгебраїчні доповнення

Приклад 6

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

Розв'язання

Із попереднього прикладу:

$$M_{11} = 1,\ M_{12} = -1,\ M_{13} = -3.$$

Використовуємо формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Для першого елемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1.$$

Для другого елемента:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1.$$

Для третього:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-3) = -3.$$

Відповідь

$$\boxed{A_{11} = 1,\ A_{12} = 1,\ A_{13} = -3.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

6.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення другого рядка.

9. Знаходження оберненої діагональної матриці

Приклад 7

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислюємо визначник:

$$\det A = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Обернена матриця існує.

Для діагональної матриці ненульові діагональні елементи замінюються їх оберненими числами:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7.2. Знайти обернену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Обернена матриця третього порядку

Приклад 8

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо визначник.

Матриця має трикутний вигляд, тому

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Обернена матриця існує.

Крок 2. Знайдемо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень.

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Знайдемо обернену матрицю.

Оскільки визначник дорівнює одиниці:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після множення отримуємо:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.2. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Повний алгоритм для матриці третього порядку

Приклад 9

Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо визначник.

Розкладаємо за першим рядком:

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 1(2-1) - 1(1-0).$$

$$\det A = 1 - 1 = 0.$$

Оскільки

$$\det A = 0,$$

матриця є виродженою.

Подальше знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень для побудови оберненої матриці виконувати не потрібно.

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} \text{ не існує.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Перевірити можливість знаходження оберненої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.2. Перевірити можливість знаходження оберненої матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Обернена матриця третього порядку з повною перевіркою

Приклад 10

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Оскільки

$$\det A = 2 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Для верхньої частини матриці маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для третього діагонального елемента число, обернене до 2, дорівнює:

$$\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отримуємо:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.2. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Відновлення матриці за заданою оберненою матрицею

Приклад 11

Дано:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A.

Розв'язання

Якщо

$$A^{-1} = B,$$

то

$$A = B^{-1}.$$

Тому знайдемо матрицю, обернену до заданої.

Обчислюємо визначник:

$$\det A^{-1} = 2 \cdot 2 - (-1)(-3).$$

$$\det A^{-1} = 4 - 3 = 1.$$

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Знайти A, якщо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11.2. Знайти B, якщо

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Комплексне завдання

Приклад 12

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

необхідно:

1. перевірити існування оберненої матриці;
2. знайти A^{-1};
3. виконати перевірку;
4. сформулювати висновок.

Розв’язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5.$$

$$\det A = 6 - 5 = 1.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Матриця є невиродженою.

Крок 2. Знайдемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Виконаємо перевірку.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку множенням.

12.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти B^{-1}та виконати перевірку множенням.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Перевірити, чи існує обернена матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Встановити, чи має обернену матриця:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Знайти обернену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори першого рядка.

Завдання 6. Для матриці з попереднього завдання знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 7. Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 8. Знайти обернену матрицю та обов'язково виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Початок знаходження оберненої матриці без перевірки визначника.

Передусім необхідно знайти $\det A$. Якщо він дорівнює нулю, подальші обчислення не виконуються.

Помилка 2. Спроба знайти обернену матрицю для неквадратної матриці.

У межах цього курсу поняття оберненої матриці застосовується до квадратних невироджених матриць.

Помилка 3. Плутанина між мінором та алгебраїчним доповненням.

Необхідно враховувати множник

$$(-1)^{i+j}.$$

Помилка 4. Неправильне розташування алгебраїчних доповнень.

Після складання матриці алгебраїчних доповнень необхідно виконати її транспонування.

Помилка 5. Втрата множника, пов'язаного з визначником.

Після знаходження приєднаної матриці необхідно врахувати значення визначника початкової матриці.

Помилка 6. Помилки зі знаками.

Особливо уважно потрібно знаходити алгебраїчні доповнення, для яких $i + j$є непарним числом.

Помилка 7. Відсутність перевірки.

Правильність відповіді необхідно підтвердити множенням:

$$AA^{-1} = E.$$

17. Підведення підсумків практичного заняття

Після виконання практичного заняття здобувач освіти повинен уміти визначати, чи існує для заданої квадратної матриці обернена матриця; розрізняти вироджені та невироджені матриці; знаходити мінори й алгебраїчні доповнення; складати матрицю алгебраїчних доповнень; виконувати її транспонування; знаходити обернені матриці другого і третього порядків.

Окремою обов'язковою складовою розв'язання є **перевірка отриманої оберненої матриці множенням**. Якщо в результаті множення отримано одиничну матрицю, результат підтверджено.

Практичне заняття № 3 завершує безпосереднє відпрацювання теми «Обернена матриця». Матричний метод розв'язування систем рівнянь тут не вводиться, оскільки відповідно до робочої програми він опрацьовується окремо.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Яка матриця називається квадратною?
2. Що називається визначником матриці?
3. Що називається мінором елемента?
4. Як знаходиться мінор M_{ij}?
5. Що називається алгебраїчним доповненням?
6. Як знаходиться A_{ij}?
7. Що називається одиничною матрицею?
8. Що називається оберненою матрицею?
9. Як позначається обернена матриця?
10. Яка рівність визначає обернену матрицю?
11. За якої умови обернена матриця існує?
12. Яка матриця називається невиродженою?
13. Яка матриця називається виродженою?
14. Чи існує обернена матриця, якщо $\det A = 0$?
15. З чого необхідно починати знаходження A^{-1}?
16. Як знайти обернену матрицю другого порядку?
17. Що називається матрицею алгебраїчних доповнень?
18. Для чого транспонують матрицю алгебраїчних доповнень?
19. Яка матриця називається приєднаною?
20. Яка послідовність знаходження оберненої матриці третього порядку?
21. Як знайти обернену до діагональної матриці?
22. Чому необхідно стежити за знаками алгебраїчних доповнень?
23. Як перевіряється знайдена обернена матриця?

24.Який результат повинен бути отриманий під час перевірки?

25.Чому обчислення визначника є першим обов’язковим етапом?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта**.

У кожному варіанті:

Завдання 1 — перевірка існування оберненої матриці та знаходження оберненої матриці другого порядку.

Завдання 2 — знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень матриці третього порядку.

Завдання 3 — знаходження оберненої матриці третього порядку з перевіркою.

Максимальна оцінка за домашнє завдання — **2 бали**.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 2

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1}та виконати перевірку.

Варіант 3

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і виконати перевірку.

Варіант 4

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування та знайти A^{-1}.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 5

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1}і перевірити результат.

Варіант 6

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 7

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 8

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити її.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1}та перевірити результат.

Варіант 9

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1}та перевірити результат.

Варіант 10

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 11

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 12

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку множенням.

Варіант 13

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 14

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 15

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 16

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити її множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 17

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 18

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 19

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 20

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 21

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 22

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 23

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 24

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 25

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 26

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 27

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 28

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 29

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 30

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1}та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю за повним алгоритмом та обов’язково перевірити отриманий результат множенням початкової матриці на знайдену обернену матрицю.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі три завдання виконано правильно та повністю; правильно перевірено умову існування оберненої матриці; без помилок знайдено визначники, мінори та алгебраїчні доповнення; правильно складено приєднану й обернену матриці; виконано перевірку множенням; записи послідовні та математично обґрунтовані.

1,25–1,74 бала — здобувач освіти правильно розуміє алгоритм знаходження оберненої матриці та виконує основні етапи, але допускає окремі незначні арифметичні помилки.

0,75–1,24 бала — основний алгоритм засвоєно частково; наявні суттєві помилки у знаходженні мінорів, алгебраїчних доповнень, транспонуванні або перевірці.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі етапи; здобувач освіти має фрагментарне уявлення про умову існування та алгоритм знаходження оберненої матриці.

0–0,24 бала — завдання не виконано або виконання не демонструє розуміння поняття та способу знаходження оберненої матриці.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 4

Тема: Дії над векторами. Скалярний добуток. Розв’язування задач на сили та їх результуючі

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Час — 2 години.

Практичне заняття проводиться після опрацювання лекційних тем «Вектори та дії над ними» і «Скалярний та векторний добутки векторів». Основна увага приділяється практичному виконанню дій над векторами, знаходженню довжини вектора, скалярного добутку, кута між векторами, перевірці перпендикулярності та розв’язуванню задач на додавання сил і визначення їх результуючої.

Мета

Закріпити та систематизувати знання здобувачів освіти про вектори, координати векторів, модуль вектора, рівні, протилежні та колінеарні вектори, основні лінійні дії над векторами та скалярний добуток векторів.

Сформувати практичні вміння знаходити суму і різницю векторів, множити вектор на число, визначати його довжину, обчислювати скалярний добуток, знаходити кут між двома векторами, перевіряти умови перпендикулярності та колінеарності.

Навчити застосовувати векторний апарат до розв’язування прикладних задач на сили: подавати сили векторними величинами, додавати їх за координатами, знаходити координати та модуль результуючої сили, аналізувати напрям дії результуючої.

Розвивати математичне та інженерне мислення, уміння переходити від умови прикладної задачі до її математичної моделі та обґрунтовувати отриманий результат.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекцій № 5 «Вектори та дії над ними» і № 6 «Скалярний та векторний добутки векторів», навчальні посібники з вищої математики, картки індивідуальних завдань, координатні схеми, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення основних понять векторної алгебри.
5. Знаходження координат і довжини вектора.
6. Додавання та віднімання векторів.
7. Множення вектора на число.
8. Перевірка колінеарності векторів.
9. Обчислення скалярного добутку.
10. Визначення перпендикулярності векторів.
11. Знаходження кута між векторами.
12. Застосування векторів до задач на сили.
13. Знаходження результуючої кількох сил.
14. Самостійне розв’язування завдань.
15. Аналіз типових помилок.
16. Підведення підсумків практичного заняття.
17. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається вектором?
2. Що називається початком вектора?
3. Що називається кінцем вектора?
4. Що називається довжиною або модулем вектора?
5. Який вектор називається нульовим?
6. Які вектори називаються рівними?
7. Які вектори називаються протилежними?
8. Які вектори називаються колінеарними?

9. Які вектори називаються співнапрямленими?

10. Які вектори називаються протилежно напрямленими?

11. Як задається вектор своїми координатами?

12. Як знайти координати вектора за координатами його початку та кінця?

13. Як знайти довжину вектора на площині?

14. Як знайти довжину вектора у просторі?

15. Як додати два вектори, задані координатами?

16. Як відняти два вектори?

17. Як помножити вектор на число?

18. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на додатне число?

19. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на від'ємне число?

20. Яка координатна умова колінеарності двох векторів?

21. Що називається скалярним добутком двох векторів?

22. Як обчислити скалярний добуток за координатами?

23. Який геометричний зміст скалярного добутку?

24. За якої умови два ненульові вектори перпендикулярні?

25. Як знайти кут між двома векторами?

26. Яке значення має косинус кута між співнапрямленими векторами?

27. Яке значення має косинус кута між перпендикулярними векторами?

28. Чому силу можна розглядати як векторну величину?

29. Що називається результуючою кількох сил?

30. Як знайти результуючу кількох сил, якщо відомі їх координати?

2. Короткі теоретичні відомості

Вектором називається напрямлений відрізок, який характеризується довжиною та напрямом.

Якщо

$$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2),$$

то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять відніманням координат початку від відповідних координат кінця:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2; -x_1\ y_2 - y_1).$$

Для вектора

$$\vec{a} = (a_x; a_y)$$

його довжина визначається за теоремою Піфагора:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Якщо

$$\vec{a} = (a_1; a_2),\ \vec{b} = (b_1; b_2),$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; +b_1\ a_2 + b_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1; -b_1\ a_2 - b_2),$$

а при множенні на число λ:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda; a_1\lambda a_2).$$

Скалярний добуток векторів визначається співвідношенням

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\ \vec{a}\ |\ \ |\ \vec{b}\ | \cos\varphi\,,$$

де φ— кут між векторами.

За координатами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Звідси кут між ненульовими векторами визначається через

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\ \vec{a}\ |\ \ |\ \vec{b}\ |}.$$

Для перпендикулярних ненульових векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Якщо на матеріальну точку діють сили

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n,$$

то їх результуюча сила визначається як векторна сума:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n.$$

3. Знаходження координат вектора

Приклад 1

Дано точки

$$A(2;1),\ B(7;5).$$

Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання

Координати вектора знаходимо відніманням координат точки Aвід відповідних координат точки B:

$$\overrightarrow{AB} = (7; -2\ 5 - 1).$$

Виконуємо обчислення:

$$7 - 2 = 5,$$

$$5 - 1 = 4.$$

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = (5;4).$$

Перевірка

Вектор спрямований від точки Aдо точки B, тому від координат кінця віднімаємо координати початку.

Відповідь

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (5;4).}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Для точок $A(1;3)$і $B(6;7)$знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

1.2. Для точок $C(-;24)$і $D(3;-1)$знайти координати вектора $\overrightarrow{CD}$.

4. Знаходження довжини вектора

Приклад 2

Знайти довжину вектора

$$\vec{a} = (3;4).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$| \vec{a} |= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Підставляємо координати:

$$| \vec{a} |= \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

$$| \vec{a} |= \sqrt{9 + 16}.$$

$$| \vec{a} |= \sqrt{25} = 5.$$

Перевірка

$$5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Відповідь

$$\boxed{| \vec{a} |= 5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Знайти довжину вектора

$$\vec{a} = (5; 12).$$

2.2. Знайти довжину вектора

$$\vec{b} = (-; 86).$$

5. Додавання і віднімання векторів

Приклад 3

Дано

$$\vec{a} = (3; -2),\ \vec{b} = (5; 4).$$

Знайти:

$$\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} - \vec{b}.$$

Розв'язання

Знайдемо суму:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3; +5\ \ -2 + 4).$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (8; 2).$$

Знайдемо різницю:

$$\vec{a} - \vec{b} = (3; -5\ \ -2 - 4).$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-; 2 - 6).$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (8; 2),\ \vec{a} - \vec{b} = (-; 2 - 6).}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Для

$$\vec{a} = (4; 1),\ \vec{b} = (2; -3)$$

знайти $\vec{a} + \vec{b}$і $\vec{a} - \vec{b}$.

3.2. Для

$$\vec{a} = (-; 25),\ \vec{b} = (6; 3)$$

знайти $\vec{a} + \vec{b}$і $\vec{a} - \vec{b}$.

6. Множення вектора на число

Приклад 4

Дано

$$\vec{a} = (2; -3).$$

Знайти вектор

$$\vec{b} = -4\vec{a}$$

та його довжину.

Розв'язання

Множимо кожну координату вектора на число -4:

$$\vec{b} = \big(-; 4 \cdot 2\ \ -4 \cdot (-3)\big).$$

$$\vec{b} = (-; 812).$$

Знайдемо довжину:

$$|\ \vec{b}\ | = \sqrt{(-8)^2 + 12^2}.$$

$$|\ \vec{b}\ | = \sqrt{64 + 144}.$$

$$|\ \vec{b}\ | = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}.$$

Перевіримо за властивістю модуля:

$$|\ \vec{b}\ | = |\ -4\ |\ \ |\ \vec{a}\ |.$$

Оскільки

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$

то

$$|\vec{b}| = 4\sqrt{13}.$$

Результати збігаються.

Відповідь

$$\boxed{\vec{b} = (-; 812),\ |\vec{b}| = 4\sqrt{13}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Для $\vec{a} = (3; -2)$знайти $\vec{b} = 5\vec{a}$та $|\vec{b}|$.

4.2. Для $\vec{a} = (-; 14)$знайти $\vec{b} = -3\vec{a}$та $|\vec{b}|$.

7. Перевірка колінеарності векторів

Приклад 5

Визначити, чи є колінеарними вектори

$$\vec{a} = (2; 3),\ \vec{b} = (6; 9).$$

Розв'язання

Перевіримо відношення відповідних координат:

$$\frac{6}{2} = 3,$$

$$\frac{9}{3} = 3.$$

Отже,

$$\vec{b} = 3\vec{a}.$$

Один вектор є добутком іншого на число, тому вектори колінеарні.

Оскільки коефіцієнт 3є додатним, вектори також співнапрямлені.

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b};\ \text{вектори співнапрямлені.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Визначити взаємне розташування векторів

$$\vec{a} = (3; 5),\ \vec{b} = (6; 10).$$

5.2. Визначити взаємне розташування векторів

$$\vec{a} = (2; -4),\ \vec{b} = (-; 12).$$

8. Обчислення скалярного добутку

Приклад 6

Дано

$$\vec{a} = (2; 3),\ \vec{b} = (4; -1).$$

Знайти скалярний добуток.

Розв'язання

За координатною формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 3.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Обчислити скалярний добуток:

$$\vec{a} = (3; 2),\ \vec{b} = (5; -4).$$

6.2. Обчислити скалярний добуток:

$$\vec{a} = (-; 26),\ \vec{b} = (4; 3).$$

9. Перевірка перпендикулярності векторів

Приклад 7

Визначити, чи перпендикулярні вектори

$$\vec{a} = (3; 2),\ \vec{b} = (2; -3).$$

Розв’язання

Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 = 0.$$

Обидва вектори ненульові.

Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, вони перпендикулярні.

Отже,

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Перевірити перпендикулярність:

$$\vec{a} = (4; 3),\ \vec{b} = (3; -4).$$

7.2. Перевірити перпендикулярність:

$$\vec{a} = (5; -2),\ \vec{b} = (2; 5).$$

10. Знаходження кута між векторами

Приклад 8

Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1; 1),\ \vec{b} = (1; 0).$$

Розв’язання

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$

Знайдемо довжини:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|\ \vec{b}\ | = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$$

Застосуємо формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}.$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\varphi = 45°.$$

Відповідь

$$\boxed{\varphi = 45°.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1;0),\ \vec{b} = \left(1;\sqrt{3}\right).$$

8.2. Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1;1),\ \vec{b} = (-;11).$$

11. Результуюча двох сил, що діють уздовж однієї прямої

Приклад 9

На матеріальну точку вздовж однієї прямої діють дві сили:

$$F_1 = 500\ \text{Н}$$

у додатному напрямі осі та

$$F_2 = 180\ \text{Н}$$

у протилежному напрямі.

Знайти результуючу силу.

Розв’язання

Оберемо додатний напрям у бік дії першої сили.

Тоді

$$\vec{F}_1 = (500;0),$$

$$\vec{F}_2 = (-;1800).$$

Результуюча:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\vec{R} = (500; -1800).$$

$$\vec{R} = (320; 0).$$

Модуль результуючої:

$$R = 320 \text{ Н}.$$

Додатний знак показує, що результуюча спрямована в бік першої сили.

Відповідь

$$\boxed{R = 320 \text{ Н, напрям збігається з напрямом } \vec{F}_1.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. В одному напрямі діє сила 600Н, у протилежному — 250Н. Знайти результуючу силу та її напрям.

9.2. В одному напрямі діє сила 420Н, у протилежному — 570Н. Знайти модуль та напрям результуючої.

12. Результуюча двох взаємно перпендикулярних сил

Приклад 10

На точку діють дві взаємно перпендикулярні сили:

$$F_1 = 300 \text{ Н}, \; F_2 = 400 \text{ Н}.$$

Знайти модуль результуючої сили.

Розв'язання

Спрямуємо першу силу вздовж осі Ox, а другу — вздовж осі Oy.

Тоді

$$\vec{F}_1 = (300; 0),$$

$$\vec{F}_2 = (0; 400).$$

Результуюча:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\vec{R} = (300; 400).$$

Модуль:

$$R = \sqrt{300^2 + 400^2}.$$

$$R = \sqrt{90000 + 160000}.$$

$$R = \sqrt{250000} = 500 \text{ Н}.$$

Перевірка

Оскільки сили взаємно перпендикулярні, модуль результуючої також можна знайти безпосередньо за теоремою Піфагора:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

$$500^2 = 300^2 + 400^2.$$

Рівність виконується.

Відповідь

$$\boxed{R = 500 \text{ Н}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 600Н і 800Н. Знайти модуль результуючої.

10.2. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 500Н і 1200Н. Знайти модуль результуючої.

13. Результуюча сил, заданих координатами

Приклад 11

На механічну систему діють три сили:

$$\vec{F}_1 = (200; 100) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_2 = (-; 50150) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (100; -50) \text{ Н}.$$

Знайти координати та модуль результуючої сили.

Розв'язання

Результуюча дорівнює сумі всіх сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Знайдемо першу координату:

$$R_x = 200 - 50 + 100 = 250.$$

Знайдемо другу координату:

$$R_y = 100 + 150 - 50 = 200.$$

Отже,

$$\vec{R} = (250; 200) \text{ Н}.$$

Знайдемо модуль:

$$R = \sqrt{250^2 + 200^2}.$$

$$R = \sqrt{62500 + 40000}.$$

$$R = \sqrt{102500}.$$

$$R = 50\sqrt{41} \text{ Н}.$$

Приблизно:

$$R \approx 320{,}16 \text{ Н}.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{R} = (250; 200) \text{ Н},\ R = 50\sqrt{41} \text{ Н} \approx 320{,}16 \text{ Н}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. На систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (300; 100) \text{ Н},\ \vec{F}_2 = (-; 100200) \text{ Н},\ \vec{F}_3 = (50; -100) \text{ Н}.$$

Знайти координати і модуль результуючої.

11.2. На систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (150; 200) \text{ Н},\ \vec{F}_2 = (100; -50) \text{ Н},\ \vec{F}_3 = (-; 50100) \text{ Н}.$$

Знайти координати і модуль результуючої.

14. Комплексна прикладна задача

Приклад 12

На елемент механічної системи діють три сили:

$$\vec{F}_1 = (400; 0) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_2 = (0; 300) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (-; 160 - 180) \text{ Н}.$$

Необхідно:

1. знайти координати результуючої сили;
2. знайти її модуль;
3. визначити, чи є результуюча перпендикулярною до вектора $\vec{a} = (1; -2)$.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо результуючу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Перша координата:

$$R_x = 400 + 0 - 160 = 240.$$

Друга координата:

$$R_y = 0 + 300 - 180 = 120.$$

Отже,

$$\vec{R} = (240; 120) \text{ Н}.$$

Крок 2. Знайдемо модуль

$$R = \sqrt{240^2 + 120^2}.$$

$$R = \sqrt{57600 + 14400}.$$

$$R = \sqrt{72000}.$$

$$R = 120\sqrt{5} \text{ Н}.$$

Приблизно:

$$R \approx 268{,}33 \text{ Н}.$$

Крок 3. Перевіримо перпендикулярність

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{R} \cdot \vec{a} = 240 \cdot 1 + 120 \cdot (-2).$$

$$\vec{R} \cdot \vec{a} = 240 - 240 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю,

$$\vec{R} \perp \vec{a}.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{R} = (240; 120) \text{ Н};\ R = 120\sqrt{5} \text{ Н} \approx 268{,}33 \text{ Н};\ \vec{R} \perp \vec{a}.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (300; 0)\text{ Н},\ \vec{F}_2 = (0; 400)\text{ Н},\ \vec{F}_3 = (-; 100 - 100)\text{ Н}.$$

Знайти результуючу, її модуль та перевірити, чи перпендикулярна вона вектору $\vec{a} = (3; -2)$.

12.2. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (500; 100)\text{ Н},\ \vec{F}_2 = (-; 200300)\text{ Н},\ \vec{F}_3 = (-; 100 - 200)\text{ Н}.$$

Знайти результуючу, її модуль та перевірити, чи перпендикулярна вона вектору $\vec{b} = (1; -1)$.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Для точок $\boldsymbol{A}(-; \mathbf{23})$і $\boldsymbol{B}(\mathbf{4}; \mathbf{8})$знайти координати та довжину вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Завдання 2. Для векторів

$$\vec{a} = (5; -2),\ \vec{b} = (-; 34)$$

знайти їх суму і різницю.

Завдання 3. Для вектора

$$\vec{a} = (2; -5)$$

знайти $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Визначити, чи колінеарні вектори

$$\vec{a} = (3; -6),\ \vec{b} = (-; 24).$$

Завдання 5. Обчислити скалярний добуток векторів

$$\vec{a} = (4; 3),\ \vec{b} = (2; -5).$$

Завдання 6. Визначити, чи перпендикулярні вектори

$$\vec{a} = (2; 5),\ \vec{b} = (5; -2).$$

Завдання 7. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{900}$Н і $\mathbf{1200}$Н. Знайти модуль результуючої сили.

Завдання 8. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (400; 200)\text{ Н},\ \vec{F}_2 = (-; 150100)\text{ Н},\ \vec{F}_3 = (50; -200)\text{ Н}.$$

Знайти координати та модуль результуючої сили.

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Неправильний порядок віднімання координат при знаходженні $\overrightarrow{AB}$.

Необхідно від координат кінця вектора віднімати координати його початку.

Помилка 2. Втрата знака координати при обчисленні довжини.

Координати підносяться до квадрата, тому необхідно записувати від'ємне число в дужках.

Помилка 3. Додавання модулів замість координат векторів.

При векторному додаванні додаються відповідні координати.

Помилка 4. Неправильне множення вектора на число.

На число множиться кожна координата вектора.

Помилка 5. Плутанина між скалярним добутком і векторною сумою.

Скалярний добуток є числом, а сума двох векторів — вектором.

Помилка 6. Висновок про перпендикулярність без перевірки скалярного добутку.

Для ненульових векторів необхідно перевірити умову

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Помилка 7. Додавання модулів сил замість їх векторного додавання.

Якщо сили мають різні напрями, необхідно спочатку додати їх координати.

Помилка 8. Відсутність одиниць вимірювання у прикладній задачі.

Якщо координати сил задані у ньютонах, координати та модуль результуючої також необхідно записувати у ньютонах.

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти закріпили способи виконання основних дій над векторами, знаходження координат і довжини вектора, перевірки колінеарності, обчислення скалярного добутку, встановлення перпендикулярності та знаходження кута між векторами.

Особливе значення має застосування векторного апарату до задач на сили. Сила характеризується не тільки числовим значенням, але й напрямом, тому її

природно подавати вектором. Результуюча кількох сил знаходиться як їх векторна сума.

У прикладних задачах доцільно дотримуватися послідовності: вибрати систему координат, записати сили в координатній формі, знайти координати результуючої, визначити її модуль та проаналізувати напрям.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається вектором?
2. Що називається модулем вектора?
3. Як знайти координати вектора за координатами двох точок?
4. Як знайти довжину вектора на площині?
5. Як додаються вектори в координатній формі?
6. Як віднімаються вектори?
7. Як виконується множення вектора на число?
8. Які вектори називаються колінеарними?
9. Як перевірити колінеарність за координатами?
10. Які вектори називаються співнапрямленими?
11. Які вектори називаються протилежно напрямленими?
12. Що називається скалярним добутком?
13. Як знайти скалярний добуток за координатами?
14. Який геометричний зміст скалярного добутку?
15. Як знайти кут між векторами?
16. Яка умова перпендикулярності ненульових векторів?
17. Чому сила є векторною величиною?
18. Що називається результуючою силою?
19. Як знайти результуючу двох співнапрямлених сил?
20. Як знайти результуючу двох протилежно напрямлених сил?
21. Як знайти результуючу двох взаємно перпендикулярних сил?
22. Як знайти результуючу кількох сил, заданих координатами?

23.Як визначити модуль результуючої сили?

24.Які одиниці вимірювання необхідно використовувати в задачах на сили?

25.Чому в прикладних задачах важливо враховувати напрям сили?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта** та оцінюється максимально у **2 бали**.

Кожний варіант містить **чотири повністю сформульовані завдання різного рівня складності**:

1. дії над векторами;
2. скалярний добуток і взаємне розташування векторів;
3. знаходження результуючої сили;
4. комплексне завдання на сили.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (4; -1)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$та $2\vec{a}$.

Завдання 2. Для векторів $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (4; -3)$обчислити скалярний добуток і визначити, чи є вони перпендикулярними.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 300Н і 400Н. Знайти модуль результуючої сили.

Завдання 4. На механічну систему діють сили $\vec{F_1} = (200; 100)$Н, $\vec{F_2} = (-; 50150)$Н, $\vec{F_3} = (100; -50)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 2

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; -2)$, $\vec{b} = (-; 14)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (5; -2)$обчислити скалярний добуток та встановити взаємне розташування.

Завдання 3. В одному напрямі діє сила 650Н, у протилежному — 250Н. Знайти модуль та напрям результуючої.

Завдання 4. На систему діють сили $\vec{F_1} = (300; 200)$Н, $\vec{F_2} = (-; 100100)$Н, $\vec{F_3} = (50; -150)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 3

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 26)$, $\vec{b} = (3; 1)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (3; -4)$перевірити перпендикулярність.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 500Н і 1200Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (400; 100)$Н, $\vec{F_2} = (-; 200300)$Н, $\vec{F_3} = (100; -200)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 4

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (-; 35)$. Виконати додавання, віднімання та знайти $4\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (1; 0)$знайти кут між векторами.

Завдання 3. В одному напрямі діє сила 800Н, у протилежному — 350Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F_1} = (500; 0)$Н, $\vec{F_2} = (0; 400)$Н, $\vec{F_3} = (-; 200 - 100)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 5

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (2; 6)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{b}$.

Завдання 2. Визначити, чи колінеарні $\vec{a} = (2; 3)$і $\vec{b} = (6; 9)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 600Н і 800Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F_1} = (350; 150)$Н, $\vec{F_2} = (-; 100200)$Н, $\vec{F_3} = (50; -100)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 6

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (-; 23)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (5; -2)$, $\vec{b} = (2; 5)$перевірити перпендикулярність.

Завдання 3. Дві протилежно напрямлені сили мають модулі 720Н і 480Н. Знайти результуючу та її напрям.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (250; 300)$Н, $\vec{F_2} = (100; -150)$Н, $\vec{F_3} = (-; 5050)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 7

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 45)$, $\vec{b} = (3; -2)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -4)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 900Н і 1200Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F_1} = (400; 200)$Н, $\vec{F_2} = (-; 150100)$Н, $\vec{F_3} = (50; -200)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 8

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (1; 7)$, $\vec{b} = (4; -3)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{b}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (3; -6)$, $\vec{b} = (-; 24)$.

Завдання 3. Сили 550Н і 300Н діють у протилежних напрямах. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (300; 400)$Н, $\vec{F}_2 = (-; 100 - 100)$Н, $\vec{F}_3 = (50; 100)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 9

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (-; 42)$. Виконати додавання, віднімання та знайти $2\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = \left(1; \sqrt{3}\right)$знайти кут між векторами.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 700Н і 240Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (500; 200)$Н, $\vec{F}_2 = (-; 200100)$Н, $\vec{F}_3 = (-; 100 - 100)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 10

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 34)$, $\vec{b} = (6; 2)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (6; 2)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили мають модулі 950Н і 430Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (450; 150)$Н, $\vec{F}_2 = (-; 100250)$Н, $\vec{F}_3 = (-; 50 - 100)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 11

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; -1)$, $\vec{b} = (-; 25)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (2; 6)$, $\vec{b} = (4; -1)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{800}$Н і $\mathbf{1500}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (\mathbf{600}; \mathbf{100})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{250300})$Н, $\vec{F}_3 = (\mathbf{50}; -\mathbf{200})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 12

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{2}; -\mathbf{7})$, $\vec{b} = (\mathbf{5}; \mathbf{3})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{4}\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (\mathbf{7}; \mathbf{1})$, $\vec{b} = (\mathbf{1}; -\mathbf{7})$.

Завдання 3. Сили $\mathbf{680}$Н і $\mathbf{280}$Н спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{300}; \mathbf{250})$Н, $\vec{F}_2 = (\mathbf{150}; -\mathbf{100})$Н, $\vec{F}_3 = (-; \mathbf{20050})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 13

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; \mathbf{52})$, $\vec{b} = (\mathbf{3}; \mathbf{6})$. Знайти суму, різницю та $-\mathbf{2}\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{6})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; \mathbf{3})$.

Завдання 3. Взаємно перпендикулярні сили мають модулі $\mathbf{1000}$Н і $\mathbf{750}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{500}; \mathbf{300})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{300100})$Н, $\vec{F}_3 = (\mathbf{100}; -\mathbf{200})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 14

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{4}; -\mathbf{5})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{13})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{5}\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (\mathbf{5}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{34})$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили дорівнюють $\mathbf{760}$Н і $\mathbf{510}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (\mathbf{400}; \mathbf{350})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{150} - \mathbf{100})$Н, $\vec{F}_3 = (\mathbf{50}; \mathbf{150})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 15

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (6; 4)$, $\vec{b} = (-; 31)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{b}$.

Завдання 2. Знайти кут між $\vec{a} = (1; 1)$і $\vec{b} = (-; 11)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 1200Н і 1600Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (700; 0)$Н, $\vec{F_2} = (0; 500)$Н, $\vec{F_3} = (-; 300 - 100)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 16

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (3; 8)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (8; 4)$, $\vec{b} = (1; -2)$.

Завдання 3. Сили 900Н і 350Н діють протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F_1} = (350; 450)$Н, $\vec{F_2} = (-; 10050)$Н, $\vec{F_3} = (150; -200)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 17

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 63)$, $\vec{b} = (4; 2)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (-; 25)$, $\vec{b} = (4; -10)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 450Н і 600Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (250; 150)$Н, $\vec{F_2} = (200; 100)$Н, $\vec{F_3} = (-; 150 - 50)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 18

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; -6)$, $\vec{b} = (-; 24)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили дорівнюють 1100Н і 650Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (600; 250)$Н, $\vec{F_2} = (-; 200150)$Н, $\vec{F_3} = (-; 100 - 100)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 19

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; 2)$, $\vec{b} = (-; 53)$. Знайти суму, різницю та $4\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (3; 6)$, $\vec{b} = (2; -1)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 720Н і 960Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (400; 300)$Н, $\vec{F_2} = (-; 25050)$Н, $\vec{F_3} = (100; -150)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 20

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 47)$, $\vec{b} = (6; -2)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (5; 10)$, $\vec{b} = (-; 2 - 4)$.

Завдання 3. Сили 840Н і 390Н спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (550; 200)$Н, $\vec{F_2} = (-; 150250)$Н, $\vec{F_3} = (-; 200 - 50)$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 21

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (8; -3)$, $\vec{b} = (-; 25)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (-; 24)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 1500Н і 2000Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (800; 100)$Н, $\vec{F_2} = (-; 300400)$Н, $\vec{F_3} = (100; -200)$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 22

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (2; 9)$, $\vec{b} = (5; -4)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (9; 3)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Завдання 3. Сили 980Н і 580Н діють у протилежних напрямах. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (\mathbf{450}; \mathbf{350})$Н, $\vec{F_2} = (-; \mathbf{20050})$Н, $\vec{F_3} = (\mathbf{50}; \mathbf{-150})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 23

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; \mathbf{74})$, $\vec{b} = (\mathbf{3}; \mathbf{5})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{2}\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (\mathbf{6}; \mathbf{-9})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{23})$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{560}$Н і $\mathbf{1050}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (\mathbf{300}; \mathbf{500})$Н, $\vec{F_2} = (\mathbf{100}; \mathbf{-200})$Н, $\vec{F_3} = (-; \mathbf{15050})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 24

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{6})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{51})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{4}\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (\mathbf{7}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{15})$.

Завдання 3. Сили $\mathbf{1250}$Н і $\mathbf{750}$Н спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (\mathbf{700}; \mathbf{300})$Н, $\vec{F_2} = (-; \mathbf{250100})$Н, $\vec{F_3} = (-; \mathbf{150 - 200})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 25

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{9}; \mathbf{-2})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{46})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{-2}\vec{b}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{8})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; \mathbf{-1})$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{1000}$Н і $\mathbf{2400}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F_1} = (\mathbf{600}; \mathbf{400})$Н, $\vec{F_2} = (-; \mathbf{300200})$Н, $\vec{F_3} = (\mathbf{100}; \mathbf{-300})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 26

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; \mathbf{58})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; \mathbf{-3})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{3}\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (\mathbf{10}; \mathbf{5})$.

Завдання 3. Сили $\mathbf{870}$Н і $\mathbf{470}$Н діють протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{500}; \mathbf{250})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{100350})$Н, $\vec{F}_3 = (-; \mathbf{200} - \mathbf{150})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 27

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{6}; -\mathbf{7})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{34})$. Знайти суму, різницю та $-\mathbf{4}\vec{a}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (\mathbf{5}; \mathbf{3})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{42})$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{750}$Н і $\mathbf{1000}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{350}; \mathbf{300})$Н, $\vec{F}_2 = (\mathbf{150}; -\mathbf{100})$Н, $\vec{F}_3 = (-; \mathbf{25050})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 28

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (\mathbf{3}; \mathbf{10})$, $\vec{b} = (\mathbf{7}; -\mathbf{2})$. Знайти суму, різницю та $\mathbf{2}\vec{b}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (\mathbf{10}; \mathbf{5})$, $\vec{b} = (\mathbf{1}; -\mathbf{2})$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили мають модулі $\mathbf{1400}$Н і $\mathbf{900}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{900}; \mathbf{200})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{400300})$Н, $\vec{F}_3 = (\mathbf{100}; -\mathbf{200})$Н. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 29

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; \mathbf{83})$, $\vec{b} = (\mathbf{5}; \mathbf{6})$. Знайти суму, різницю та $-\mathbf{2}\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (\mathbf{3}; \mathbf{7})$, $\vec{b} = (\mathbf{6}; \mathbf{14})$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили $\mathbf{1300}$Н і $\mathbf{840}$Н. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (\mathbf{650}; \mathbf{350})$Н, $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{250150})$Н, $\vec{F}_3 = (-; \mathbf{100} - \mathbf{200})$Н. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 30

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; -5)$, $\vec{b} = (-; 28)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 2. Для векторів $\vec{a} = (6; 3)$та $\vec{b} = (1; -2)$обчислити скалярний добуток та встановити, чи є вектори перпендикулярними.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **1600**Н і **1200**Н. Знайти координати результуючої, якщо перша сила спрямована вздовж додатного напряму осі Ox, друга — вздовж додатного напряму осі Oy, та обчислити її модуль.

Завдання 4. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (800; 200)\ \text{Н},$$

$$\vec{F}_2 = (-; 300400)\ \text{Н},$$

$$\vec{F}_3 = (-; 100 - 200)\ \text{Н}.$$

Знайти координати результуючої сили, її модуль та перевірити, чи є результуюча перпендикулярною до вектора $\vec{a} = (1; -2)$.

20. Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно та повністю; правильно виконано дії над векторами; скалярний добуток обчислено без помилок; взаємне розташування векторів визначено й обґрунтовано; для задач на сили правильно складено векторну модель, знайдено координати та модуль результуючої; усі етапи розв’язання записані послідовно, одиниці вимірювання зазначені.

1,25–1,74 бала — основні способи дій над векторами та знаходження результуючої засвоєно правильно, але допущено окремі арифметичні або обчислювальні помилки, які не змінюють загального розуміння методу.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні поняття, але допускає суттєві помилки при знаходженні координат, скалярного добутку, модуля або результуючої сили.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі елементи завдань; математична модель прикладної задачі побудована частково або з істотними помилками.

0–0,24 бала — завдання не виконано або виконання не демонструє розуміння основних дій над векторами та принципу векторного додавання сил.

21. Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 5

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема: Прикладне застосування

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години

Вид заняття: практичне заняття з професійним спрямуванням

Мета заняття

Узагальнити та закріпити знання здобувачів освіти з елементів лінійної та векторної алгебри; сформувати вміння застосовувати матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектори, скалярний добуток та операції над векторами під час розв'язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Навчити здобувачів освіти математично описувати найпростіші розрахункові ситуації, пов'язані з визначенням невідомих параметрів будівельних об'єктів, опрацюванням числових даних, визначенням проєкцій сил, додаванням сил, знаходженням результуючої системи сил, визначенням кута між напрямами та перевіркою перпендикулярності напрямів конструктивних елементів.

Оснащення

Методичні матеріали до практичного заняття, індивідуальні картки, калькулятор, креслярське приладдя, робочий зошит.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та професійної спрямованості заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Розгляд математичних моделей найпростіших задач будівництва та цивільної інженерії.
5. Розв'язування професійно орієнтованих прикладів.

6. Самостійне виконання аналогічних завдань.
7. Виконання професійно орієнтованих завдань.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків.
10. Пояснення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називають матрицею?
2. Які дії можна виконувати над матрицями?
3. Які умови необхідні для додавання матриць?
4. За якої умови можна перемножити дві матриці?
5. Що називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
6. У чому полягає метод Крамера?
7. Що називають вектором?
8. Як знайти координати суми двох векторів?
9. Як знайти довжину вектора?
10. Що називають скалярним добутком двох векторів?
11. Як за допомогою скалярного добутку визначити кут між векторами?
12. Якою є умова перпендикулярності двох векторів?
13. Як математично визначити результуючу декількох сил?
14. Як розкласти силу на координатні складові?
15. Яке значення векторний апарат має під час опису сил, навантажень і напрямів у будівельних конструкціях?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Опрацювання даних про витрати будівельних матеріалів за допомогою матриць

Для двох ділянок будівництва витрати трьох матеріалів за перший день задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

а за другий день —

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рядки відповідають двом будівельним ділянкам, а стовпці — трьом видам матеріалів. Визначити загальні витрати матеріалів за два дні.

Розв’язання

Оскільки матриці мають однаковий розмір, їх можна додати:

$$A + B = \begin{pmatrix} 12 + 8 & 8 + 5 & 5 + 4 \\ 10 + 9 & 7 + 6 & 6 + 3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A + B = \begin{pmatrix} 20 & 13 & 9 \\ 19 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Перша ділянка за два дні використала відповідно 20, 13 і 9 умовних одиниць трьох матеріалів, друга — 19, 13 і 9.

Відповідь: сумарні витрати матеріалів описуються матрицею

$$\begin{pmatrix} 20 & 13 & 9 \\ 19 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. На двох ділянках будівництва витрати трьох матеріалів у першу зміну задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 6 \\ 12 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

а у другу зміну —

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити загальні витрати матеріалів за дві зміни та пояснити отриманий результат.

2. Обсяги трьох видів будівельних матеріалів, доставлених на два об’єкти у понеділок, задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 7 \\ 14 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

а у вівторок —

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю загального обсягу доставлених матеріалів.

Приклад 2. Визначення невідомих обсягів будівельних матеріалів

Для виконання двох видів будівельних робіт необхідні два матеріали. Нехай xі y— кількість умовних комплектів матеріалів першого та другого виду. За умовами забезпечення об’єкта отримано систему

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ x + 3y = 13. \end{cases}$$

Визначити xі yметодом Крамера.

Розв’язання

Основний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5.$$

Допоміжні визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 13 = 20,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 11 = 15.$$

Тоді

$$x = \frac{20}{5} = 4,\ y = \frac{15}{5} = 3.$$

Відповідь: необхідно 4 умовні комплекти першого виду та 3 комплекти другого виду.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Потреба будівельної дільниці у двох видах матеріалів описується системою

$$\begin{cases} 3x + y = 14, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

Визначити кількість комплектів xі yметодом Крамера.

2. Під час комплектування матеріалів для двох видів робіт отримано систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Розв’язати систему методом Крамера та пояснити зміст отриманих значень.

Приклад 3. Розкладання сили на координатні складові

До вузла будівельної конструкції прикладена сила величиною 10 кілоньютонів під кутом 30°до горизонтального напряму. Визначити горизонтальну і вертикальну складові сили.

Розв'язання

Горизонтальна складова:

$$F_x = F\cos\alpha\,.$$

Тому

$$F_x = 10\cos 30^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66 \text{ кН}.$$

Вертикальна складова:

$$F_y = F\sin\alpha = 10\sin 30^\circ = 5 \text{ кН}.$$

Відповідь: горизонтальна складова становить приблизно 8,66кілоньютона, вертикальна — 5кілоньютонів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. До вузла металевої конструкції прикладено силу 12 кілоньютонів під кутом 60°до горизонталі. Визначити горизонтальну та вертикальну складові сили.

2. До елемента будівельної конструкції прикладено силу 20 кілоньютонів під кутом 45°до горизонтального напряму. Знайти її горизонтальну і вертикальну складові.

Приклад 4. Визначення результуючої двох сил

На вузол конструкції діють дві сили:

$$\vec{F}_1 = (6; 2) \text{ кН},\ \vec{F}_2 = (-; 25) \text{ кН}.$$

Визначити вектор результуючої сили та її величину.

Розв'язання

Результуюча сила дорівнює векторній сумі:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Тому

$$\vec{R} = (6; -2\ 2 + 5) = (4; 7) \text{ кН}.$$

Величина результуючої:

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06 \text{ кН}.$$

Відповідь: $\vec{R} = (4; 7)$кілоньютонів; величина результуючої становить приблизно $8{,}06$кілоньютона.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. На вузол конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (8; 3)$кілоньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 35)$кілоньютонів. Визначити координати та величину результуючої сили.

2. На елемент каркаса діють сили $\vec{F}_1 = (5; -2)$кілоньютонів і $\vec{F}_2 = (4; 6)$кілоньютонів. Визначити результуючу силу та її величину.

Приклад 5. Перевірка перпендикулярності напрямів конструктивних елементів

Напрями двох елементів конструкції задаються векторами

$$\vec{a} = (2; 3),\ \vec{b} = (3; -2).$$

Визначити, чи є ці напрями перпендикулярними.

Розв'язання

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 6 - 6 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток дорівнює нулю, ненульові вектори є перпендикулярними.

Відповідь: напрями конструктивних елементів перпендикулярні.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Напрями двох конструктивних елементів задано векторами $\vec{a} = (4; 2)$та $\vec{b} = (1; -2)$. За допомогою скалярного добутку перевірити їх перпендикулярність.

2. Осі двох елементів задано векторами $\vec{a} = (3; 6)$та $\vec{b} = (4; -2)$. Визначити, чи перпендикулярні ці напрями.

Приклад 6. Визначення кута між конструктивними елементами

Напрями двох стрижневих елементів задано векторами

$$\vec{a} = (1; 2),\ \vec{b} = (3; 1).$$

Визначити кут між ними.

Розв’язання

Скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Довжини векторів:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{5},\ \ |\ \vec{b}\ | = \sqrt{10}.$$

Тоді

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\alpha = 45°.$$

Відповідь: кут між напрямами конструктивних елементів становить $45°$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Напрями двох елементів ферми задано векторами $\vec{a} = (1; 1)$і $\vec{b} = (1; 0)$. Визначити кут між ними.

2. Напрями двох конструктивних елементів задано векторами $\vec{a} = (0; 2)$і $\vec{b} = (2; 2)$. За допомогою скалярного добутку визначити кут між ними.

Завдання для самостійного розв’язування на занятті

Завдання 1. На вузол конструкції діють сили $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{7}; \mathbf{4})$кілоньютонів та $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{2}} = (-; \mathbf{25})$кілоньютонів. Визначити координати результуючої сили та її величину.

Завдання 2. До конструктивного елемента прикладена сила величиною 16 кілоньютонів під кутом $\mathbf{30}°$до горизонтального напряму. Визначити горизонтальну і вертикальну складові сили.

Завдання 3. Напрями двох елементів задані векторами $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{5}; \mathbf{2})$і $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{2}; -\mathbf{5})$. Перевірити за допомогою скалярного добутку, чи є вони перпендикулярними.

Завдання 4. Напрями двох стрижнів задані векторами $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{1}; \mathbf{1})$та $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{0}; \mathbf{2})$. Визначити кут між ними.

Завдання 5. Потреба будівельного об’єкта у двох видах матеріалів описується системою

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Розв’язати систему методом Крамера та пояснити практичний зміст отриманих значень.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне професійно орієнтоване завдання

Кожний здобувач освіти виконує свій варіант. У кожному варіанті необхідно виконати **п’ять завдань**. Умови завдань подано повністю.

Варіант 1

1. На двох будівельних ділянках витрати трьох матеріалів за першу зміну задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, а за другу — $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю сумарних витрат матеріалів.
2. Потреба об’єкта у двох видах матеріалів описується системою $2x + y = 11$, $x + 3y = 13$. Розв’язати систему методом Крамера.
3. До вузла конструкції прикладено силу 10 кілоньютонів під кутом $30°$до горизонталі. Визначити горизонтальну та вертикальну складові.
4. На вузол діють сили $\vec{F}_1 = (6; 2)$і $\vec{F}_2 = (-; 25)$кілоньютонів. Визначити результуючу та її величину.

5. Напрями двох конструктивних елементів задано векторами $\vec{a} = (2; 3)$і $\vec{b} = (3; -2)$. Перевірити їх перпендикулярність.

Варіант 2

1. Витрати матеріалів задано матрицями $A = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 6 \\ 11 & 8 & 5 \end{pmatrix}$і $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Визначити сумарні витрати.
2. Розв'язати методом Крамера систему $3x + y = 14,\ x + 2y = 8$, що описує кількість двох видів комплектів будівельних матеріалів.
3. Сила 12 кілоньютонів діє під кутом $60°$до горизонталі. Визначити її складові.
4. На вузол діють сили $\vec{F}_1 = (8; 3)$і $\vec{F}_2 = (-; 35)$кілоньютонів. Знайти результуючу та її величину.
5. Для напрямів $\vec{a} = (4; 2),\ \vec{b} = (1; -2)$перевірити перпендикулярність.

Варіант 3

1. Обсяги матеріалів задано матрицями $A = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 7 \\ 13 & 9 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти сумарну матрицю.
2. Розв'язати систему $2x + 3y = 13,\ 3x + y = 9$методом Крамера та пояснити зміст результату.
3. До елемента конструкції прикладено силу 20 кілоньютонів під кутом $45°$. Знайти її складові.
4. Сили $\vec{F}_1 = (5; -2),\ \vec{F}_2 = (4; 6)$кілоньютонів діють на один вузол. Визначити результуючу.
5. Для напрямів $\vec{a} = (3; 6),\ \vec{b} = (4; -2)$перевірити перпендикулярність.

Варіант 4

1. Для двох об'єктів витрати матеріалів задано матрицями $A = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 8 \\ 15 & 10 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Визначити загальні витрати.
2. Розв'язати методом Крамера систему $3x + 2y = 16,\ x + y = 6$.
3. Сила 16 кілоньютонів прикладена під кутом $30°$до горизонталі. Визначити складові.

4. Визначити результуючу сил $\vec{F}_1 = (7; 4)$, $\vec{F}_2 = (-; 25)$кілоньютонів та її величину.

5. Перевірити перпендикулярність напрямів $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (2; -5)$.

Варіант 5

1. Витрати матеріалів задано матрицями $A = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 9 \\ 16 & 11 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти сумарну матрицю.

2. Для системи $2x + y = 9$, $x + 2y = 9$визначити xі yметодом Крамера.

3. Сила 18 кілоньютонів діє під кутом $60°$. Визначити її горизонтальну та вертикальну складові.

4. На вузол діють $\vec{F}_1 = (9; 2)$, $\vec{F}_2 = (-; 46)$кілоньютонів. Знайти результуючу та її величину.

5. Перевірити перпендикулярність векторів $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (1; -2)$.

Варіант 6

1. Для двох ділянок обсяги матеріалів задано матрицями $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Визначити сумарні обсяги.

2. Розв’язати методом Крамера систему $4x + y = 13$, $x + 2y = 7$.

3. Сила 14 кілоньютонів діє під кутом $45°$. Визначити її складові.

4. Знайти результуючу сил $\vec{F}_1 = (4; 7)$, $\vec{F}_2 = (3; -2)$кілоньютонів та її величину.

5. Перевірити перпендикулярність напрямів $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (4; -2)$.

Варіант 7

1. Витрати матеріалів задано $A = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 \\ 12 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти сумарну матрицю.

2. Розв’язати систему $2x + 3y = 12$, $x + y = 5$методом Крамера.

3. Сила 24 кілоньютони діє під кутом $30°$. Знайти складові.

4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (8; -3)$, $\vec{F}_2 = (2; 7)$кілоньютонів та її величину.

5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Варіант 8

1. Обсяги матеріалів задано $A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 6 \\ 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Визначити загальні обсяги.
2. Розв'язати методом Крамера систему $3x + y = 11$, $x + 2y = 7$.
3. Сила 22 кілоньютони діє під кутом $60°$. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (6; 5)$, $\vec{F}_2 = (-; 14)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (4; 6)$, $\vec{b} = (3; -2)$.

Варіант 9

1. Визначити суму матриць $A = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 8 \\ 14 & 8 & 5 \end{pmatrix}$та $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, які характеризують витрати матеріалів.
2. Розв'язати систему $x + 2y = 8$, $3x + y = 9$методом Крамера.
3. Сила 26 кілоньютонів прикладена під кутом $45°$. Визначити її складові.
4. Визначити результуючу сил $\vec{F}_1 = (10; 3)$, $\vec{F}_2 = (-; 45)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (5; -2)$.

Варіант 10

1. Знайти загальні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 15 & 9 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $2x + y = 8$, $x + 3y = 9$.
3. Сила 30 кілоньютонів діє під кутом $30°$. Знайти складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (7; 6)$, $\vec{F}_2 = (3; -2)$кілоньютонів та її величину.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (7; 1)$, $\vec{b} = (1; -7)$.

Варіант 11

1. Для матриць витрат $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$визначити сумарну матрицю.
2. Розв'язати систему $3x + 2y = 13$, $x + y = 5$методом Крамера.
3. Сила 15 кілоньютонів діє під кутом $60°$. Визначити складові.

4. Знайти результуючу сил $\vec{F}_1 = (5; 8)$, $\vec{F}_2 = (2; -3)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (4; 1)$, $\vec{b} = (1; -4)$.

Варіант 12

1. Визначити сумарні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 8 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $4x + y = 14,\ 2x + 3y = 13$.
3. Сила 28 кілоньютонів діє під кутом $45°$. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (9; -2)$, $\vec{F}_2 = (-; 38)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (5; 5)$, $\vec{b} = (2; -2)$.

Варіант 13

1. Матриці $A = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 7 \\ 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$та $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$описують витрати матеріалів. Знайти їх суму.
2. Розв'язати систему $2x + 3y = 11,\ 3x + y = 8$методом Крамера.
3. Розкласти силу 32 кілоньютони, прикладену під кутом $30°$, на складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (11; 4)$, $\vec{F}_2 = (-; 53)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (6; 2)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Варіант 14

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 9 \\ 16 & 12 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $3x + y = 13,\ 2x + 3y = 16$.
3. Сила 36 кілоньютонів діє під кутом $60°$. Знайти складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (8; 7)$, $\vec{F}_2 = (-; 24)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (8; 4)$, $\vec{b} = (2; -4)$.

Варіант 15

1. Визначити загальні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 17 & 11 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему $x + 2y = 7,\ 3x + y = 11$методом Крамера.
3. Сила 18 кілоньютонів діє під кутом 45°. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (12; 3),\ \vec{F}_2 = (-; 46)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (3; 9),\ \vec{b} = (6; -2)$.

Варіант 16

1. Знайти суму матриць витрат $A = \begin{pmatrix} 21 & 13 & 8 \\ 15 & 12 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати методом Крамера систему $2x + y = 10,\ x + 2y = 8$.
3. Розкласти силу 20 кілоньютонів під кутом 30°на складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (9; 5),\ \vec{F}_2 = (4; -3)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (5; 10),\ \vec{b} = (4; -2)$.

Варіант 17

1. Визначити сумарну матрицю $A = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 7 \\ 12 & 9 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати систему $3x + 2y = 12,\ x + y = 5$методом Крамера.
3. Сила 24 кілоньютони діє під кутом 60°. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (6; 9),\ \vec{F}_2 = (3; -4)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (2; 6),\ \vec{b} = (3; -1)$.

Варіант 18

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 9 \\ 14 & 10 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати методом Крамера систему $4x + y = 17,\ x + 3y = 11$.
3. Сила 34 кілоньютони діє під кутом 45°. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (10; -3),\ \vec{F}_2 = (-; 29)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (4; 8),\ \vec{b} = (6; -3)$.

Варіант 19

1. Обчислити сумарні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 10 \\ 16 & 11 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему $2x + 3y = 16,\ 3x + y = 13$методом Крамера.
3. Сила 40 кілоньютонів діє під кутом $30°$. Визначити складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (13; 4),\ \vec{F}_2 = (-; 58)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (7; 14),\ \vec{b} = (4; -2)$.

Варіант 20

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 19 & 14 & 11 \\ 17 & 12 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати методом Крамера систему $3x + y = 16,\ x + 2y = 9$.
3. Сила 42 кілоньютони діє під кутом $60°$. Знайти складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (11; 7),\ \vec{F}_2 = (-; 35)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (9; 3),\ \vec{b} = (1; -3)$.

Варіант 21

1. Визначити загальні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 9 \\ 18 & 13 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 11 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати систему $2x + y = 12,\ x + 3y = 11$методом Крамера.
3. Сила 25 кілоньютонів діє під кутом $45°$. Визначити складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (8; 10),\ \vec{F}_2 = (5; -4)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (10; 5),\ \vec{b} = (1; -2)$.

Варіант 22

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 12 \\ 20 & 14 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 5 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Розв’язати методом Крамера систему $3x + 2y = 17,\ x + y = 6$.
3. Розкласти силу 44 кілоньютони під кутом $30°$на складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (14; 3),\ \vec{F}_2 = (-; 69)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (6; 9),\ \vec{b} = (3; -2)$.

Варіант 23

1. Визначити сумарні обсяги матеріалів за матрицями $A = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 8 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати систему $4x + y = 18$, $x + 2y = 9$методом Крамера.
3. Сила 48 кілоньютонів діє під кутом $60°$. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (12; 8)$, $\vec{F}_2 = (-; 47)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (8; 12)$, $\vec{b} = (3; -2)$.

Варіант 24

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $2x + 3y = 17$, $3x + y = 14$.
3. Сила 38 кілоньютонів діє під кутом $45°$. Визначити складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (15; -4)$, $\vec{F}_2 = (-; 510)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (4; 12)$, $\vec{b} = (6; -2)$.

Варіант 25

1. Визначити сумарні витрати за матрицями $A = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 11 \\ 18 & 14 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати систему $3x + y = 17$, $x + 3y = 11$методом Крамера.
3. Сила 50 кілоньютонів діє під кутом $30°$. Знайти складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (16; 5)$, $\vec{F}_2 = (-; 78)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (12; 4)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Варіант 26

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 22 & 18 & 12 \\ 19 & 15 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 7 \\ 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $2x + y = 13$, $x + 2y = 11$.
3. Сила 52 кілоньютони діє під кутом $60°$. Визначити складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (13; 9)$, $\vec{F}_2 = (-; 46)$кілоньютонів.

5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (5; 15)$, $\vec{b} = (6; -2)$.

Варіант 27

1. Визначити загальні обсяги матеріалів за матрицями $A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 13 \\ 21 & 16 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 6 \\ 12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати систему $3x + 2y = 18,\ 2x + y = 11$методом Крамера.
3. Сила 46 кілоньютонів діє під кутом $45°$. Визначити складові.
4. Знайти результуючу $\vec{F}_1 = (17; 4)$, $\vec{F}_2 = (-; 69)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (14; 7)$, $\vec{b} = (1; -2)$.

Варіант 28

1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 26 & 20 & 14 \\ 22 & 17 & 12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 7 \\ 13 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати методом Крамера систему $4x + y = 19,\ x + 3y = 12$.
3. Сила 54 кілоньютони діє під кутом $30°$. Знайти складові.
4. Визначити результуючу $\vec{F}_1 = (15; 10)$, $\vec{F}_2 = (-; 57)$кілоньютонів.
5. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (6; 18)$, $\vec{b} = (3; -1)$.

Варіант 29

1. Визначити сумарні витрати матеріалів за матрицями $A = \begin{pmatrix} 28 & 21 & 15 \\ 23 & 18 & 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 8 \\ 14 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Розв'язати систему $2x + 3y = 18,\ 3x + y = 15$методом Крамера.
3. Сила 56 кілоньютонів діє під кутом $60°$. Визначити горизонтальну та вертикальну складові.
4. Знайти результуючу сил $\vec{F}_1 = (18; 6)$, $\vec{F}_2 = (-; 810)$кілоньютонів та її величину.
5. Перевірити перпендикулярність напрямів $\vec{a} = (8; 16)$, $\vec{b} = (4; -2)$.

Варіант 30

1. На двох будівельних об'єктах витрати трьох видів матеріалів за першу зміну задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 16 \\ 25 & 19 & 14 \end{pmatrix}$, а за другу зміну — матрицею

$B = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 9 \\ 15 & 11 & 8 \end{pmatrix}$. Визначити матрицю сумарних витрат матеріалів за дві зміни та пояснити зміст кожного її елемента.

2. Кількість двох видів комплектів будівельних матеріалів xі yвизначається системою $3x + 2y = 19,\ x + y = 7$. Розв'язати систему методом Крамера, виконати перевірку та пояснити практичний зміст отриманих значень.

3. До вузла будівельної конструкції прикладена сила величиною 60 кілоньютонів під кутом $45°$до горизонтального напряму. Визначити горизонтальну та вертикальну складові сили і записати силу у векторній формі.

4. На вузол будівельної конструкції одночасно діють дві сили $\vec{F}_1 = (20; 5)$кілоньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 712)$кілоньютонів. Визначити координати результуючої сили, обчислити її величину та пояснити фізичний зміст отриманого результату.

5. Напрями двох конструктивних елементів задані векторами $\vec{a} = (10; 5)$та $\vec{b} = (2; -4)$. За допомогою скалярного добутку визначити, чи є ці напрями перпендикулярними. Обґрунтувати висновок.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Що перевіряється**	**Максимальна оцінка**
1	Застосування матриць до опрацювання даних про будівельні матеріали	**0,75 бала**
2	Побудова та розв'язування системи лінійних рівнянь методом Крамера	**1,25 бала**
3	Розкладання сили на координатні складові	**1,00 бал**
4	Векторне додавання сил і визначення результуючої	**1,25 бала**
5	Застосування скалярного добутку для дослідження напрямів	**0,75 бала**

Завдання	Що перевіряється	Максимальна оцінка
Разом		**5,00 балів**

Деталізація оцінювання

Завдання 1 — 0,75 бала. Правильне визначення математичної операції — 0,15 бала; правильне виконання дій над матрицями — 0,45 бала; пояснення отриманого результату відповідно до умови задачі — 0,15 бала.

Завдання 2 — 1,25 бала. Правильне складання основного визначника — 0,25 бала; допоміжних визначників — 0,30 бала; правильне обчислення невідомих — 0,40 бала; перевірка або пояснення професійного змісту результату — 0,30 бала.

Завдання 3 — 1,00 бал. Правильний вибір співвідношень для проєкцій сили — 0,30 бала; правильне визначення горизонтальної складової — 0,25 бала; вертикальної складової — 0,25 бала; правильні одиниці вимірювання та відповідь — 0,20 бала.

Завдання 4 — 1,25 бала. Правильне векторне додавання сил — 0,35 бала; правильні координати результуючої — 0,25 бала; правильне визначення величини результуючої — 0,40 бала; змістовна відповідь — 0,25 бала.

Завдання 5 — 0,75 бала. Правильне обчислення скалярного добутку — 0,40 бала; застосування ознаки перпендикулярності — 0,20 бала; правильний висновок — 0,15 бала.

Типові помилки

Під час виконання завдань необхідно звернути увагу на відповідність розмірів матриць; правильність знаків під час обчислення визначників; правильне формування допоміжних визначників у методі Крамера; урахування напрямів сил під час додавання векторів; правильне використання синуса і косинуса під час розкладання сили на складові; правильність обчислення довжини результуючого вектора; використання умови $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$лише для ненульових перпендикулярних векторів.

Підведення підсумків

У практичному занятті № 5 математичний зміст робочої програми збережено: здобувачі освіти застосовують **матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь і вектори до професійно орієнтованих задач**. Професійний контекст змінено відповідно до спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»**: замість параметрів автомобіля використовуються дані

про будівельні матеріали, конструктивні елементи, сили, їх складові, напрями та результуючі.

Водночас ці задачі слід розглядати саме як **навчальні математичні моделі**. Вони формують уміння застосовувати лінійну та векторну алгебру до професійних ситуацій, але не замінюють повного інженерного розрахунку будівельних конструкцій.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 6

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 1

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема: Рішення завдань за модулем 1

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 5 балів

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань та практичних умінь, сформованих під час вивчення змістового модуля 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри»; визначити рівень сформованості вмінь виконувати дії над матрицями, обчислювати визначники, знаходити обернені матриці, розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, виконувати дії над векторами, знаходити скалярний добуток та кут між векторами.

Перевірити здатність застосовувати елементи лінійної та векторної алгебри під час розв’язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія», зокрема задач, пов’язаних із силами та навантаженнями, що діють на елементи будівельних конструкцій, визначенням рівнодійної системи сил, напрямів конструктивних елементів та геометричних характеристик розрахункових схем.

Такий зміст безпосередньо відповідає математичним темам першого модуля робочої програми.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань модульного контролю.
6. Перевірка отриманих результатів.
7. Оцінювання виконаної роботи.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків змістового модуля 1.

Структура індивідуального варіанта

Кожен із **30 варіантів** містить сім завдань:

Завдання 1 — дії над матрицями.

Завдання 2 — обчислення визначника третього порядку.

Завдання 3 — знаходження оберненої матриці.

Завдання 4 — розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

Завдання 5 — дії над векторами.

Завдання 6 — скалярний добуток та кут між векторами.

Завдання 7 — професійно орієнтована задача для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Дії над матрицями.
Для заданих матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити матрицю $C = 2A - B$.

Завдання 2. Обчислення визначника.
Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконати перевірку множенням AA^{-1}.

Завдання 4. Метод Крамера.

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Завдання 5. Дії над векторами.

Дано вектори $\vec{a} = (2; -; 13)$і $\vec{b} = (1; 4; -2)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 6. Скалярний добуток.

Дано вектори $\vec{a} = (3; 4)$і $\vec{b} = (4; 3)$. Обчислити їх скалярний добуток та визначити кут між векторами.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

На вузол будівельної конструкції діють дві сили: горизонтальна сила

$$\vec{F_1} = (6; 0) \text{ кН}$$

та вертикальна сила

$$\vec{F_2} = (0; 8) \text{ кН}.$$

Визначити вектор рівнодійної сили, її модуль та кут, який рівнодійна утворює з додатним напрямом горизонтальної осі. Пояснити фізичний зміст отриманого результату для розрахункової схеми конструкції.

Варіант 2

Завдання 1. Дії над матрицями.

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити $C = A + 2B$.

Завдання 2. Обчислення визначника.

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

та виконати перевірку.

Завдання 4. Метод Крамера.

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Завдання 5. Дії над векторами.

Дано $\vec{a} = (3; 2; -1)$, $\vec{b} = (-; 1; 42)$. Знайти суму, різницю векторів, вектор $3\vec{a} + \vec{b}$та довжину $\vec{b}$.

Завдання 6. Скалярний добуток.

Для векторів $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; -1)$обчислити скалярний добуток і кут між ними.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

До вузла металевої ферми прикладені сили

$$\vec{F}_1 = (8; 0) \text{ кН}, \ \vec{F}_2 = (0; 6) \text{ кН}.$$

Визначити вектор рівнодійної сили, її модуль і напрям відносно горизонтальної осі.

Варіант 3

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити $C = 3A - B$.

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

та виконати перевірку.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; -; \mathbf{14})$знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + \vec{b}$і довжину $\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{2}; \mathbf{3})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{14})$знайти скалярний добуток та кут між векторами.

Завдання 7. На опорний вузол конструкції діють дві взаємно перпендикулярні сили: горизонтальна сила 5 кН та вертикальна сила 12 кН. Записати ці сили у векторній формі, визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 4

Завдання 1. Для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити $2A + B$.

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати

$$\begin{cases} 4x + y = 11, \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}; -; \mathbf{31})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{4}; \mathbf{1}; -\mathbf{2})$знайти суму, різницю, $\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$і довжину $\vec{\boldsymbol{a}}$.

Завдання 6. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{3}; \mathbf{1})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{2}; \mathbf{4})$знайти скалярний добуток і кут між ними.

Завдання 7. До вузла каркасної конструкції прикладено горизонтальне навантаження 9 кН і вертикальне навантаження 12 кН. Представити навантаження векторами, визначити рівнодійну силу, її модуль та кут нахилу до горизонталі.

Варіант 5

Завдання 1. Для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити $A - 2B$.

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти $\boldsymbol{A^{-1}}$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Розв’язати методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - y = 7, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (4; 1; -2)$, $\vec{b} = (2; -; 31)$знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{b}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (1; 3)$обчислити скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На вузол покрівельної конструкції діють горизонтальна сила 7 кН та вертикальна сила 24 кН. Визначити вектор рівнодійної сили, її модуль і напрям відносно горизонтальної осі.

Варіант 6

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$обчислити $3A - 2B$.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$і виконати перевірку.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (3; -; 14)$, $\vec{b} = (1; 2; -2)$знайти суму, різницю, $2\vec{a} - \vec{b}$та довжину $\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (4; 1)$обчислити скалярний добуток та кут між векторами.

Завдання 7. На вузол просторової будівельної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (6; 0; 0)$кН, $\vec{F}_2 = (0; 8; 0)$кН та $\vec{F}_3 = (0; 0; 12)$кН. Знайти вектор рівнодійної та її модуль.

Варіант 7

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$обчислити $2A - B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $\begin{cases} \mathbf{3}x + y = \mathbf{10}, \\ x - \mathbf{2}y = -\mathbf{1}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{2}; \mathbf{4}; -\mathbf{1})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{1}; \mathbf{32})$знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\mathbf{3}\vec{a} + \vec{b}$, $| \vec{b} |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{1}; \mathbf{4})$, $\vec{b} = (\mathbf{3}; \mathbf{2})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До вузла будівельної ферми прикладено дві сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{12}; \mathbf{5})$кН і $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{47})$кН. Визначити компоненти рівнодійної, її модуль і напрям.

Варіант 8

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$обчислити $A + \mathbf{3}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{2}x + \mathbf{5}y = \mathbf{14}, \\ \mathbf{3}x - y = \mathbf{7}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{5}; \mathbf{2}; \mathbf{1})$, $\vec{b} = (\mathbf{1}; -; \mathbf{23})$виконати додавання, віднімання, знайти $\mathbf{2}\vec{a} + \vec{b}$та $| \vec{a} |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{3}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{25})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На опорний вузол конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{10}; -\mathbf{4})$кН і $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{210})$кН. Знайти рівнодійну силу, її модуль та напрям.

Варіант 9

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{2}A + \mathbf{2}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв’язати методом Крамера $\begin{cases} 4x + 3y = 18, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (1; 5; -2)$, $\vec{b} = (3; -; 14)$знайти суму, різницю, $3\vec{a} - 2\vec{b}$та $|\vec{b}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 1)$, $\vec{b} = (2; 3)$визначити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол рамної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (8; 6)$кН та $\vec{F}_2 = (4; -3)$кН. Знайти рівнодійну силу, її модуль і кут нахилу до горизонталі.

Варіант 10

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$обчислити $A - 3B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв’язати $\begin{cases} 5x + y = 16, \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$ методом Крамера.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (4; -; 23)$, $\vec{b} = (2; 3; -1)$знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 2\vec{b}$, $|\vec{a}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (2; 6)$, $\vec{b} = (4; 2)$обчислити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На конструктивний вузол діють горизонтальна сила 15 кН і вертикальна сила 8 кН. Подати сили векторно, визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 11

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$обчислити $3A - B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{5}, \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{12}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (-; \mathbf{1}; \mathbf{42})$виконати основні дії та знайти $|\ \vec{\boldsymbol{a}}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{4}; \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (-; \mathbf{12})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До вузла ферми прикладено сили $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{9}; \mathbf{12})$кН і $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{3}; -\mathbf{4})$кН. Знайти рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 12

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{2}\boldsymbol{A} + \mathbf{3}\boldsymbol{B}$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{11}, \\ \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{9}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{3}; -; \mathbf{24})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{2}; \mathbf{1}; -\mathbf{3})$знайти суму, різницю, $\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$, $|\ \vec{\boldsymbol{b}}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{\boldsymbol{a}} = (\mathbf{3}; \mathbf{5})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (\mathbf{1}; \mathbf{4})$визначити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол будівельного каркаса діють сили $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{1}} = (-; \mathbf{68})$кН та $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{10}; \mathbf{2})$кН. Визначити рівнодійну, її модуль і напрям.

Варіант 13

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{3}\boldsymbol{A} + \mathbf{2}\boldsymbol{B}$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв’язати методом Крамера $\begin{cases} 4x + y = 13, \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (1; 4; 3)$, $\vec{b} = (3; -; 22)$виконати додавання і віднімання, знайти $3\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (2; 5)$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На вузол балкової конструкції передаються сили $\vec{F}_1 = (12; 0)$кН та $\vec{F}_2 = (-; 512)$кН. Знайти рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 14

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$обчислити $2A - B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв’язати $\begin{cases} 3x + 4y = 18, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; 1; -3)$, $\vec{b} = (2; -; 24)$знайти суму, різницю, $2\vec{a} + 3\vec{b}$та довжину $\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На опорний вузол будівельної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (7; 24)$кН та $\vec{F}_2 = (5; 0)$кН. Визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 15

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$обчислити $A + 2B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{5x - 2y = 8}, \\ \mathbf{3x + y = 9}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{4; 3; -2})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{2; 15})$знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$, $|\ \vec{b}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{2; 7})$, $\vec{b} = (\mathbf{5; 1})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До вузла просторового каркаса прикладено сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{4; 0; 0})$кН, $\vec{F}_2 = (\mathbf{0; 6; 0})$кН, $\vec{F}_3 = (\mathbf{0; 0; 12})$кН. Визначити вектор і модуль рівнодійної сили.

Варіант 16

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$обчислити $3A - 2B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв'язати методом Крамера $\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 14}, \\ \mathbf{5x - y = 8}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{2; 5; 3})$, $\vec{b} = (\mathbf{4; -; 12})$виконати додавання, віднімання, знайти $2\vec{a} - \vec{b}$та $|\ \vec{a}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{4; 5})$, $\vec{b} = (\mathbf{2; 3})$обчислити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол будівельної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{5; 12})$кН та $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{34})$кН. Знайти вектор рівнодійної, її модуль і напрям.

Варіант 17

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$обчислити $2A + B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{4x-3y=5}, \\ \mathbf{2x+5y=19}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a}=(\mathbf{3};\mathbf{1};\mathbf{5})$, $\vec{b}=(\mathbf{1};\mathbf{4};\mathbf{-2})$знайти суму, різницю, $\mathbf{3}\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{b}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a}=(\mathbf{5};\mathbf{3})$, $\vec{b}=(-;\mathbf{24})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На вузол ферми діють сили $\vec{F}_1=(\mathbf{15};\mathbf{8})$кН та $\vec{F}_2=(-;\mathbf{68})$кН. Визначити компоненти, модуль і напрям рівнодійної сили.

Варіант 18

Завдання 1. Для $A=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{5}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{2}A+\mathbf{2}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{5}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{3x+5y=16}, \\ \mathbf{4x-y=7}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a}=(\mathbf{4};-;\mathbf{12})$, $\vec{b}=(\mathbf{2};\mathbf{3};\mathbf{5})$знайти суму, різницю, $\mathbf{2}\vec{a}+\mathbf{2}\vec{b}$, $|\vec{a}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a}=(\mathbf{3};\mathbf{6})$, $\vec{b}=(\mathbf{4};\mathbf{2})$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На опорний вузол каркаса діють сили $\vec{F}_1=(-;\mathbf{86})$кН і $\vec{F}_2=(\mathbf{12};\mathbf{3})$кН. Знайти рівнодійну силу, її модуль та напрям.

Варіант 19

Завдання 1. Для $A=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$обчислити $A-\mathbf{2}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4}\end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} 5x + 2y = 17, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (1; 3; 6)$, $\vec{b} = (5; -; 21)$виконати додавання, віднімання, знайти $3\vec{a} - \vec{b}$і $|\vec{b}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (7; 1)$, $\vec{b} = (2; 5)$визначити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол несучої конструкції діють горизонтальна сила 20 кН та вертикальна сила 15 кН. Визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 20

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$обчислити $3A + B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 5x - 2y = 11. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (2; 6; -1)$, $\vec{b} = (3; 1; 4)$знайти суму, різницю, $2\vec{a} + 3\vec{b}$і $|\vec{a}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (1; 5)$обчислити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол рамної конструкції діють сили $\vec{F_1} = (10; 10)$кН і $\vec{F_2} = (5; -2)$кН. Знайти рівнодійну силу, її модуль і напрям.

Варіант 21

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$обчислити $2A - 3B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{4x + 2y = 14}, \\ \mathbf{3x - 5y = -1}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{5; 2; -4})$, $\vec{b} = (\mathbf{1; 3; 2})$знайти суму, різницю, $\mathbf{2}\vec{a} - \vec{b}$, $|\ \vec{b}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{4; 6})$, $\vec{b} = (\mathbf{3; 1})$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. До вузла металевої конструкції прикладені сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{18; 0})$кН та $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{68})$кН. Визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 22

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$обчислити $\boldsymbol{A + 2B}$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{8} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 13}, \\ \mathbf{5x - y = 9}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{3; 5; 1})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{2; 43})$знайти суму, різницю, $\mathbf{3}\vec{a} + \vec{b}$, $|\ \vec{a}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{2; 8})$, $\vec{b} = (\mathbf{5; 2})$визначити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол будівельної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{9; -12})$кН та $\vec{F}_2 = (\mathbf{7; 4})$кН. Визначити вектор рівнодійної, її модуль та напрям.

Варіант 23

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$обчислити $\boldsymbol{2A + B}$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{5}x + \mathbf{3}y = \mathbf{19}, \\ \mathbf{2}x - y = \mathbf{3}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{2}; \mathbf{5})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; -; \mathbf{31})$виконати додавання, віднімання, знайти $\mathbf{2}\vec{a} + \mathbf{3}\vec{b}$та $|\ \vec{b}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{5}; \mathbf{4})$, $\vec{b} = (-; \mathbf{13})$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол просторової конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{3}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$кН, $\vec{F}_2 = (\mathbf{0}; \mathbf{4}; \mathbf{0})$кН і $\vec{F}_3 = (\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{12})$кН. Визначити рівнодійну та її модуль.

Варіант 24

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{3}A - B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{2}x + \mathbf{5}y = \mathbf{17}, \\ \mathbf{4}x - \mathbf{3}y = \mathbf{1}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{6}; \mathbf{1}; \mathbf{-2})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{3})$знайти суму, різницю, $\mathbf{2}\vec{a} - \vec{b}$та $|\ \vec{a}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{3}; \mathbf{7})$, $\vec{b} = (\mathbf{4}; \mathbf{2})$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол каркасної будівлі діють сили $\vec{F}_1 = (-; \mathbf{512})$кН та $\vec{F}_2 = (\mathbf{9}; \mathbf{0})$кН. Визначити рівнодійну силу, її модуль і напрям.

Варіант 25

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{2}A + \mathbf{2}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{4}x + y = \mathbf{17}, \\ \mathbf{3}x - \mathbf{2}y = \mathbf{6}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{2}; \mathbf{4}; \mathbf{6})$, $\vec{b} = (\mathbf{5}; \mathbf{1}; -\mathbf{2})$знайти суму, різницю, $\mathbf{3}\vec{a} - \vec{b}$, $|\ \vec{b}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{6}; \mathbf{4})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; \mathbf{5})$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На опору будівельної конструкції передаються дві складові сили: горизонтальна 16 кН та вертикальна 12 кН. Подати сили у векторній формі, визначити рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 26

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$обчислити $A - \mathbf{2}B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{3}x + \mathbf{4}y = \mathbf{17}, \\ \mathbf{5}x - \mathbf{2}y = \mathbf{11}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{5}; -; \mathbf{23})$, $\vec{b} = (\mathbf{1}; \mathbf{4}; \mathbf{2})$знайти суму, різницю, $\mathbf{2}\vec{a} + \mathbf{3}\vec{b}$, $|\ \vec{a}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{7}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (\mathbf{3}; \mathbf{5})$обчислити скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До вузла ферми прикладено сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{12}; \mathbf{9})$кН і $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{43})$кН. Знайти рівнодійну, її модуль та напрям.

Варіант 27

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$обчислити $\mathbf{3}A + B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} 5x + 2y = 16, \\ 4x - 3y = 3. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (3; 6; -2)$, $\vec{b} = (4; -; 15)$виконати додавання і віднімання, знайти $3\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{b}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 7)$, $\vec{b} = (6; 1)$знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На вузол просторового каркаса діють сили $\vec{F}_1 = (8; 0; 0)$кН, $\vec{F}_2 = (0; 15; 0)$кН та $\vec{F}_3 = (0; 0; 6)$кН. Визначити вектор рівнодійної та її модуль.

Варіант 28

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$обчислити $2A - B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} 2x + 6y = 16, \\ 5x - y = 9. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (1; 5; 4)$, $\vec{b} = (3; 2; -2)$знайти суму, різницю, $2\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 6)$, $\vec{b} = (2; 4)$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На вузол рамної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (14; -5)$кН і $\vec{F}_2 = (-; 611)$кН. Знайти рівнодійну, її модуль і напрям відносно горизонтальної осі.

Варіант 29

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$обчислити $A + 3B$.

Завдання 2. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати $\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 21}, \\ \mathbf{3x - 2y = 4}. \end{cases}$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (\mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{-1})$, $\vec{b} = (\mathbf{2}; -; \mathbf{36})$знайти суму, різницю, $\mathbf{3}\vec{a} - \mathbf{2}\vec{b}$, $|\ \vec{b}\ |$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (\mathbf{8}; \mathbf{2})$, $\vec{b} = (\mathbf{3}; \mathbf{4})$знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. До вузла будівельної конструкції прикладено сили $\vec{F}_1 = (\mathbf{10}; \mathbf{24})$кН та $\vec{F}_2 = (-; \mathbf{46})$кН. Визначити вектор рівнодійної сили, її модуль та напрям.

Варіант 30

Завдання 1. Дії над матрицями.

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити матрицю $C = 2A + 3B$.

Завдання 2. Обчислення визначника.

Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю A^{-1}. Правильність отриманого результату перевірити множенням AA^{-1}.

Завдання 4. Розв'язування системи методом Крамера.

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19, \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

методом Крамера. Обчислити головний та допоміжні визначники і знайти невідомі xта y.

Завдання 5. Дії над векторами.
Дано вектори

$$\vec{a} = (5; 3; -2),\ \vec{b} = (1; -; 45).$$

Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 6. Скалярний добуток та кут між векторами.
Дано вектори

$$\vec{a} = (6; 5),\ \vec{b} = (2; 7).$$

Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, довжини обох векторів, косинус кута між ними та величину кута.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.
На вузол просторової будівельної конструкції одночасно діють три сили:

$$\vec{F}_1 = (12; 0; 0)\ \text{кН},$$

$$\vec{F}_2 = (0; 9; 0)\ \text{кН},$$

$$\vec{F}_3 = (0; 0; -8)\ \text{кН}.$$

Необхідно:

1. записати вектор рівнодійної сили;
2. визначити проєкції рівнодійної на координатні осі;
3. обчислити модуль рівнодійної сили;
4. пояснити фізичний зміст отриманого вектора для розрахункової схеми вузла будівельної конструкції.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Під час виконання роботи здобувач освіти повинен записувати не лише кінцеві відповіді, а й основні етапи розв’язування. Для визначників необхідно показати спосіб їх обчислення. Під час знаходження оберненої матриці необхідно перевірити умову її існування. У методі Крамера необхідно записати головний і допоміжні визначники.

У векторних задачах необхідно показувати обчислення координат вектора, його довжини та скалярного добутку. Під час визначення кута між векторами слід використовувати співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\ \ |\,\vec{b}\,|}.$$

У професійно орієнтованій задачі здобувач освіти повинен не тільки виконати математичні обчислення, а й пояснити зміст отриманого результату стосовно відповідної розрахункової схеми будівельної конструкції.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 1

Відповідно до нашого нового принципу для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія» максимальна оцінка становить 5 балів**.

Завдання	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Дії над матрицями	0,50
2	Обчислення визначника	0,50
3	Знаходження оберненої матриці	0,75
4	Розв’язування системи методом Крамера	0,75
5	Дії над векторами	0,50
6	Скалярний добуток і кут між векторами	0,75
7	Професійно орієнтована задача для G19 «Будівництво та цивільна інженерія»	1,25
Разом		**5,00**

4,50–5,00 бала — здобувач освіти правильно виконав практично всі завдання; продемонстрував упевнене володіння методами лінійної та векторної алгебри; правильно виконав професійно орієнтовану задачу та пояснив фізичний зміст отриманого результату.

3,50–4,49 бала — основні методи засвоєно правильно, але допущено окремі незначні обчислювальні або алгебраїчні помилки, які не свідчать про нерозуміння способу розв’язування.

2,50–3,49 бала — здобувач освіти володіє основними методами, але допускає суттєві помилки під час обчислення визначників, знаходження оберненої матриці, розв’язування систем або виконання операцій над векторами.

1,50–2,49 бала — правильно виконано лише частину завдань, алгоритми застосовано непослідовно, професійно орієнтовану задачу розв’язано частково.

0–1,49 бала — більшість завдань не виконано або виконано неправильно; основні методи змістового модуля не засвоєно на достатньому рівні.

ТИПОВІ ПОМИЛКИ

Під час виконання модульного контролю особливу увагу необхідно звернути на дотримання правил додавання та віднімання матриць; правильне множення матриці на число; знаки під час обчислення визначників; правильність знаходження алгебраїчних доповнень; перевірку умови існування оберненої матриці; правильну заміну стовпців у допоміжних визначниках методу Крамера; порядок виконання дій над векторами; обчислення довжини вектора; правильне застосування формули скалярного добутку; переведення результату обчислення косинуса у величину кута.

У професійних задачах необхідно особливо уважно враховувати **напрям сили та знак її проєкції**. Від'ємна координата вектора сили не означає від'ємного модуля сили, а вказує на напрям відповідної проєкції відносно обраної координатної осі.

ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ

Модульний контроль № 1 перевіряє засвоєння основних математичних методів змістового модуля **«Елементи лінійної та векторної алгебри»**, передбаченого робочою програмою дисципліни.

Професійна складова для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** побудована на застосуванні векторного апарату до найпростіших розрахункових схем будівельних конструкцій. При цьому ми не замінюємо курс вищої математики курсом будівельної механіки: професійний контекст використовується для демонстрації практичного застосування тих математичних методів, які передбачені робочою програмою.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Оскільки практичне заняття № 6 є **підсумковим модульним контролем**, окреме домашнє завдання, яке додатково оцінюється в балах, не встановлюється. Такий підхід відповідає структурі попереднього модульного контролю, де після контрольної роботи передбачено корекційне опрацювання допущених помилок без окремого додаткового бала.

Після перевірки роботи здобувачам освіти необхідно проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні теми змістового модуля 1 та повторно розв'язати завдання, у яких були допущені помилки, з повним записом алгоритму розв'язування.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 7

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема: Складання рівнянь прямої. Кут між прямими, паралельність і перпендикулярність

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години.

Відповідно до робочої програми це перше практичне заняття змістового модуля 2. Програмою передбачено складання рівняння прямої через задану точку і через дві точки, визначення кутового коефіцієнта, знаходження кута між прямими, перевірку паралельності та перпендикулярності, а за необхідності — визначення відстані від точки до прямої. Практичний акцент теми полягає у використанні координатного методу для опису положення технічних об’єктів, напрямів переміщення та елементів розрахункових схем.

Мета

Закріпити знання здобувачів освіти про метод координат та рівняння прямої на площині; сформувати практичні вміння складати рівняння прямої за різними вихідними даними, визначати кутовий коефіцієнт прямої, знаходити кут між двома прямими, встановлювати паралельність і перпендикулярність прямих, визначати відстань від точки до прямої.

Сформувати вміння застосовувати аналітичну геометрію до професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Оснащення

Опорні конспекти, навчальні посібники, індивідуальні картки із завданнями, калькулятор, креслярське приладдя, координатна сітка, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
4. Актуалізація опорних знань.
5. Розв’язування професійно орієнтованих задач.

6. Самостійне виконання завдань.
7. Підведення підсумків практичного заняття.
8. Повідомлення домашнього індивідуального завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називають декартовою системою координат на площині?
2. Як задається положення точки на координатній площині?
3. Як визначити відстань між двома точками?
4. Як знайти координати середини відрізка?
5. Що називають рівнянням прямої?
6. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
7. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
8. Що характеризує кутовий коефіцієнт прямої?
9. Як скласти рівняння прямої, якщо відомі координати точки та кутовий коефіцієнт?
10. Як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
11. Як за загальним рівнянням прямої перейти до рівняння з кутовим коефіцієнтом?
12. Що означає додатне значення кутового коефіцієнта?
13. Що означає від'ємне значення кутового коефіцієнта?
14. Як визначити кут між двома прямими?
15. За якої умови дві прямі є паралельними?
16. За якої умови дві прямі є перпендикулярними?
17. Чи можуть дві різні паралельні прямі мати однаковий кутовий коефіцієнт?
18. Яке взаємне розташування мають прямі, кутові коефіцієнти яких задовольняють умову $k_1 k_2 = -1$?
19. Як визначити, чи належить задана точка прямій?
20. Як знайти відстань від точки до прямої?

21. Яким чином пряму можна використати для математичного опису напрямку руху автомобіля?
22. Як за допомогою рівнянь прямих можна перевірити паралельність напрямів руху двох автомобілів?
23. Як математично описати перпендикулярне розташування двох технологічних напрямів?
24. Де під час технічного обслуговування автомобілів може застосовуватися координатний метод?
25. Чому в задачах автомобільного транспорту важливо правильно вибирати систему координат?

Робоча програма прямо включає відстань між точками, середину відрізка, різні форми рівняння прямої, кут між прямими, умови паралельності й перпендикулярності та відстань від точки до прямої.

2. Короткі теоретичні відомості, необхідні для виконання практичної роботи

2.1. Загальне рівняння прямої

Пряму на площині можна задати рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

де A, B, C— сталі числа, причому коефіцієнти Aі Bодночасно не дорівнюють нулю.

2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма не паралельна осі ординат, її рівняння можна записати:

$$y = kx + b,$$

де k— кутовий коефіцієнт прямої, а b— ордината точки перетину прямої з віссю ординат.

Якщо α— кут нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис, то

$$k = \tan\alpha\,.$$

2.3. Рівняння прямої через задану точку

Якщо пряма проходить через точку $M(x_0; y_0)$і має кутовий коефіцієнт k, то

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

2.4. Рівняння прямої через дві точки

Для точок $A(x_1; y_1)$і $B(x_2; y_2)$зручно використовувати форму

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Ця форма є зручною, оскільки дозволяє складати рівняння без попереднього ділення на різницю координат.

Якщо $x_1 \neq x_2$, кутовий коефіцієнт можна знайти за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2.5. Кут між двома прямими

Для прямих із кутовими коефіцієнтами k_1і k_2гострий кут φміж ними визначається співвідношенням

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

2.6. Умова паралельності

Дві прямі

$$y = k_1 x + b_1,\ y = k_2 x + b_2$$

паралельні, якщо

$$k_1 = k_2.$$

Для різних паралельних прямих при цьому $b_1 \neq b_2$.

2.7. Умова перпендикулярності

Якщо обидві прямі мають скінченні кутові коефіцієнти, вони перпендикулярні за умови

$$k_1 k_2 = -1.$$

2.8. Відстань від точки до прямої

Якщо точка $M(x_0; y_0)$, а пряма задана рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

то відстань від точки до прямої визначається за формулою

$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + C\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. Розв’язування професійно орієнтованих задач

Приклад 1. Складання рівняння напрямку руху автомобіля через дві точки

На умовній координатній схемі випробувального майданчика автомобіль рухається прямолінійною ділянкою від точки

$$A(2;3)$$

до точки

$$B(8;9).$$

Скласти рівняння прямої, яка описує напрям руху автомобіля.

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої через дві точки:

$$(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1).$$

Підставимо координати:

$$(x-2)(9-3)=(y-3)(8-2).$$

Отримуємо:

$$6(x-2)=6(y-3).$$

Поділимо обидві частини на 6:

$$x-2=y-3.$$

Звідси

$$y=x+1.$$

У загальному вигляді:

$$x-y+1=0.$$

Перевірка

Для точки $A(2;3)$:

$$2-3+1=0.$$

Для точки $B(8;9)$:

$$8-9+1=0.$$

Обидві точки належать отриманій прямій.

Відповідь

Напрям прямолінійного руху автомобіля описується рівнянням

$$\boxed{x-y+1=0}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

1.1. На координатній схемі автомобіль рухається від точки $A(1;2)$до точки $B(7;8)$. Скласти рівняння прямої, яка описує його траєкторію.

1.2. Автомобіль технічної допомоги рухається від точки $M(-;21)$до точки $N(4;7)$. Скласти рівняння прямолінійної ділянки його руху.

Приклад 2. Визначення кутового коефіцієнта напрямку руху

На координатному плані автомобіль перемістився від точки $A(1;2)$до точки $B(5;10)$. Визначити кутовий коефіцієнт прямої, що характеризує напрям руху.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Тому

$$k = \frac{10 - 2}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Відповідь

$$\boxed{k = 2}.$$

Це означає, що при збільшенні координати xна одну умовну одиницю координата yвздовж цього прямолінійного напряму збільшується на дві одиниці.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

2.1. Напрям руху автомобіля проходить через точки $A(2;3)$і $B(8;6)$. Визначити кутовий коефіцієнт.

2.2. На плані випробувального майданчика автомобіль рухається від $M(-;12)$до $N(5;8)$. Знайти кутовий коефіцієнт траєкторії.

Приклад 3. Рівняння прямої через задану точку з відомим напрямом

Через точку $A(3;2)$, що відповідає положенню автомобіля на координатній схемі, необхідно провести прямолінійну траєкторію з кутовим коефіцієнтом

$$k = 2.$$

Скласти рівняння траєкторії.

Розв'язання

Використовуємо рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Підставляємо $x_0 = 3, y_0 = 2, k = 2$:

$$y - 2 = 2(x - 3).$$

Розкриваємо дужки:

$$y - 2 = 2x - 6.$$

Отже,

$$y = 2x - 4.$$

У загальному вигляді:

$$2x - y - 4 = 0.$$

Перевірка

Точка $A(3; 2)$повинна належати прямій:

$$2 \cdot 3 - 2 - 4 = 0.$$

Умова виконується.

Відповідь

$$\boxed{2x - y - 4 = 0}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

3.1. Скласти рівняння напрямку переміщення автомобіля через точку $A(4; 3)$, якщо $k = 3$.

3.2. Через точку розташування автомобіля $M(2; 5)$проходить прямолінійна траєкторія з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Скласти її рівняння.

Приклад 4. Перевірка паралельності напрямів руху двох автомобілів

На випробувальному майданчику напрями руху двох автомобілів задані рівняннями

$$y = 2x + 1$$

та

$$y = 2x - 5.$$

Встановити взаємне розташування траєкторій.

Розв'язання

Для першої прямої:

$$k_1 = 2.$$

Для другої:

$$k_2 = 2.$$

Отже,

$$k_1 = k_2.$$

Вільні члени різні:

$$1 \neq -5.$$

Тому прямі різні та паралельні.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \parallel l_2}.$$

Напрями руху автомобілів паралельні.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

4.1. Напрями руху двох транспортних засобів задано рівняннями $y = 3x +$ 2та $y = 3x - 7$. Встановити їх взаємне розташування.

4.2. Дві напрямні лінії стенда задано рівняннями $y = -2x + 4$та $y = -2x -$ 3. Перевірити їх паралельність.

Приклад 5. Перпендикулярність напрямів на діагностичному майданчику

Поздовжня напрямна діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 2x + 3,$$

а поперечна напрямна —

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Встановити, чи є напрямні перпендикулярними.

Розв'язання

Кутові коефіцієнти:

$$k_1 = 2,\ k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Обчислимо їх добуток:

$$k_1 k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Отже, виконується умова перпендикулярності.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \perp l_2}.$$

Напрямні діагностичного стенда розташовані під прямим кутом.

Подібні задачі для самостійного розв’язування

5.1. Поздовжня вісь автомобіля на схемі задана рівнянням $y = 3x + 1$, а напрям поперечної осі — $y = -\frac{1}{3}x + 6$. Перевірити їх перпендикулярність.

5.2. Дві технологічні напрямні задані рівняннями $y = -2x + 5$та $y = \frac{1}{2}x - 1$. Визначити їх взаємне розташування.

Приклад 6. Складання рівняння паралельної прямої

Напрям руху автомобіля на діагностичну лінію задано прямою

$$y = 3x - 2.$$

Необхідно скласти рівняння паралельного напрямку, який проходить через точку $A(2; 5)$.

Розв’язання

Паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти.

Отже,

$$k = 3.$$

Рівняння через точку $A(2; 5)$:

$$y - 5 = 3(x - 2).$$

Розкриємо дужки:

$$y - 5 = 3x - 6.$$

Звідси

$$y = 3x - 1.$$

Перевірка

Кутові коефіцієнти:

$$k_1 = 3,\ k_2 = 3.$$

Отже, прямі паралельні.

Точка $A(2; 5)$належить другій прямій:

$$5 = 3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{y = 3x - 1}.$$

Подібні задачі для самостійного розв’язування

6.1. Напрям технологічної лінії задано рівнянням $y = 2x + 4$. Скласти рівняння паралельної прямої через точку $A(3; 1)$.

6.2. Напрям руху автомобіля задано рівнянням $y = -x + 2$. Скласти рівняння паралельної траєкторії через точку $B(4; 3)$.

Приклад 7. Складання рівняння перпендикулярної прямої

Поздовжній напрям діагностичного майданчика заданий прямою

$$y = 2x + 4.$$

Необхідно скласти рівняння поперечної лінії, яка проходить через точку $A(4; 3)$та є перпендикулярною до заданої.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт заданої прямої:

$$k_1 = 2.$$

Для перпендикулярної прямої:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Отже,

$$2k_2 = -1,$$

звідси

$$k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Складемо рівняння через точку $A(4; 3)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4).$$

Розкриваємо дужки:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Отже,

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Перевірка

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Прямі дійсно перпендикулярні.

Відповідь

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 5}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

7.1. Поздовжня вісь стенда задана рівнянням $y = 4x - 1$. Через точку $A(2; 3)$провести пряму, перпендикулярну до неї.

7.2. Напрям руху автомобіля задано рівнянням $y = -2x + 5$. Через точку $B(3; 4)$скласти рівняння перпендикулярного напрямку.

Приклад 8. Визначення кута між двома напрямами руху

На схемі випробувального майданчика два напрями руху автомобілів задані рівняннями

$$y = 2x + 1$$

і

$$y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Знайти гострий кут між напрямами.

Розв'язання

Маємо:

$$k_1 = 2,\ k_2 = \frac{1}{2}.$$

Використаємо формулу кута між прямими:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Підставляємо значення:

$$\tan\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right|.$$

Отже,

$$\tan\varphi = \left|\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right| = \frac{3}{4}.$$

Тоді

$$\varphi = \arctan\frac{3}{4}.$$

За допомогою калькулятора:

$$\varphi \approx 36{,}87^\circ.$$

Відповідь

$$\boxed{\varphi \approx 36{,}87^\circ}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

8.1. Напрями руху автомобілів задані прямими $y = 3x + 2$та $y = x - 4$. Знайти гострий кут між ними.

8.2. Дві напрямні технологічного майданчика задано рівняннями $y = 2x - 1$та $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Знайти кут між напрямними.

Приклад 9. Визначення взаємного розташування прямих із загальних рівнянь

Напрями двох технологічних ліній станції технічного обслуговування задані рівняннями

$$2x - y + 3 = 0$$

і

$$4x - 2y - 5 = 0.$$

Встановити взаємне розташування прямих.

Розв'язання

Перше рівняння:

$$2x - y + 3 = 0.$$

Виразимо y:

$$y = 2x + 3.$$

Отже,

$$k_1 = 2.$$

Друге рівняння:

$$4x - 2y - 5 = 0.$$

Звідси

$$-2y = -4x + 5,$$

$$y = 2x - \frac{5}{2}.$$

Тому

$$k_2 = 2.$$

Маємо:

$$k_1 = k_2.$$

Вільні члени різні, отже прямі не збігаються.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \parallel l_2}.$$

Технологічні напрямки є паралельними.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

9.1. Дві напрямні задані рівняннями $3x - y + 2 = 0$та $6x - 2y - 7 = 0$. Встановити їх взаємне розташування.

9.2. Напрями руху задані рівняннями $2x + 4y - 5 = 0$та $4x + 8y + 3 = 0$. Визначити взаємне розташування прямих.

Приклад 10. Відстань від автомобіля до прямолінійної межі

На координатному плані положення автомобіля задано точкою

$$M(4; 3).$$

Межа робочої зони станції технічного обслуговування задана прямою

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Одна координатна одиниця відповідає одному метру. Визначити найкоротшу відстань від автомобіля до межі робочої зони.

Розв'язання

Використовуємо формулу відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{| Ax_0 + By_0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Маємо:

$$A = 3,\ B = 4,\ C = -10,$$

$$x_0 = 4,\ y_0 = 3.$$

Підставимо:

$$d = \frac{|\,3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 10\,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}.$$

Обчислюємо чисельник:

$$|\,12 + 12 - 10\,| = 14.$$

Обчислюємо знаменник:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Тому

$$d = \frac{14}{5} = 2{,}8.$$

Відповідь

$$\boxed{d = 2{,}8 \text{ м}}.$$

Найкоротша відстань від умовної точки розташування автомобіля до прямолінійної межі робочої зони становить 2,8 метра.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

10.1. Автомобіль розташований у точці $M(3;4)$, а межа діагностичного майданчика задана рівнянням $3x + 4y - 5 = 0$. Одна координатна одиниця дорівнює одному метру. Знайти найкоротшу відстань.

10.2. Положення автомобіля задано точкою $N(5;2)$, а край технологічної зони — прямою $4x + 3y - 8 = 0$. Визначити найкоротшу відстань.

4. Самостійна робота на практичному занятті

Завдання 1

На координатному плані автомобіль рухається від точки $A(2;4)$до точки $B(8;10)$. Скласти рівняння прямолінійної траєкторії у загальному вигляді.

Завдання 2

Напрям руху автомобіля проходить через точки $M(-;13)$і $N(5;9)$. Знайти кутовий коефіцієнт та скласти рівняння прямої.

Завдання 3

Напрямна діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 3x - 4.$$

Через точку $A(2;5)$скласти рівняння паралельної напрямної.

Завдання 4

Поздовжня вісь автомобіля на координатній схемі задана рівнянням

$$y = -2x + 3.$$

Через точку $B(4; 1)$скласти рівняння прямої, перпендикулярної до цієї осі.

Завдання 5

Два напрямки руху задано прямими

$$y = 2x + 3,\ y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Визначити їх взаємне розташування.

Завдання 6

Дві технологічні напрямні задані рівняннями

$$y = 3x - 2,\ y = x + 4.$$

Знайти гострий кут між ними.

Завдання 7

Положення автомобіля задано точкою $M(5; 4)$, а прямолінійна межа робочої зони —

$$3x + 4y - 6 = 0.$$

Одна координатна одиниця дорівнює одному метру. Знайти найкоротшу відстань від автомобіля до межі.

Завдання 8

На плані станції технічного обслуговування дві напрямні задані рівняннями

$$2x - y + 5 = 0,\ 4x - 2y - 3 = 0.$$

Визначити їх взаємне розташування та обґрунтувати відповідь.

5. Підведення підсумків практичного заняття

Після виконання практичної роботи здобувач освіти повинен уміти складати рівняння прямої через одну або дві задані точки, переходити від одного виду рівняння прямої до іншого, визначати кутовий коефіцієнт, знаходити кут між прямими, перевіряти паралельність і перпендикулярність прямих та визначати відстань від точки до прямої.

У професійно орієнтованих задачах спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія» ці математичні засоби дозволяють створювати спрощені координатні моделі положення технічних об’єктів, прямолінійних напрямів

переміщення та елементів розрахункових схем, що відповідає практичному акценту робочої програми.

Типові помилки

Особливу увагу необхідно звернути на правильний порядок координат точок під час обчислення кутового коефіцієнта; знаки коефіцієнтів під час перетворення загального рівняння; відмінність між умовами паралельності та перпендикулярності; використання модуля у формулі відстані від точки до прямої; перевірку того, що знайдена пряма справді проходить через задану точку.

6. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називають рівнянням прямої на площині?
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Що характеризує кутовий коефіцієнт?
5. Як пов’язані кутовий коефіцієнт та кут нахилу прямої?
6. Як знайти кутовий коефіцієнт за координатами двох точок?
7. Як скласти рівняння прямої через задану точку?
8. Як скласти рівняння прямої через дві точки?
9. Як перевірити, чи належить точка прямій?
10. Як знайти кут між двома прямими?
11. Яка умова паралельності двох прямих?
12. Яка умова перпендикулярності двох прямих?
13. Як скласти рівняння прямої, паралельної заданій?
14. Як скласти рівняння прямої, перпендикулярної до заданої?
15. Як перейти від загального рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом?
16. Як визначити відстань від точки до прямої?
17. Чому у формулі відстані від точки до прямої використовується модуль?
18. Як рівняння прямої можна застосовувати для опису напрямку руху автомобіля?

19. Як перевірити паралельність двох напрямів на координатній схемі?
20. Як перевірити перпендикулярність поздовжнього та поперечного напрямів?
21. Яке практичне значення має визначення кута між двома прямими?
22. Як координатний метод може використовуватися під час побудови схеми діагностичного майданчика?
23. Яке професійне значення має визначення відстані від точки до прямої?
24. Чому під час розв'язування професійних задач важливо правильно визначити масштаб координатної схеми?
25. Які вихідні дані необхідні для однозначного визначення прямої?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання — максимальна оцінка 2 бали

Домашня робота відповідає передбаченому робочою програмою індивідуальному завданню: **за заданими координатами точок скласти рівняння прямої та дослідити взаємне розташування прямих**.

Завдання мають різний рівень складності.

Завдання 1. Початковий рівень — 0,25 бала
На координатній схемі автомобіль рухається від точки

$$A(2;3)$$

до точки

$$B(6;7).$$

Знайти кутовий коефіцієнт прямолінійної траєкторії автомобіля.

Завдання 2. Середній рівень — 0,25 бала
Автомобіль рухається прямолінійною ділянкою через точки

$$A(1;2),\ B(7;8).$$

Скласти рівняння прямої через дві точки та подати його у загальному вигляді.

Завдання 3. Достатній рівень — 0,50 бала
Напрямна лінія діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 2x - 3.$$

Через точку

$$M(4;2)$$

скласти рівняння прямої, паралельної заданій. Перевірити виконання умови паралельності.

Завдання 4. Достатній рівень — 0,50 бала

Поздовжня вісь автомобіля на координатній схемі задана рівнянням

$$y = 3x + 1.$$

Через точку

$$N(3;4)$$

скласти рівняння прямої, перпендикулярної до поздовжньої осі. Перевірити умову перпендикулярності.

Завдання 5. Високий рівень, професійно орієнтована задача — 0,50 бала

На координатній схемі станції технічного обслуговування напрям руху першого автомобіля задано прямою

$$y = 2x + 1,$$

а напрям руху другого автомобіля —

$$y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Необхідно:

а) визначити кутові коефіцієнти обох напрямів;

б) встановити, чи є прямі паралельними або перпендикулярними;

в) знайти гострий кут між напрямами руху;

г) якщо автомобіль розташований у точці $M(4;5)$, визначити відстань від цієї точки до першої прямої, вважаючи одну координатну одиницю одним метром.

Максимальна оцінка за індивідуальне домашнє завдання:

$$\boxed{0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}50 + 0{,}50 + 0{,}50 = 2{,}00 \text{ бали}}.$$

Критерії оцінювання домашнього завдання

Завдання	**Рівень складності**	**Максимальна кількість балів**
1	Початковий	0,25

Завдання	Рівень складності	Максимальна кількість балів
2	Середній	0,25
3	Достатній	0,50
4	Достатній	0,50
5	Високий, професійно орієнтований	0,50
Разом		**2,00**

Повний бал за кожне завдання виставляється за правильний вибір математичного методу, послідовний запис розв'язання, правильні обчислення та відповідь. За правильний алгоритм із незначною арифметичною помилкою може бути виставлена половина передбаченої за відповідне завдання кількості балів.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія»**, Заклад

професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. У програмі для практичного заняття № 7 визначено складання рівнянь прямої та дослідження взаємного розташування прямих як зміст індивідуального розрахункового завдання.

Варіант 1

1. Дано точку $M(2; 3)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт $k = 2$. Отримане рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 2)$і $B(5; 6)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати отримане рівняння у загальному вигляді.

3. Дано дві прямі:

$$y = 3x + 2,\ y = 3x - 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти обох прямих. На підставі отриманих значень установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(3; 4)$та пряму

$$y = 2x - 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pі перпендикулярна до заданої прямої. Перевірити виконання умови перпендикулярності.

5. Дано дві прямі:

$$y = 2x + 3,\ y = \frac{1}{2}x - 4.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та знайти величину гострого кута між прямими у градусах.

Варіант 2

1. Дано точку $M(1; 4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт $k = 3$. Записати отримане рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; 1)$і $B(6; 9)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -2x + 3,\ y = -2x - 6.$$

Знайти кутові коефіцієнти прямих, визначити їх взаємне розташування та обґрунтувати отриманий висновок.

4. Дано точку $P(2; 5)$і пряму

$$y = 4x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та паралельна до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 2,\ y = x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування прямих та знайти гострий кут між ними.

Варіант 3

1. Дано точку $M(-; 23)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку і має кутовий коефіцієнт $k = -2$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 12)$і $B(3; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 4x - 3,\ y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Відповідь обґрунтувати відповідною умовою.

4. Дано точку $P(4; 1)$і пряму

$$y = -3x + 5.$$

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку Pпаралельно заданій прямій. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 2x - 1,\ y = -x + 4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 4

1. Дано точку $M(3;-1)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k=2$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(1;5)$і $B(4;11)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Знайти кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x-y+3=0,\ 4x-2y-5=0.$$

Привести кожне рівняння до вигляду $y=kx+b$, знайти кутові коефіцієнти та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(1;3)$і пряму

$$y=3x+2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y=4x+1,\ y=x-2.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити величину гострого кута між прямими.

Варіант 5

1. Дано точку $M(4;2)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку Mі має кутовий коефіцієнт $k=-1$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(2;3)$і $B(8;9)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y=5x+4,\ y=5x-7.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Відповідь обґрунтувати.

4. Дано точку $P(-;24)$і пряму

$$y=-2x+1.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, перпендикулярної до заданої прямої. Перевірити виконання умови перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 1,\ y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 6

1. Дано точку $M(-;15)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку і має кутовий коефіцієнт $k = 4$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-;21)$і $B(2;5)$. Скласти рівняння прямої через ці точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x - 6,\ y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(3;-2)$і пряму

$$y = 3x + 7.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 4,\ y = x - 3.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між ними.

Варіант 7

1. Дано точку $M(5;1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = -3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1;-2)$і $B(4;4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x - y + 2 = 0,\ 6x - 2y + 7 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, визначити k_1і k_2та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2;6)$та пряму

$$y = 4x - 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 3,\ y = x + 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 8

1. Дано точку $M(2; -3)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. Записати результат у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 32)$і $B(3; 8)$. Скласти рівняння прямої через ці точки, знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -4x + 1,\ y = \frac{1}{4}x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Висновок обґрунтувати.

4. Дано точку $P(1; -2)$та пряму

$$y = -2x + 4.$$

Скласти рівняння прямої через задану точку, паралельної до даної прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 4,\ y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування прямих та знайти величину гострого кута між ними.

Варіант 9

1. Дано точку $M(-; 34)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; -1)$і $B(6; 7)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 3x - 5,\ y = 3x + 6.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(4; 2)$і пряму

$$y = -3x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 4x - 2,\ y = 2x + 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та визначити гострий кут між прямими.

Варіант 10

1. Дано точку $M(1; -4)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 13)$і $B(5; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x + 4y - 5 = 0,\ x + 2y + 3 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(3; 5)$і пряму

$$y = x - 4.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно до заданої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 1,\ y = -3x + 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 11

1. Дано точку $M(4; 5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1;1)$і $B(5;9)$. Скласти рівняння прямої через задані точки, знайти кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -3x + 4,\ y = -3x - 2.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-;12)$і пряму

$$y = 5x + 3.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, перпендикулярної до заданої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = x + 4,\ y = -2x + 1.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 12

1. Дано точку $M(-;2-1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -4$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-;24)$і $B(2;-4)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x + 7,\ y = -\frac{1}{2}x - 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих і обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(2;3)$і пряму

$$y = 4x - 6.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 5,\ y = 2x - 1.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 13

1. Дано точку $M(3;6)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо $k=-2$. Результат записати у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(0;2)$і $B(4;10)$. Скласти рівняння прямої через ці точки. Знайти кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$4x-y+3=0,\ 8x-2y-1=0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування.

4. Дано точку $P(5;2)$та пряму

$$y=2x+6.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до даної прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y=-x+2,\ y=3x-4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між ними.

Варіант 14

1. Дано точку $M(-;42)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k=3$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(-;3-1)$і $B(3;5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки, знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y=4x+5,\ y=-\frac{1}{4}x-2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(1;4)$та пряму

$$y=-3x+2.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, паралельної до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x - 3,\ y = \frac{1}{3}x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 15

1. Дано точку $M(5; -2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 4)$і $B(7; 10)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -5x + 3,\ y = -5x - 4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-; 25)$і пряму

$$y = 3x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 4x + 3,\ y = x - 5.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 16

1. Дано точку $M(2; 7)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -3$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 1 - 2)$і $B(3; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x - 4,\ y = -\frac{1}{2}x + 7.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування прямих і обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(4;-1)$та пряму

$$y = 5x + 2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 1,\ y = -x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 17

1. Дано точку $M(-;13)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2;5)$і $B(6;1)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x + 6y - 4 = 0,\ x + 2y + 5 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(3;2)$та пряму

$$y = -4x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 5,\ y = \frac{1}{2}x - 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 18

1. Дано точку $M(4;-3)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = -1$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-;42)$і $B(2;8)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 3x + 1,\ y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Відповідь обґрунтувати.

4. Дано точку $P(-;15)$і пряму

$$y = 2x - 3.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, паралельної до заданої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 6,\ y = x - 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 19

1. Дано точку $M(3;1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 4$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1;-3)$і $B(5;5)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 6x - 2,\ y = 6x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(2;-4)$і пряму

$$y = 2x + 3.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 5x + 1,\ y = 2x - 4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 20

1. Дано точку $M(-;35)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k=-2$. Записати його у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(-;2-3)$і $B(4;3)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$4x-2y+3=0,\ 2x-y-5=0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, знайти кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(5;1)$і пряму

$$y=-4x+2.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, паралельної до заданої прямої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y=3x+2,\ y=-2x+5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 21

1. Дано точку $M(1;6)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k=2$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(0;-1)$і $B(4;7)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y=-2x+5,\ y=\frac{1}{2}x-3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(3;5)$та пряму

$$y=4x+1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = x + 3,\ y = 3x - 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 22

1. Дано точку $M(-;24)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = 5$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-;15)$і $B(3;1)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 4x - 7,\ y = 4x + 3.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(-;32)$і пряму

$$y = 3x + 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -3x + 4,\ y = x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 23

1. Дано точку $M(5;3)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -4$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2;6)$і $B(6;-2)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$5x - y + 1 = 0,\ 10x - 2y - 3 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування.

4. Дано точку $P(1;-3)$і пряму

$$y=-2x+4.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y=2x-5,\ y=-\frac{1}{3}x+1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 24

1. Дано точку $M(2;-5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k=3$. Записати його у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(-;31)$і $B(1;9)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y=3x-4,\ y=-\frac{1}{3}x+2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих і обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(4;3)$та пряму

$$y=-x+6.$$

Скласти рівняння прямої через точку P, паралельної до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y=4x-1,\ y=2x+5.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 25

1. Дано точку $M(-;41)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k=-3$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(1;6)$і $B(5;2)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x + 6y - 5 = 0,\ x + 3y + 4 = 0.$$

Привести обидва рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, знайти k_1і k_2та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2; 4)$та пряму

$$y = 5x - 2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 3,\ y = 2x - 1.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 26

1. Дано точку $M(3; 5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має кутовий коефіцієнт $k = \frac{1}{2}$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 22)$і $B(4; 5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати отримане рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -4x + 2,\ y = -4x - 6.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-; 13)$і пряму

$$y = 2x + 7.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 4,\ y = -x + 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 27

1. Дано точку $M(-; 1 - 4)$. Скласти рівняння прямої через цю точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = 2$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2;-3)$і $B(6;5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x + 1,\ y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(5;4)$та пряму

$$y = 3x - 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = x - 2,\ y = 4x + 3.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 28

1. Дано точку $M(4;6)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-;1-1)$і $B(5;5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$6x - 3y + 2 = 0,\ 2x - y - 4 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2;-3)$і пряму

$$y = -5x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 5,\ y = -x + 3.$$

Знайти кутові коефцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 29

1. Дано точку $M(2;1)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k=4$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(-;34)$і $B(3;-2)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y=5x-1,\ y=-\frac{1}{5}x+4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(-;23)$і пряму

$$y=-3x+5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pперпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y=4x+2,\ y=x-4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 30

1. Дано точку $M(-;32)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k=-\frac{1}{2}$. Записати рівняння у вигляді $y=kx+b$.

2. Дано точки $A(1;-2)$і $B(7;4)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x-y-2=0,\ 6x-2y+7=0.$$

Привести рівняння до вигляду $y=kx+b$, знайти кутові коефіцієнти обох прямих та встановити їх взаємне розташування.

4. Дано точку $P(4;-2)$і пряму

$$y=2x+3.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку Pпаралельно до заданої прямої. Перевірити виконання умови паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 1,\ y = 3x - 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти обох прямих, установити їх взаємне розташування та знайти величину гострого кута між прямими у градусах.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Складання рівняння прямої через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом	0,25
2	Складання рівняння прямої через дві задані точки	0,25
3	Визначення взаємного розташування двох прямих	0,50
4	Складання рівняння прямої, паралельної або перпендикулярної до заданої	0,50
5	Комплексне завдання на дослідження взаємного розташування та знаходження кута між прямими	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно і в повному обсязі. Здобувач освіти правильно обирає необхідні формули, послідовно виконує математичні перетворення, правильно визначає кутові коефіцієнти, використовує умови паралельності та перпендикулярності, правильно знаходить кут між прямими. У завданнях, де передбачена перевірка, її виконано правильно. Відповіді записано повністю.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв’язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно розуміє умови

паралельності та перпендикулярності й уміє застосовувати формулу кута між прямими.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання початкового та середнього рівнів і частково виконано складніші завдання. Здобувач освіти вміє складати найпростіші рівняння прямої, але допускає помилки під час визначення взаємного розташування прямих, складання рівняння перпендикулярної прямої або знаходження кута між прямими.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає окремі основні формули та може виконати прості елементи завдань, але допускає суттєві помилки під час складання рівнянь прямих та застосування умов паралельності й перпендикулярності. Складніші завдання виконано частково або неправильно.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Основні способи складання рівняння прямої, визначення кутового коефіцієнта, дослідження паралельності та перпендикулярності й знаходження кута між прямими не засвоєно на достатньому рівні.

Таким чином, **кожен із 30 варіантів містить п’ять повністю сформульованих завдань однакової структури та приблизно однакового рівня складності**, а оцінювання кожного варіанта здійснюється за єдиними критеріями з максимальною оцінкою **2 бали**.

Практичне заняття № 8

Тема: Криві другого порядку: коло, еліпс

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Криві другого порядку: коло, еліпс»; навчитися розпізнавати коло та еліпс за їх рівняннями, складати канонічні рівняння кола та еліпса за заданими параметрами, приводити рівняння до канонічного вигляду, визначати центр і радіус кола, півосі, вершини та фокуси еліпса, перевіряти належність точки заданій кривій та виконувати графічну побудову кола й еліпса.

Зміст заняття відповідає робочій програмі: для практичного заняття 8 передбачено дослідження рівняння кола або еліпса, приведення його до канонічного вигляду, визначення виду кривої, центра і радіуса кола або півосей, вершин і фокусів еліпса та виконання графічної побудови.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Які лінії називають кривими другого порядку?
2. Які основні криві другого порядку ви знаєте?
3. Що називається колом?
4. Що називається центром кола?
5. Що називається радіусом кола?
6. Який вигляд має канонічне рівняння кола із центром у початку координат?
7. Який вигляд має рівняння кола із центром у точці $C(a; b)$?
8. Як визначити координати центра кола за його канонічним рівнянням?
9. Як визначити радіус кола за його рівнянням?
10. Як перевірити, чи належить задана точка колу?
11. Що називається еліпсом?
12. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?

13.Що називається великою піввіссю еліпса?

14.Що називається малою піввіссю еліпса?

15.Як визначити довжину великої осі еліпса?

16.Як визначити довжину малої осі еліпса?

17.Як за канонічним рівнянням визначити напрям великої осі еліпса?

18.Що називається вершинами еліпса?

19.Що називається фокусами еліпса?

20.Як визначити відстань від центра еліпса до його фокуса?

21.Як знайти координати фокусів еліпса?

22.Як перевірити, чи належить задана точка еліпсу?

23.За якої умови еліпс перетворюється на коло?

24.Як привести загальне рівняння кола до канонічного вигляду?

25.Як привести рівняння еліпса до канонічного вигляду?

Розв'язування прикладів

1. Скласти рівняння кола із центром у початку координат і радіусом $R = 5$.

Розв'язок

Канонічне рівняння кола із центром у початку координат має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

За умовою:

$$R = 5.$$

Тому:

$$R^2 = 25.$$

Підставимо отримане значення:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Перевірка

Наприклад, точка $A(5; 0)$повинна належати цьому колу.

Підставимо її координати:

$$5^2 + 0^2 = 25,$$

$$25 = 25.$$

Отже, точка належить колу.

Відповідь:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння кола із центром у початку координат, якщо його радіус дорівнює 4.
2. Скласти рівняння кола із центром у початку координат, якщо його радіус дорівнює 7.

2. Скласти рівняння кола із центром у точці $C(3; -2)$і радіусом $R = 4$.

Розв'язок

Рівняння кола із центром у точці $C(a; b)$має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

За умовою:

$$a = 3,\ b = -2,\ R = 4.$$

Підставимо значення:

$$(x - 3)^2 + \big(y - (-2)\big)^2 = 4^2.$$

Отримаємо:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Перевірка

Візьмемо точку $A(7; -2)$, яка віддалена від центра на 4 одиниці.

Підставимо:

$$(7 - 3)^2 + (-2 + 2)^2 = 16,$$

$$16 + 0 = 16.$$

Отже, рівняння складено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2;5)$і радіусом $R=3$.
2. Скласти рівняння кола із центром $C(-;41)$і радіусом $R=5$.

3. За заданим рівнянням кола визначити координати центра і радіус:

$$(x-4)^2+(y+3)^2=36.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним рівнянням:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Із першого виразу:

$$x-a=x-4,$$

тому:

$$a=4.$$

Із другого:

$$y-b=y+3=y-(-3),$$

тому:

$$b=-3.$$

Отже, центр кола:

$$C(4;-3).$$

Далі:

$$R^2=36.$$

Тому:

$$R=\sqrt{36}=6.$$

Відповідь:

$$\boxed{C(4;-3),\ R=6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Визначити координати центра та радіус кола

$$(x-2)^2+(y-5)^2=49.$$

2. Визначити координати центра та радіус кола

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25.$$

4. Перевірити, чи належить точка $M(4;5)$колу

$$(x-1)^2+(y-1)^2=25.$$

Розв'язок

Щоб перевірити належність точки колу, підставимо її координати в рівняння.

За умовою:

$$x=4,\ y=5.$$

Отримаємо:

$$(4-1)^2+(5-1)^2=25.$$

Обчислимо:

$$3^2+4^2=25,$$

$$9+16=25,$$

$$25=25.$$

Рівність виконується. Отже, координати точки задовольняють рівняння кола.

Відповідь:

$\boxed{M(4;5)\text{ належить колу}}$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(5;4)$колу

$$(x-2)^2+y^2=25.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(1;6)$колу

$$(x+2)^2+(y-2)^2=25.$$

5. Привести рівняння кола до канонічного вигляду та визначити його центр і радіус:

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0.$$

Розв'язок

Перенесемо вільний член у праву частину та згрупуємо члени з xі y:

$$x^2-6x+y^2+4y=12.$$

Доповнимо перші два вирази до повних квадратів.

Для змінної x:

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$$

Для змінної y:

$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4.$$

Підставимо:

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 = 12.$$

Звідси:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 12 + 9 + 4.$$

Отже:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Порівнюючи з канонічним рівнянням, маємо:

$$C(3;-2),$$

$$R = \sqrt{25} = 5.$$

Перевірка

Розкриємо дужки:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 25.$$

Перенесемо все в ліву частину:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Отримали початкове рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25},$$

$$\boxed{C(3;-2),\ R = 5}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

та визначити центр і радіус кола.

2. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

та визначити центр і радіус кола.

6. За канонічним рівнянням еліпса визначити його півосі, вершини та фокуси:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння еліпса, велика вісь якого розташована вздовж осі абсцис, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де

$$a>b>0.$$

Порівняємо рівняння:

$$a^2=25,\ b^2=9.$$

Тому:

$$a=5,\ b=3.$$

Велика піввісь дорівнює 5, мала піввісь — 3.

Довжина великої осі:

$$2a=10.$$

Довжина малої осі:

$$2b=6.$$

Вершини великої осі:

$$A_1(-;50),\ A_2(5;0).$$

Вершини малої осі:

$$B_1(0;-3),\ B_2(0;3).$$

Для визначення фокусів знайдемо c:

$$c^2=a^2-b^2.$$

Підставимо:

$$c^2=25-9=16.$$

Отже:

$$c=4.$$

Фокуси:

$$F_1(-;40),\ F_2(4;0).$$

Відповідь:

$$\boxed{a=5,\ b=3,\ c=4};$$

$$\boxed{A_1(-;50), A_2(5;0), B_1(0;-3), B_2(0;3)};$$

$$\boxed{F_1(-;40),\ F_2(4;0)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

2. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

7. Визначити основні характеристики еліпса

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Розв'язок

У заданому рівнянні більший знаменник розташований під y^2:

$$25>16.$$

Отже, велика вісь еліпса розташована вздовж осі ординат.

Велика піввісь:

$$a=\sqrt{25}=5.$$

Мала піввісь:

$$b=\sqrt{16}=4.$$

Довжини осей:

$$2a=10,\ 2b=8.$$

Вершини великої осі:

$$A_1(0;-5),\ A_2(0;5).$$

Вершини малої осі:

$$B_1(-;40),\ B_2(4;0).$$

Знайдемо відстань від центра до фокусів:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Отже:

$$c^2 = 25 - 16 = 9,$$

$$c = 3.$$

Оскільки велика вісь вертикальна, фокуси також знаходяться на осі ординат:

$$F_1(0;-3),\ F_2(0;3).$$

Відповідь:

$$\boxed{a = 5,\ b = 4,\ c = 3};$$

велика вісь розташована вздовж осі ординат;

$$\boxed{F_1(0;-3),\ F_2(0;3)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

2. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

Для кожного еліпса визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

8. Перевірити, чи належить точка $M(3;3,2)$еліпсу

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 3,\ y = 3{,}2.$$

Отримаємо:

$$\frac{3^2}{25}+\frac{3{,}2^2}{16}.$$

Обчислимо:

$$\frac{9}{25}+\frac{10{,}24}{16}.$$

Маємо:

$$\frac{9}{25}=0{,}36,$$

$$\frac{10{,}24}{16}=0{,}64.$$

Тоді:

$$0{,}36+0{,}64=1.$$

Отже, координати точки задовольняють рівняння еліпса.

Відповідь:

$\boxed{M(3;3{,}2) \text{ належить еліпсу}}$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $M(4;1{,}8)$еліпсу

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

2. Перевірити, чи належить точка $N(0;3)$еліпсу

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

9. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь $a=6$, мала піввісь $b=4$, а велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

Розв'язок

Канонічне рівняння такого еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

За умовою:

$$a=6,\ b=4.$$

Знайдемо квадрати півосей:

$$a^2 = 36,$$

$$b^2 = 16.$$

Підставимо:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Перевірка

Вершина великої осі $A(6; 0)$:

$$\frac{6^2}{36} + \frac{0^2}{16} = 1.$$

Отже:

$$1 = 1.$$

Вершина малої осі $B(0; 4)$:

$$\frac{0^2}{36} + \frac{4^2}{16} = 1.$$

Знову:

$$1 = 1.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння еліпса з півосями $a = 5$, $b = 3$, якщо велика вісь розташована вздовж осі абсцис.
2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь дорівнює 7, мала піввісь дорівнює 4, а велика вісь розташована вздовж осі ординат.

10. Привести рівняння еліпса до канонічного вигляду та визначити його основні характеристики:

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Розв'язок

Для приведення рівняння до канонічного вигляду поділимо обидві частини на 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1.$$

Після скорочення:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже:

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9.$$

Тому:

$$a = 5,\ b = 3.$$

Велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

Вершини:

$$A_1(-;50),\ A_2(5;0),$$

$$B_1(0;-3),\ B_2(0;3).$$

Для знаходження фокусів:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Отже:

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Фокуси:

$$F_1(-;40),\ F_2(4;0).$$

Відповідь:

Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Основні характеристики:

$$\boxed{a = 5,\ b = 3,\ c = 4}.$$

Фокуси:

$$\boxed{F_1(-;40),\ F_2(4;0)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду та дослідити еліпс

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

2. Привести до канонічного вигляду та дослідити еліпс

$$25x^2 + 16y^2 = 400.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння кола:

1. центр $C(2; 3)$, радіус $R = 4$;
2. центр $C(-; 32)$, радіус $R = 5$;
3. центр $C(4; -1)$, радіус $R = 3$.

2. Визначте центр і радіус кола:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25;$$

2.

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 36;$$

3.

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 49.$$

3. Перевірте належність заданої точки колу:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25,\ M(4; 6);$$

2.

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16,\ N(2; 1);$$

3.

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25,\ P(6; 3).$$

4. Приведіть рівняння кола до канонічного вигляду, визначте центр і радіус:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0;$$

2.

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0;$$

3.

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

5. Визначте півосі, вершини та фокуси еліпса:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1;$$

2.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1;$$

3.

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1.$$

6. Приведіть рівняння еліпса до канонічного вигляду та визначте його основні характеристики:

$$4x^2+9y^2=144;$$

2.

$$16x^2+25y^2=400;$$

3.

$$9x^2+4y^2=144.$$

7. Складіть канонічне рівняння еліпса:

1. $a=5$, $b=3$, велика вісь розташована вздовж осі абсцис;
2. $a=6$, $b=4$, велика вісь розташована вздовж осі ординат;
3. $a=8$, $b=5$, велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

8. Виконайте повне дослідження та побудову кривої:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16;$$

2.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$$

3.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Для кожної кривої визначити її вид, основні параметри, характерні точки та виконати схематичну побудову в системі координат.

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розпізнавати коло та еліпс за заданим рівнянням;
- складати канонічне рівняння кола;
- визначати координати центра та радіус кола;
- перевіряти належність точки колу;
- приводити рівняння кола до канонічного вигляду;
- складати канонічне рівняння еліпса;
- визначати велику та малу півосі еліпса;
- визначати напрям великої осі еліпса;
- знаходити вершини еліпса;
- знаходити фокуси еліпса;
- перевіряти належність точки еліпсу;
- приводити рівняння еліпса до канонічного вигляду;
- виконувати схематичну побудову кола та еліпса.

Робоча програма окремо визначає для цього практичного заняття розрахунково-графічний характер роботи: необхідно привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої та її характеристики і виконати побудову.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення кола.
2. Канонічне рівняння кола із центром у початку координат.
3. Рівняння кола із центром у довільній точці.
4. Визначення координат центра кола.
5. Визначення радіуса кола.
6. Перевірка належності точки колу.
7. Приведення рівняння кола до канонічного вигляду.

8. Означення еліпса.
9. Канонічне рівняння еліпса.
10. Велика і мала півосі еліпса.
11. Велика і мала осі еліпса.
12. Вершини еліпса.
13. Фокуси еліпса.
14. Визначення відстані від центра еліпса до його фокусів.
15. Визначення напряму великої осі еліпса.
16. Перевірка належності точки еліпсу.
17. Приведення рівняння еліпса до канонічного вигляду.
18. Побудова кола за його канонічним рівнянням.
19. Побудова еліпса за його канонічним рівнянням.
20. Основні відмінності між колом та еліпсом.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал з теми **«Криві другого порядку: коло, еліпс»**.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить п’ять завдань різного рівня складності. Завдання передбачають складання та дослідження рівнянь кола й еліпса, приведення рівнянь до канонічного вигляду, визначення основних параметрів та виконання графічної побудови. Саме такі елементи індивідуального розрахунково-графічного завдання передбачені робочою програмою.

Усі завдання мають **загальноматематичний характер, без професійного спрямування**.

Варіант 1

1. Дано коло із центром у точці $C(2;3)$і радіусом $R=4$. Скласти канонічне рівняння заданого кола.

2. Дано рівняння кола

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25.$$

Визначити координати центра кола, його радіус та координати чотирьох крайніх точок на горизонтальному і вертикальному діаметрах.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, координати центра та радіус. Виконати схематичну побудову.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Визначити велику і малу півосі, довжини осей, координати вершин та фокусів еліпса.

5. Дано рівняння

$$9x^2+25y^2=225.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити вид кривої, напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати схематичну побудову.

Варіант 2

1. Дано коло із центром $C(-;32)$і радіусом $R=5$. Скласти його канонічне рівняння.

2. Дано коло

$$(x+4)^2+(y-1)^2=36.$$

Визначити координати центра, радіус та координати чотирьох крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати схематичну побудову кола.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано рівняння

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити основні характеристики еліпса та виконати його схематичну побудову.

Варіант 3

1. Дано коло із центром $C(4;-1)$та радіусом $R = 3$. Скласти канонічне рівняння кола.

2. Дано рівняння

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та координати крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, її основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 4

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1;-4)$та радіусом $R = 6$.

2. Для кола

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

визначити координати центра, радіус та чотири характерні точки для побудови.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

Визначити центр і радіус кола та виконати схематичну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано рівняння

$$16x^2+25y^2=400.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, вершини та фокуси і виконати побудову.

Варіант 5

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-;2-3)$і радіусом $R=4$.

2. Дано коло

$$(x+1)^2+(y-4)^2=25.$$

Визначити його центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2+4x-10y+13=0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати схематичну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$9x^2+4y^2=144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Побудувати еліпс.

Варіант 6

1. Дано коло із центром $C(3;4)$і радіусом $R=5$. Скласти його рівняння.

2. За рівнянням

$$(x+3)^2+(y+2)^2=49$$

визначити центр, радіус та координати крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2-2x-6y-15=0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$4x^2+25y^2=100.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 7

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-;42)$і радіусом $R=3$.

2. Дано:

$$(x-1)^2+(y-6)^2=36.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2+8x-4y+4=0.$$

Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$36x^2+16y^2=576.$$

Визначити вид кривої, півосі, вершини та фокуси. Виконати графічну побудову.

Варіант 8

1. Скласти рівняння кола із центром $C(5;-2)$і радіусом $R=4$.

2. Дано коло

$$(x+2)^2+(y-3)^2=64.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та побудувати еліпс.

Варіант 9

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 15)$і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$25x^2 + 9y^2 = 225.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 10

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(4; 3)$і радіусом $R = 2$.

2. Дано коло

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$16x^2 + 9y^2 = 144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 11

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 3 - 4)$та радіусом $R = 5$.

2. Для кола

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 49$$

визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$16x^2 + 36y^2 = 576$$

до канонічного вигляду. Визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 12

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; -5)$та радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0.$$

Визначити центр і радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$4x^2 + 16y^2 = 64.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 13

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1; 4)$і радіусом $R = 5$.

2. Дано:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус і крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 14

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 51)$і радіусом $R = 4$.

2. Дано коло

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 10 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2 + 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, вершини та фокуси і виконати побудову.

Варіант 15

1. Скласти рівняння кола із центром $C(3; -4)$і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду, визначити всі основні характеристики еліпса та виконати побудову.

Варіант 16

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 24)$і радіусом $R = 5$.

2. За рівнянням

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 36$$

визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$4x^2 + 9y^2 = 100$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

Варіант 17

1. Скласти рівняння кола із центром $C(5; 2)$і радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0.$$

Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2 + 49y^2 = 784.$$

Визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 18

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 4 - 2)$і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 19

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; -3)$і радіусом $R = 7$.

2. Дано коло

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0.$$

Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{51} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати побудову.

Варіант 20

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 35)$і радіусом $R = 4$.

2. Дано:

$$(x+5)^2+(y+2)^2=49.$$

Визначити центр, радіус та чотири характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2+6x-4y-12=0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2+16y^2=576$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати його графічну побудову.

Варіант 21

1. Скласти рівняння кола із центром $C(4;-3)$і радіусом $R=5$.

2. Дано:

$$(x-2)^2+(y+4)^2=36.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2-8x-2y-8=0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2+25y^2=400.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати побудову.

Варіант 22

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-;1-5)$і радіусом $R=3$.

2. Дано коло

$$(x+4)^2+(y-2)^2=25.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2+y^2+2x+6y-15=0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{13}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$49x^2+25y^2=1225$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 23

1. Скласти рівняння кола із центром $C(3;5)$і радіусом $R=4$.

2. Дано:

$$(x-6)^2+(y-1)^2=64.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2-6x-2y-15=0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2+25y^2=225$$

до канонічного вигляду, визначити всі основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 24

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-;53)$і радіусом $R = 5$.

2. Дано:

$$(x+2)^2 + (y+6)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 10x + 4y + 13 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$25x^2 + 36y^2 = 900.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 25

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1;-3)$і радіусом $R = 6$.

2. Дано коло

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 26

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-;25)$і радіусом $R = 4$.

2. Дано:

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$4x^2 + 25y^2 = 100.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 27

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(5;-4)$і радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 28

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-;44)$і радіусом $R = 5$.

2. Дано коло

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2 + 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 29

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2;4)$і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2 + 49y^2 = 784.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його графічну побудову.

Варіант 30

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 3-2)$і радіусом $R = 4$.

2. Дано рівняння кола

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Визначити координати центра, радіус та координати чотирьох крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, координати центра, радіус та виконати схематичну побудову.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

Визначити велику і малу півосі, довжини осей, координати вершин та фокусів.

5. Дано рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої, напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати схематичну побудову еліпса.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Складання канонічного рівняння кола за заданими центром і радіусом	0,25
2	Визначення центра, радіуса та характерних точок кола	0,25

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
3	Приведення рівняння кола до канонічного вигляду, визначення параметрів і побудова	0,50
4	Дослідження еліпса: півосі, вершини та фокуси	0,50
5	Комплексне дослідження рівняння еліпса та його графічна побудова	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно та в повному обсязі. Правильно записано канонічні рівняння кола й еліпса; правильно визначено вид кривої; рівняння правильно приведено до канонічного вигляду; правильно знайдено центр і радіус кола, півосі, вершини та фокуси еліпса; графічні побудови відповідають отриманим параметрам. Усі математичні перетворення наведено послідовно, відповіді записано повністю.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв’язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано повністю, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно визначає вид кривої та її основні параметри, але може допустити незначну неточність у визначенні окремої характерної точки або під час графічної побудови.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання на складання та читання канонічного рівняння. Здобувач освіти в цілому розрізняє коло та еліпс, але допускає помилки під час приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення фокусів еліпса або виконання графічної побудови.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає окремі формули канонічних рівнянь кола й еліпса та може визначити окремі параметри за готовим канонічним рівнянням, але допускає суттєві помилки під час математичних перетворень та комплексного дослідження кривої.

0–0,25 бала

Правильно виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього вміння приводити рівняння до канонічного вигляду, визначати основні характеристики кола й еліпса та виконувати їх графічну побудову.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 8 — «Криві другого порядку: коло, еліпс». Робочою програмою для цього заняття передбачено індивідуальне дослідження рівняння кола або еліпса та виконання графічної побудови.

Практичне заняття № 9

Тема: Криві другого порядку: гіпербола, парабола

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Криві другого порядку: гіпербола, парабола»; навчитися розпізнавати гіперболу та параболу за їх рівняннями; приводити рівняння до канонічного вигляду; визначати основні параметри гіперболи та параболи; знаходити вершини, фокуси та інші характерні точки; складати рівняння гіперболи та параболи за заданими параметрами; визначати асимптоти гіперболи; виконувати схематичну графічну побудову кривих другого порядку.

Зміст заняття відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Вища математика»: для практичного заняття 9 передбачено дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи, приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення основних параметрів кривої, вершин, фокусів та інших характерних точок, для гіперболи — визначення асимптот, а також виконання графічної побудови.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Які лінії називають кривими другого порядку?
2. Які основні криві другого порядку ви знаєте?
3. Що називається гіперболою?
4. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи з дійсною віссю, розташованою вздовж осі абсцис?
5. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи з дійсною віссю, розташованою вздовж осі ординат?
6. Що називається дійсною піввіссю гіперболи?
7. Що називається уявною піввіссю гіперболи?
8. Як визначити вершини гіперболи?
9. Що називається фокусами гіперболи?

10. Як визначити відстань від центра гіперболи до її фокусів?
11. Який зв'язок існує між параметрами a, bі cгіперболи?
12. Що називається асимптотами гіперболи?
13. Як записуються рівняння асимптот гіперболи?
14. Як визначити напрям розташування віток гіперболи?
15. Як перевірити, чи належить задана точка гіперболі?
16. Що називається параболою?
17. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі абсцис?
18. Який вигляд має канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі ординат?
19. Що називається вершиною параболи?
20. Що називається віссю симетрії параболи?
21. Що називається фокусом параболи?
22. Що називається директрисою параболи?
23. Як за рівнянням параболи визначити напрям її віток?
24. Як визначити координати фокуса параболи?
25. Як визначити рівняння директриси параболи?
26. Як перевірити належність точки параболі?
27. Як привести рівняння гіперболи до канонічного вигляду?
28. Як привести рівняння параболи до канонічного вигляду?
29. Які характерні точки необхідно визначити для побудови гіперболи?
30. Які характерні точки необхідно визначити для побудови параболи?

Розв'язування прикладів

1. Визначити основні характеристики гіперболи

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язок

Задане рівняння вже має канонічний вигляд гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Порівняємо відповідні знаменники:

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 5,\ b = 3.$$

Оскільки додатним є член, що містить x^2, дійсна вісь гіперболи розташована вздовж осі абсцис, а її вітки напрямлені вправо і вліво.

Вершини гіперболи:

$$A_1(-; 50),\ A_2(5; 0).$$

Для визначення фокусів знайдемо параметр c:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Підставимо значення:

$$c^2 = 25 + 9 = 34,$$

$$c = \sqrt{34}.$$

Отже, фокуси:

$$F_1\left(-; \sqrt{340}\right),\ F_2\left(\sqrt{34}; 0\right).$$

Рівняння асимптот гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Тому:

$$y = \pm\frac{3}{5}x.$$

Відповідь:

$$\boxed{a = 5,\ b = 3,\ c = \sqrt{34}};$$

$$\boxed{A_1(-; 50),\ A_2(5; 0)};$$

$$\boxed{F_1\left(-; \sqrt{340}\right),\ F_2\left(\sqrt{34}; 0\right)};$$

$$\boxed{y = \pm\frac{3}{5}x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Визначити основні характеристики гіперболи

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним рівнянням гіперболи:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Маємо:

$$a^2 = 16,\ b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 4,\ b = 3.$$

Додатний член містить y^2, тому дійсна вісь гіперболи розташована вздовж осі ординат. Вітки гіперболи напрямлені вгору і вниз.

Вершини:

$$A_1(0; -4),\ A_2(0; 4).$$

Знайдемо c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(0; -5),\ F_2(0; 5).$$

Для гіперболи з вертикальною дійсною віссю асимптоти мають вигляд:

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Отже:

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

Відповідь:

$$\boxed{a = 4,\ b = 3,\ c = 5};$$

$$\boxed{A_1(0;-4),\ A_2(0;4)};$$

$$\boxed{F_1(0;-5),\ F_2(0;5)};$$

$$\boxed{y = \pm\frac{4}{3}x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1.$$

2. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1.$$

Для кожної гіперболи визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння гіперболи до канонічного вигляду та визначити її основні характеристики:

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Розв'язок

Поділимо обидві частини рівняння на 144:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1.$$

Скоротимо дроби:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння гіперболи.

Маємо:

$$a^2 = 16,\ b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 4,\ b = 3.$$

Вершини:

$$A_1(-;40),\ A_2(4;0).$$

Знайдемо c:

$$c^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(-;50),\ F_2(5;0).$$

Асимптоти:

$$y = \pm\frac{3}{4}x.$$

Відповідь:

Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Основні параметри:

$$\boxed{a = 4,\ b = 3,\ c = 5}.$$

Вершини:

$$\boxed{A_1(-;40),\ A_2(4;0)}.$$

Фокуси:

$$\boxed{F_1(-;50),\ F_2(5;0)}.$$

Асимптоти:

$$\boxed{y = \pm\frac{3}{4}x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду та дослідити гіперболу

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

2. Привести до канонічного вигляду та дослідити гіперболу

$$25x^2 - 16y^2 = 400.$$

4. Перевірити, чи належить точка $M(5; 3)$гіперболі

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 5,\ y = 3.$$

Отримаємо:

$$\frac{5^2}{16} - \frac{3^2}{16}.$$

Обчислимо:

$$\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

Координати точки задовольняють рівняння гіперболи.

Відповідь:

$\boxed{M(5; 3) \text{ належить гіперболі}}$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(5; 4)$гіперболі

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(10; 6)$гіперболі

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь $a = 4$, уявна піввісь $b = 3$, а дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.

Розв'язок

Для гіперболи, дійсна вісь якої розташована вздовж осі абсцис, канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою:

$$a = 4,\ b = 3.$$

Тому:

$$a^2 = 16,\ b^2 = 9.$$

Підставимо:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Перевірка

Вершина $A(4; 0)$повинна належати гіперболі:

$$\frac{4^2}{16} - \frac{0^2}{9} = 1,$$

$$1 = 1.$$

Отже, рівняння складено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a = 5$, $b = 4$, а дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.
2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a = 6$, $b = 2$, а дійсна вісь розташована вздовж осі ординат.

Парабола

6. Дослідити параболу

$$y^2 = 8x.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння параболи, вісь симетрії якої збігається з віссю абсцис, має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Порівняємо:

$$2p = 8.$$

Звідси:

$$p = 4.$$

Вершина параболи знаходиться в початку координат:

$$O(0;0).$$

Оскільки коефіцієнт у правій частині рівняння додатний, вітки параболи напрямлені вправо.

Фокус має координати:

$$F\left(\frac{p}{2};0\right).$$

Тому:

$$F(2;0).$$

Директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Отже:

$$x = -2.$$

Для побудови визначимо декілька точок.

Якщо:

$$x = 2,$$

то:

$$y^2 = 16,$$

$$y = \pm 4.$$

Отримуємо точки:

$$A(2;4),\ B(2;-4).$$

Відповідь:

вершина:

$$\boxed{O(0;0)};$$

фокус:

$$\boxed{F(2;0)};$$

директриса:

$$\boxed{x = -2};$$

вітки параболи напрямлені вправо.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$y^2 = 12x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

2. Дослідити параболу

$$y^2 = -16x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

7. Дослідити параболу

$$x^2 = 12y.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння параболи з вертикальною віссю симетрії має вигляд:

$$x^2 = 2py.$$

Порівняємо:

$$2p = 12.$$

Звідси:

$$p = 6.$$

Вершина:

$$O(0; 0).$$

Оскільки коефіцієнт при y додатний, вітки параболи напрямлені вгору.

Фокус:

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right).$$

Отже:

$$F(0; 3).$$

Директриса:

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Тому:

$$y = -3.$$

Для побудови візьмемо:

$$y = 3.$$

Тоді:

$$x^2 = 36,$$

$$x = \pm 6.$$

Отримуємо точки:

$$A(-; 63),\ B(6; 3).$$

Відповідь:

$$\boxed{O(0; 0)};$$

$$\boxed{F(0; 3)};$$

$$\boxed{y = -3};$$

вітки напрямлені вгору.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$x^2 = 8y.$$

2. Дослідити параболу

$$x^2 = -20y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису, напрям віток та декілька точок для побудови.

8. Визначити напрям віток, фокус і директрису параболи

$$y^2 = -20x.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним:

$$y^2 = 2px.$$

Маємо:

$$2p = -20.$$

Звідси:

$$p = -10.$$

Вершина параболи:

$$O(0;0).$$

Оскільки:

$$p < 0,$$

вітки параболи напрямлені вліво.

Фокус:

$$F\left(\frac{p}{2};0\right).$$

Отже:

$$F(-;50).$$

Директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Тому:

$$x = 5.$$

Відповідь:

$$\boxed{O(0;0)};$$

$$\boxed{F(-;50)};$$

$$\boxed{x = 5};$$

вітки напрямлені вліво.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$y^2 = -12x.$$

2. Дослідити параболу

$$x^2 = -16y.$$

9. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, вісь симетрії збігається з віссю абсцис, а фокус має координати $F(3;0)$.

Розв'язок

Для параболи

$$y^2 = 2px$$

координати фокуса визначаються за формулою:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

За умовою:

$$\frac{p}{2} = 3.$$

Звідси:

$$p = 6.$$

Тоді:

$$2p = 12.$$

Отже, рівняння параболи:

$$y^2 = 12x.$$

Оскільки фокус знаходиться праворуч від вершини, вітки параболи напрямлені вправо.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = 12x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(2; 0)$.
2. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(0; -4)$.

10. Перевірити, чи належить точка $M(2; 4)$параболі

$$y^2 = 8x.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 2,\ y = 4.$$

Ліва частина:

$$y^2 = 4^2 = 16.$$

Права частина:

$$8x = 8 \cdot 2 = 16.$$

Отже:

$$16 = 16.$$

Рівність виконується, тому точка належить параболі.

Відповідь:

$\boxed{M(2;4) \text{ належить параболі}}$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(3;6)$параболі

$$y^2 = 12x.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(4;4)$параболі

$$x^2 = 4y.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Визначте основні характеристики гіперболи:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

2.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1;$$

3.

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1.$$

Для кожної гіперболи визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Приведіть рівняння гіперболи до канонічного вигляду та дослідіть її:

$$4x^2 - 9y^2 = 36;$$

2.

$$25x^2 - 16y^2 = 400;$$

3.

$$9y^2 - 4x^2 = 144.$$

3. Складіть канонічне рівняння гіперболи:

1. $a = 5, b = 3$, дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис;
2. $a = 4, b = 2$, дійсна вісь розташована вздовж осі ординат;
3. $a = 6, b = 5$, дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.

4. Перевірте належність точки заданій гіперболі:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,\ M(5; 4);$$

2.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,\ N\left(8; 3\sqrt{3}\right);$$

3.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,\ P\left(4; 3\sqrt{2}\right).$$

5. Дослідіть параболу:

$$y^2 = 16x;$$

2.

$$y^2 = -12x;$$

3.

$$x^2 = 20y;$$

4.

$$x^2 = -8y.$$

Для кожної параболи визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директрису.

6. Складіть рівняння параболи:

1. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(4; 0)$;
2. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(-; 30)$;
3. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(0; 2)$;
4. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(0; -5)$.

7. Перевірте належність точки параболі:

$$y^2 = 8x,\ M(2;4);$$

2.

$$y^2 = 12x,\ N(3;6);$$

3.

$$x^2 = 4y,\ P(4;4).$$

8. Виконайте повне дослідження та графічну побудову:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

2.

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1;$$

3.

$$y^2 = 12x;$$

4.

$$x^2 = -16y.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розпізнавати гіперболу та параболу за заданим рівнянням;
- записувати канонічні рівняння гіперболи;
- визначати дійсну та уявну півосі гіперболи;
- визначати напрям розташування віток гіперболи;
- знаходити вершини та фокуси гіперболи;
- складати рівняння асимптот гіперболи;
- приводити рівняння гіперболи до канонічного вигляду;
- перевіряти належність точки гіперболі;
- записувати канонічні рівняння параболи;

- визначати вершину та вісь симетрії параболи;
- визначати напрям віток параболи;
- знаходити фокус параболи;
- складати рівняння директриси параболи;
- перевіряти належність точки параболі;
- виконувати графічну побудову гіперболи та параболи.

Відповідно до робочої програми результатом індивідуальної роботи на практичному занятті має бути дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи з визначенням основних параметрів, характерних точок, асимптот гіперболи та виконанням графічної побудови.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення гіперболи.
2. Канонічне рівняння гіперболи.
3. Дійсна та уявна півосі гіперболи.
4. Вершини гіперболи.
5. Фокуси гіперболи.
6. Зв’язок між параметрами a, bі cгіперболи.
7. Асимптоти гіперболи.
8. Визначення напряму віток гіперболи.
9. Перевірка належності точки гіперболі.
10. Приведення рівняння гіперболи до канонічного вигляду.
11. Побудова гіперболи.
12. Означення параболи.
13. Канонічні рівняння параболи.
14. Вершина параболи.
15. Вісь симетрії параболи.
16. Напрям віток параболи.
17. Фокус параболи.

18.Директриса параболи.

19.Визначення параметра параболи.

20.Перевірка належності точки параболі.

21.Складання рівняння параболи за координатами фокуса.

22.Побудова параболи за її канонічним рівнянням.

23.Основні відмінності між гіперболою та параболою.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал з теми **«Криві другого порядку: гіпербола, парабола»**.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті подано **п’ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Завдання не мають професійного спрямування і можуть використовуватися для здобувачів освіти різних спеціальностей.

Відповідно до робочої програми під час виконання індивідуального завдання необхідно привести задані рівняння до канонічного вигляду, визначити основні параметри кривих, вершини, фокуси та інші характерні точки, для гіперболи визначити асимптоти і виконати графічну побудову.

Варіант 1

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити дійсну та уявну півосі, напрям розташування віток і координати вершин гіперболи.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

визначити координати фокусів та скласти рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси, асимптоти та виконати схематичну побудову гіперболи.

4. Дано параболу

$$y^2 = 12x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус має координати $F(4; 0)$. Визначити директрису та виконати схематичну побудову.

Варіант 2

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і координати вершин.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

визначити фокуси та рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$4x^2 - 9y^2 = 36$$

до канонічного вигляду. Визначити всі основні характеристики гіперболи та виконати її побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -16x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; 3)$. Визначити напрям віток, директрису та виконати побудову.

Варіант 3

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$$

визначити координати фокусів і рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси, асимптоти та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 8y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директрису.

5. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, а фокус $F(-; 30)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 4

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати побудову гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -20y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; -4)$. Визначити директрису та виконати схематичну побудову.

Варіант 5

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

визначити фокуси й асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9y^2-16x^2=144$$

до канонічного вигляду. Визначити вершини, фокуси, асимптоти та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2=20x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(5;0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 6

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{17}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2-9x^2=225$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -12x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, а фокус $F(0; 4)$. Визначити директрису та побудувати параболу.

Варіант 7

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{15} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси й асимптоти. Виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 16y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її фокус $F(-; 50)$, а вершина знаходиться в початку координат. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 8

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -12y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0; -3)$і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 9

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{17} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 24x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат та фокусом $F(6; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 10

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2-9y^2=225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2=24y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0;5)$і вершиною в початку координат. Виконати схематичну побудову.

Варіант 11

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{21}=1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{13}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$4x^2-25y^2=100$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2=-24x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус $F(-;40)$. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 12

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{19} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -24y.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; -6)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 13

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$49x^2 - 25y^2 = 1225$$

до канонічного вигляду. Виконати повне дослідження та побудову гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 28x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(7; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 14

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{19}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2-16x^2=400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти. Виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2=28y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0;7)$і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 15

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{24}=1.$$

Визначити її півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{21}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2-16y^2=576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2=-28x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(-;70)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 16

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{20}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{17}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9y^2-25x^2=225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2=-28y.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(0;-7)$. Виконати графічну побудову.

Варіант 17

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{15}=1$$

визначити фокуси й асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2-4y^2=64$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2=32x.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(8;0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 18

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{45}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{21}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$4y^2-9x^2=36$$

до канонічного вигляду. Визначити всі основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2=32y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0;8)$і вершиною в початку координат. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 19

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2-4y^2=100$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2=-32x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(-;80)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 20

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{36}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2-25x^2=400$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2=-32y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0;-8)$і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 21

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{17}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9x^2-25y^2=225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2=36x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(9;0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 22

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{33}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{19}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2-9x^2=225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2=36y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0;9)$. Визначити директрису та виконати графічну побудову.

Варіант 23

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{13}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$49x^2-16y^2=784$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2=-36x.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(-;90)$. Визначити директрису, напрям віток та виконати побудову.

Варіант 24

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{28} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2 - 49x^2 = 784$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -36y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0; -9)$і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 25

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{40} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{19} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 40x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(10; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 26

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{121}-\frac{x^2}{40}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2-36x^2=900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2=40y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0;10)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 27

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{32}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{21}=1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2-36y^2=576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2=-40x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(-;100)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 28

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{32}=1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{21} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36y^2 - 16x^2 = 576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -40y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0; -10)$і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 29

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{32} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 36y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти і виконати графічну побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 44x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат та фокусом $F(11; 0)$. Визначити директрису і виконати схематичну побудову.

Варіант 30

1. Дано гіперболу

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1.$$

Визначити дійсну та уявну півосі, напрям розташування віток та координати вершин гіперболи.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$$

визначити координати фокусів та скласти рівняння обох асимптот.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити дійсну та уявну півосі, координати вершин і фокусів, скласти рівняння асимптот та виконати схематичну побудову гіперболи.

4. Дано параболу

$$x^2 = -44y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус має координати $F(0; -11)$. Визначити напрям віток, скласти рівняння директриси та виконати схематичну побудову.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Визначення основних параметрів, вершин та напряму віток гіперболи	0,25
2	Визначення фокусів та асимптот гіперболи	0,25
3	Приведення рівняння гіперболи до канонічного вигляду, повне дослідження та побудова	0,50

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
4	Дослідження параболи: вершина, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директриса	0,50
5	Складання рівняння параболи за заданими параметрами, дослідження та побудова	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено вид кожної кривої, канонічні рівняння, півосі, вершини та фокуси гіперболи, правильно складено рівняння її асимптот. Для параболи правильно визначено вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису. Графічні побудови відповідають знайденим параметрам. Розв’язання наведено послідовно, усі необхідні математичні перетворення записано.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв’язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано повністю, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно розпізнає гіперболу і параболу, визначає їх основні параметри, але може допустити окрему неточність у координатах фокуса, рівнянні асимптоти, директриси або графічній побудові.

1,00–1,25 бала

Здобувач освіти правильно виконує прості завдання за готовими канонічними рівняннями, але допускає помилки під час приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення фокусів, складання рівнянь асимптот або директриси. Графічна побудова виконана частково.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає канонічні рівняння гіперболи та параболи і може визначити лише окремі параметри кривих. Під час повного дослідження та побудови допускає суттєві помилки.

0–0,25 бала

Правильно виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього вміння розпізнавати гіперболу та параболу, приводити

рівняння до канонічного вигляду, визначати їх основні параметри й виконувати графічну побудову.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 9 — «Криві другого порядку: гіпербола, парабола». Робочою програмою передбачено дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи, визначення основних параметрів, характерних точок, асимптот гіперболи та виконання графічної побудови.

Практичне заняття № 10

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема: Прикладне застосування

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години

Вид заняття: практичне заняття з професійним спрямуванням

Мета заняття

Узагальнити, систематизувати та закріпити знання здобувачів освіти з аналітичної геометрії; сформувати вміння застосовувати метод координат, рівняння прямої та рівняння кривих другого порядку під час розв'язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Навчити здобувачів освіти використовувати математичний апарат аналітичної геометрії для опису розташування конструктивних осей і елементів на площині; визначення рівнянь прямих за координатами заданих точок; знаходження точок перетину осей; перевірки паралельності та перпендикулярності напрямів; математичного опису круглих, еліптичних, гіперболічних і параболічних геометричних форм, які можуть використовуватися як спрощені математичні моделі елементів будівель і споруд.

У результаті виконання практичного заняття здобувач освіти повинен:

знати: основні види рівнянь прямої на площині; умови паралельності та перпендикулярності прямих; формулу кута між прямими; канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи; основні геометричні параметри кривих другого порядку;

вміти: складати рівняння прямої за координатами двох точок; визначати взаємне розташування прямих; знаходити точку перетину прямих; складати та досліджувати рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи; інтерпретувати результати математичних розрахунків у найпростіших професійних ситуаціях будівництва та цивільної інженерії.

Оснащення

Конспекти лекцій, методичні матеріали, індивідуальні картки із завданнями, калькулятор, лінійка, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети заняття.
3. Актуалізація опорних знань з аналітичної геометрії.
4. Встановлення зв'язку аналітичної геометрії з професійними задачами будівництва та цивільної інженерії.
5. Розв'язування професійно орієнтованих прикладів.
6. Виконання аналогічних завдань за зразком.
7. Самостійне розв'язування професійно орієнтованих задач.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків.
10. Пояснення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називають рівнянням прямої на площині?
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
4. Що називають кутовим коефіцієнтом прямої?
5. Якою є умова паралельності двох прямих?
6. Якою є умова перпендикулярності двох прямих?
7. Як визначити координати точки перетину двох прямих?
8. Як визначити кут між двома прямими?
9. Що називають колом?
10. Який вигляд має рівняння кола з центром у заданій точці?
11. Що називають еліпсом?
12. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?

13. Що називають гіперболою?

14. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

15. Що називають параболою?

16. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?

17. Які геометричні форми будівельних елементів можна наближено описувати за допомогою кривих другого порядку?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Визначення рівняння конструктивної осі

На плані будівлі конструктивна вісь проходить через точки $A(2;1)$і $B(6;5)$. Скласти рівняння цієї осі.

Розв'язання

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, записуємо у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Підставимо координати точок:

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-1}{5-1}.$$

Отримаємо

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{4}.$$

Звідси

$$x-2=y-1.$$

Після перенесення всіх членів в одну частину:

$$x-y-1=0.$$

Відповідь: конструктивна вісь описується рівнянням $x-y-1=0$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. На плані будівлі вісь стіни проходить через точки $A(1;2)$і $B(5;6)$. Скласти рівняння осі у загальному вигляді.

2. Вісь конструктивного елемента проходить через точки $C(2;5)$і $D(8;2)$. Скласти рівняння прямої, яка описує цю вісь.

Приклад 2. Визначення точки перетину конструктивних осей

На плані будівлі дві конструктивні осі описуються рівняннями

$$x + y - 6 = 0,$$

$$2x - y - 3 = 0.$$

Визначити координати точки їх перетину.

Розв'язання

Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Додаємо рівняння:

$$3x = 9,$$

звідки

$$x = 3.$$

Тоді

$$y = 6 - 3 = 3.$$

Відповідь: конструктивні осі перетинаються в точці $P(3; 3)$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Дві осі будівельного плану описуються рівняннями $x + y - 8 = 0$і $2x - y - 1 = 0$. Визначити координати точки їх перетину.

2. Осі двох конструктивних елементів задано рівняннями $2x + y - 7 = 0$та $x - y - 2 = 0$. Знайти координати точки їх перетину.

Приклад 3. Перевірка перпендикулярності конструктивних осей

На плані дві конструктивні осі задано рівняннями

$$y = 2x + 1$$

і

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Визначити, чи є ці осі перпендикулярними.

Розв'язання

Кутові коефіцієнти:

$$k_1 = 2,\ k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Для перпендикулярних прямих повинна виконуватися умова

$$k_1 k_2 = -1.$$

Перевіряємо:

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Умова виконується.

Відповідь: задані конструктивні осі перпендикулярні.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Осі двох стін задано рівняннями $y = 3x - 2$і $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Перевірити їх перпендикулярність.

2. Напрями двох конструктивних елементів задано прямими $y = \frac{1}{2}x + 3$і $y = -2x + 7$. Визначити їх взаємне розташування.

Приклад 4. Математична модель круглого конструктивного елемента

У горизонтальному перерізі центр круглої колони має координати $C(4; 3)$, а її радіус у вибраному масштабі становить 2 одиниці. Скласти рівняння контуру перерізу.

Розв'язання

Рівняння кола з центром $C(a; b)$і радіусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Підставимо дані:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2.$$

Отже,

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Відповідь: контур перерізу описується рівнянням

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Центр круглого конструктивного елемента розташований у точці $C(5;4)$, радіус дорівнює 3 одиниці. Скласти рівняння його контуру.

2. На плані центр круглого отвору має координати $C(2;6)$, а радіус становить 2 одиниці. Скласти рівняння кола.

Приклад 5. Еліптичний контур архітектурного елемента

Контур елемента в системі координат моделюється еліпсом із центром у початку координат. Велика піввісь дорівнює 6 одиниць, мала — 4 одиниці. Скласти канонічне рівняння еліпса.

Розв'язання

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

За умовою

$$a=6,\ b=4.$$

Тоді

$$a^2=36,\ b^2=16.$$

Отже,

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Еліптичний контур має півосі 8 і 5 одиниць. Центр розташований у початку координат. Скласти його канонічне рівняння.

2. Еліптичний отвір моделюється еліпсом із півосями 10 і 6 одиниць. Скласти канонічне рівняння його контуру.

Приклад 6. Параболічний контур арки

Симетричний контур арки моделюється параболою

$$y=ax^2.$$

Вершина параболи розташована в точці $O(0;0)$, а точка $A(4;8)$належить параболі. Визначити рівняння параболи.

Розв'язання

Підставимо координати точки A:

$$8 = a \cdot 4^2.$$

Отже,

$$8 = 16a,$$

звідки

$$a = \frac{1}{2}.$$

Тому рівняння має вигляд

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Відповідь: математична модель контуру арки

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Параболічний контур має вершину в початку координат і проходить через точку $A(3;9)$. Скласти його рівняння у вигляді $y = ax^2$.

2. Контур арки описується параболою з вершиною у початку координат, яка проходить через точку $B(4;4)$. Визначити рівняння параболи.

Приклад 7. Визначення ширини параболічного прорізу

Контур симетричного прорізу описується рівнянням

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Визначити відстань між точками контуру на рівні $y = 4$.

Розв'язання

Підставимо $y = 4$:

$$4 = \frac{1}{4}x^2.$$

Помножимо обидві частини на 4:

$$x^2 = 16.$$

Тому

$$x_1 = -4,\ x_2 = 4.$$

Відстань між точками:

$$l = x_2 - x_1 = 4 - (-4) = 8.$$

Відповідь: ширина прорізу на заданому рівні становить 8 умовних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Контур описується параболою $y = \frac{1}{2}x^2$. Визначити його ширину на рівні $y = 8$.

2. Параболічний контур описується рівнянням $y = \frac{1}{9}x^2$. Визначити відстань між точками контуру на рівні $y = 4$.

Приклад 8. Визначення параметрів гіперболічної моделі

Контур умовного елемента описується рівнянням

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі та рівняння асимптот.

Розв'язання

Порівнюємо із канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Маємо

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9.$$

Тому

$$a = 5,\ b = 3.$$

Асимптоти гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Отже,

$$y = \pm\frac{3}{5}x.$$

Відповідь: $a = 5$, $b = 3$; асимптоти $y = \frac{3}{5}x$і $y = -\frac{3}{5}x$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Контур описується гіперболою $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$. Визначити її півосі та рівняння асимптот.

2. Для гіперболи $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$визначити основні півосі та скласти рівняння асимптот.

Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. На плані будівлі конструктивна вісь проходить через точки $\boldsymbol{A(2;3)}$і $\boldsymbol{B(8;6)}$. Скласти її рівняння у загальному вигляді.

Завдання 2. Дві осі задано рівняннями $\boldsymbol{x + y - 7 = 0}$і $\boldsymbol{2x - y - 2 = 0}$. Визначити координати точки їх перетину.

Завдання 3. Дві конструктивні осі описуються рівняннями $\boldsymbol{y = 2x + 3}$та $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 5}$. Перевірити їх перпендикулярність.

Завдання 4. Центр круглого перерізу колони має координати $\boldsymbol{C(5;3)}$, радіус дорівнює 2 одиниці. Скласти рівняння контуру.

Завдання 5. Еліптичний контур має півосі 7 і 4 одиниці. Скласти його канонічне рівняння.

Завдання 6. Параболічний контур із вершиною в початку координат проходить через точку $\boldsymbol{A(4;12)}$. Визначити його рівняння у вигляді $\boldsymbol{y = ax^2}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне професійно орієнтоване завдання

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 індивідуальних варіантів**. У кожному варіанті передбачено п'ять професійно орієнтованих завдань з аналітичної геометрії. Розв'язання необхідно виконувати повністю: записати математичну модель, формули, послідовність обчислень, відповідь та, де це передбачено умовою, коротко пояснити професійний зміст отриманого результату.

Варіант 1

1. На плані будівлі конструктивна вісь проходить через точки $A(1;2)$і $B(5;6)$. Скласти рівняння прямої, яка описує цю вісь, та записати його у загальному вигляді.
2. Дві конструктивні осі задано рівняннями $x+y-6=0$і $2x-y-3=0$. Визначити координати точки їх перетину.
3. Центр круглого перерізу колони розташований у точці $C(4;3)$, а радіус дорівнює 2 одиниці. Скласти рівняння контуру перерізу.
4. Еліптичний архітектурний елемент має півосі 6 і 4 одиниці, а його центр розташований у початку координат. Скласти канонічне рівняння еліпса.
5. Параболічний контур арки має вершину в початку координат і проходить через точку $A(4;8)$. Скласти рівняння параболи у вигляді $y=ax^2$.

Варіант 2

1. Вісь стіни проходить через точки $A(2;1)$і $B(6;5)$. Скласти рівняння цієї осі у загальному вигляді.
2. Осі двох конструктивних елементів задано рівняннями $x+y-8=0$і $2x-y-1=0$. Визначити точку їх перетину.
3. Центр круглого отвору має координати $C(5;4)$, радіус дорівнює 3 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний контур має півосі 8 і 5 одиниць. Скласти його канонічне рівняння.
5. Параболічний контур має вершину в початку координат і проходить через точку $A(3;9)$. Визначити його рівняння.

Варіант 3

1. На будівельному плані вісь проходить через точки $A(3;2)$і $B(7;6)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі описуються рівняннями $2x+y-7=0$і $x-y-2=0$. Визначити точку перетину.
3. Круглий конструктивний елемент має центр $C(3;5)$і радіус 4 одиниці. Скласти рівняння його контуру.
4. Еліптичний отвір має півосі 10 і 6 одиниць. Скласти канонічне рівняння еліпса.

5. Параболічна арка має вершину в початку координат і проходить через точку $A(4;4)$. Визначити її рівняння.

Варіант 4

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(1;4)$і $B(5;8)$. Скласти її рівняння у загальному вигляді.
2. Осі задано рівняннями $x+2y-10=0$та $2x-y-5=0$. Визначити координати точки перетину.
3. Центр круглого перерізу розташований у точці $C(6;4)$, радіус дорівнює 2 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний контур має півосі 7 і 3 одиниці. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(2;6)$, а його вершина розташована в початку координат. Визначити коефіцієнт aта рівняння $y=ax^2$.

Варіант 5

1. Вісь конструктивного елемента проходить через точки $A(2;5)$і $B(8;2)$. Скласти рівняння осі.
2. Дві осі задано рівняннями $2x+y-8=0$і $x-y-1=0$. Визначити точку їх перетину.
3. Центр круглого елемента $C(2;3)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння контуру.
4. Еліптичний контур має півосі 9 і 4 одиниці. Скласти його рівняння.
5. Параболічна модель проходить через точку $A(5;10)$і має вершину $O(0;0)$. Скласти її рівняння.

Варіант 6

1. На плані будівлі вісь проходить через точки $A(0;2)$і $B(4;6)$. Скласти її рівняння.
2. Осі задано рівняннями $x+y-10=0$та $3x-y-2=0$. Знайти точку перетину.
3. Центр круглого отвору $C(7;3)$, радіус 3 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний елемент має півосі 12 і 5 одиниць. Скласти канонічне рівняння.

5. Параболічний контур із вершиною $O(0;0)$проходить через точку $A(6;9)$. Визначити його рівняння.

Варіант 7

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(2;3)$і $B(6;7)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі задано рівняннями $2x + y - 9 = 0$і $x - y = 0$. Знайти точку перетину.
3. Круглий переріз має центр $C(4;6)$та радіус 4 одиниці. Скласти рівняння контуру.
4. Еліптичний контур має півосі 11 і 7 одиниць. Скласти його канонічне рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(3;6)$і має вершину в початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 8

1. Вісь стіни проходить через точки $A(1;5)$і $B(7;2)$. Скласти рівняння прямої.
2. Осі задано рівняннями $x + 2y - 8 = 0$і $2x - y - 1 = 0$. Знайти їх точку перетину.
3. Центр круглого елемента $C(5;5)$, радіус 2 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний отвір має півосі 8 і 6 одиниць. Скласти рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(4;12)$і має вершину $O(0;0)$. Визначити її рівняння.

Варіант 9

1. На плані конструктивна вісь проходить через точки $A(3;1)$і $B(9;4)$. Скласти її рівняння.
2. Дві осі задано рівняннями $3x + y - 10 = 0$та $x - y - 2 = 0$. Визначити координати точки перетину.
3. Круглий переріз має центр $C(3;7)$і радіус 3 одиниці. Скласти рівняння контуру.
4. Еліптичний контур має півосі 10 і 5 одиниць. Скласти канонічне рівняння.

5. Парабола з вершиною у початку координат проходить через точку $A(2;8)$. Скласти її рівняння.

Варіант 10

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(2;6)$і $B(8;3)$. Скласти рівняння прямої.
2. Осі описуються рівняннями $2x+y-12=0$та $x-y-3=0$. Визначити точку їх перетину.
3. Центр круглого елемента $C(6;5)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний контур має півосі 12 і 8 одиниць. Скласти його рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(5;15)$і має вершину у початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 11

1. Вісь конструкції проходить через точки $A(0;3)$і $B(6;6)$. Скласти її рівняння.
2. Дві осі задано рівняннями $x+y-9=0$і $2x-y=0$. Знайти координати точки перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(4;2)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліпс має півосі 9 і 6 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(3;12)$. Вершина знаходиться у початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 12

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(2;4)$і $B(10;8)$. Скласти її рівняння.
2. Осі задано рівняннями $3x+y-11=0$і $x-y-1=0$. Визначити точку перетину.
3. Круглий отвір має центр $C(8;4)$, радіус 3 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 14 і 7 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(4;16)$, вершина — $O(0;0)$. Визначити рівняння.

Варіант 13

1. Вісь елемента проходить через точки $A(1;1)$і $B(7;4)$. Скласти рівняння.
2. Осі задано рівняннями $x+2y-11=0$і $2x-y-2=0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(5;7)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліпс має півосі 15 і 9 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Парабола проходить через точку $A(6;12)$і має вершину в початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 14

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(3;5)$і $B(9;8)$. Скласти її рівняння.
2. Дві осі описуються рівняннями $2x+y-13=0$і $x-y-1=0$. Знайти точку перетину.
3. Круглий елемент має центр $C(7;6)$, радіус 2 одиниці. Скласти рівняння контуру.
4. Еліптичний елемент має півосі 13 і 5 одиниць. Скласти рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(5;20)$, вершина розташована в початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 15

1. Вісь будівельного елемента проходить через точки $A(2;2)$і $B(8;8)$. Скласти рівняння прямої.
2. Осі задано рівняннями $x+y-12=0$і $3x-y-4=0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(6;3)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 16 і 8 одиниць. Скласти його рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(4;20)$. Вершина знаходиться у початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 16

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(4;1)$і $B(10;7)$. Скласти рівняння прямої.

2. Осі задано рівняннями $2x + y - 14 = 0$і $x - y - 2 = 0$. Визначити координати точки перетину.
3. Центр круглого елемента $C(3; 4)$, радіус 6 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 10 і 8 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Парабола проходить через точку $A(2; 10)$та має вершину $O(0; 0)$. Визначити рівняння.

Варіант 17

1. Вісь стіни проходить через точки $A(1; 3)$і $B(9; 7)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі задано рівняннями $x + 2y - 14 = 0$і $3x - y - 1 = 0$. Знайти точку перетину.
3. Круглий переріз має центр $C(8; 5)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 18 і 10 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(6; 18)$і має вершину в початку координат. Скласти її рівняння.

Варіант 18

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(2; 7)$і $B(8; 4)$. Скласти рівняння прямої.
2. Осі описуються рівняннями $3x + y - 15 = 0$та $x - y - 1 = 0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого отвору $C(5; 8)$, радіус 3 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний контур має півосі 12 і 9 одиниць. Скласти рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(3; 15)$. Вершина знаходиться у початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 19

1. Вісь конструкції проходить через точки $A(3; 3)$і $B(11; 7)$. Скласти її рівняння.
2. Дві осі задано рівняннями $2x + y - 16 = 0$і $x - y - 1 = 0$. Знайти точку перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(7; 4)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння.

4. Еліпс має півосі 20 і 12 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Парабола проходить через точку $A(5; 25)$і має вершину в початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 20

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(1; 6)$і $B(7; 9)$. Скласти рівняння.
2. Осі задано рівняннями $x + 2y - 16 = 0$і $2x - y - 2 = 0$. Визначити точку перетину.
3. Круглий елемент має центр $C(9; 6)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 14 і 10 одиниць. Скласти рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(4; 24)$та має вершину $O(0; 0)$. Скласти його рівняння.

Варіант 21

1. Вісь будівельного елемента проходить через точки $A(2; 3)$і $B(10; 7)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві конструктивні осі задано рівняннями $3x + y - 17 = 0$і $x - y - 1 = 0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(4; 7)$, радіус 6 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 16 і 10 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Парабола проходить через точку $A(6; 24)$, вершина знаходиться у початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 22

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(4; 2)$і $B(12; 6)$. Скласти рівняння.
2. Осі задано рівняннями $2x + y - 18 = 0$і $x - y - 2 = 0$. Визначити координати точки перетину.
3. Центр круглого елемента $C(8; 7)$, радіус 3 одиниці. Скласти рівняння кола.
4. Еліптичний контур має півосі 18 і 12 одиниць. Скласти рівняння.

5. Параболічний контур проходить через точку $A(3; 18)$та має вершину у початку координат. Визначити його рівняння.

Варіант 23

1. Вісь конструкції проходить через точки $A(2; 8)$і $B(10; 4)$. Скласти рівняння прямої.
2. Осі описуються рівняннями $x + 2y - 18 = 0$і $3x - y - 2 = 0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого отвору $C(6; 9)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 15 і 12 одиниць. Скласти його канонічне рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(5; 30)$, вершина розташована у початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 24

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(3; 2)$і $B(9; 8)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі задано рівняннями $3x + y - 19 = 0$та $x - y - 1 = 0$. Визначити координати точки перетину.
3. Круглий переріз має центр $C(10; 5)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний елемент має півосі 20 і 15 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(4; 28)$та має вершину $O(0; 0)$. Визначити рівняння.

Варіант 25

1. Вісь будівельного елемента проходить через точки $A(1; 4)$і $B(11; 9)$. Скласти її рівняння.
2. Осі задано рівняннями $2x + y - 20 = 0$і $x - y - 2 = 0$. Знайти точку їх перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(7; 8)$, радіус 6 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 18 і 15 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Парабола проходить через точку $A(6; 30)$, а її вершина розташована у початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 26

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(5;1)$і $B(13;5)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі задано рівняннями $x+2y-20=0$і $2x-y-3=0$. Визначити координати точки перетину.
3. Центр круглого елемента $C(9;4)$, радіус 5 одиниць. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 21 і 14 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(3;21)$, вершина — у початку координат. Визначити рівняння.

Варіант 27

1. Вісь конструктивного елемента проходить через точки $A(2;5)$і $B(12;10)$. Скласти її рівняння у загальному вигляді.
2. Осі задано рівняннями $3x+y-21=0$і $x-y-1=0$. Визначити точку перетину.
3. Центр круглого перерізу $C(5;10)$, радіус 4 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний елемент має півосі 24 і 16 одиниць. Скласти рівняння.
5. Параболічний контур проходить через точку $A(4;32)$, вершина знаходиться у початку координат. Визначити його рівняння.

Варіант 28

1. Конструктивна вісь проходить через точки $A(3;7)$і $B(11;3)$. Скласти рівняння прямої.
2. Дві осі описуються рівняннями $2x+y-22=0$і $x-y-2=0$. Визначити координати точки їх перетину.
3. Круглий елемент має центр $C(11;6)$, радіус 3 одиниці. Скласти рівняння.
4. Еліптичний контур має півосі 22 і 12 одиниць. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічна арка проходить через точку $A(5;35)$, а вершина знаходиться у початку координат. Скласти рівняння.

Варіант 29

1. На плані будівлі конструктивна вісь проходить через точки $A(4;3)$і $B(14;8)$. Скласти рівняння цієї прямої у загальному вигляді.

2. Дві конструктивні осі задано рівняннями $x + 2y - 22 = 0$та $3x - y - 2 = 0$. Визначити координати точки їх перетину.
3. Центр круглого конструктивного елемента розташований у точці $C(8; 10)$, радіус становить 5 одиниць. Скласти рівняння його контуру.
4. Еліптичний контур має велику піввісь 25 одиниць і малу піввісь 15 одиниць. Центр еліпса знаходиться у початку координат. Скласти канонічне рівняння.
5. Параболічний контур має вершину у початку координат і проходить через точку $A(6; 36)$. Визначити коефіцієнт aта скласти рівняння параболи $y = ax^2$.

Варіант 30

1. На плані будівельного об’єкта вісь конструктивного елемента проходить через точки $A(2; 6)$та $B(12; 11)$. Скласти рівняння прямої, привести його до загального вигляду та перевірити, що обидві задані точки задовольняють отримане рівняння.
2. Дві конструктивні осі будівельного плану описуються рівняннями $2x + y - 24 = 0$та $x - y - 3 = 0$. Визначити координати точки їх перетину та виконати перевірку підстановкою знайдених координат у початкові рівняння.
3. Круглий конструктивний елемент у горизонтальному перерізі має центр $C(10; 8)$і радіус 6 одиниць. Скласти рівняння його контуру та визначити координати точок перетину цього кола з горизонтальною прямою $y = 8$.
4. Еліптичний архітектурний елемент має велику піввісь 24 одиниці та малу піввісь 18 одиниць. Центр розташований у початку координат. Скласти канонічне рівняння еліпса та визначити координати його вершин, що лежать на координатних осях.
5. Симетричний параболічний контур арки має вершину в початку координат і проходить через точку $A(5; 40)$. Визначити коефіцієнт a, скласти рівняння $y = ax^2$та визначити ширину цього контуру на рівні $y = 40$.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	Зміст уміння, яке оцінюється	Максимальна кількість балів
1	Складання рівняння конструктивної осі за координатами двох точок	**1,00**
2	Визначення точки перетину конструктивних осей	**1,00**
3	Складання рівняння кола за центром і радіусом	**0,75**
4	Складання та дослідження канонічного рівняння еліпса	**1,00**
5	Складання рівняння параболічного контуру та його дослідження	**1,25**
Разом		**5,00**

Деталізація оцінювання

Завдання 1 — 1,00 бал. Правильний вибір формули рівняння прямої — 0,25 бала; правильна підстановка координат — 0,25 бала; правильні алгебраїчні перетворення — 0,25 бала; правильне рівняння та відповідь — 0,25 бала.

Завдання 2 — 1,00 бал. Правильне складання системи рівнянь — 0,20 бала; правильний спосіб розв’язування — 0,30 бала; правильне визначення координат — 0,30 бала; перевірка або професійна інтерпретація — 0,20 бала.

Завдання 3 — 0,75 бала. Правильне використання рівняння кола — 0,25 бала; правильна підстановка координат центра та радіуса — 0,25 бала; правильне кінцеве рівняння — 0,25 бала.

Завдання 4 — 1,00 бал. Правильне визначення півосей — 0,25 бала; правильне визначення квадратів півосей — 0,20 бала; правильне складання канонічного рівняння — 0,35 бала; правильне оформлення відповіді — 0,20 бала.

Завдання 5 — 1,25 бала. Правильний вибір математичної моделі параболи — 0,25 бала; правильна підстановка координат заданої точки — 0,25 бала; правильне визначення параметра — 0,30 бала; правильне рівняння параболи — 0,25 бала; пояснення отриманого результату — 0,20 бала.

Типові помилки

Під час виконання практичного заняття необхідно звернути особливу увагу на правильне підставляння координат точок у рівняння прямої; знаки коефіцієнтів під час приведення рівняння до загального вигляду; правильність розв'язування систем рівнянь під час знаходження точки перетину; відмінність між радіусом кола і квадратом радіуса в рівнянні; правильне визначення великої та малої півосей еліпса; квадрати півосей у знаменниках канонічного рівняння; правильне визначення параметра параболи за координатами заданої точки.

Окрему увагу слід приділити **геометричному змісту отриманих результатів**. Координати, рівняння та параметри кривих повинні співвідноситися з прийнятою системою координат і математичною моделлю професійної задачі.

Підведення підсумків

Під час практичного заняття № 10 здобувачі освіти комплексно застосовують матеріал змістового модуля 2 «Аналітична геометрія»: рівняння прямої, взаємне розташування прямих, коло, еліпс, гіперболу та параболу. Попереднє практичне заняття робочої програми передбачає дослідження гіперболи й параболи, визначення їх параметрів та графічне представлення, тому професійне заняття логічно продовжує застосування цих математичних моделей.

Для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** математичний матеріал пов'язано з координатами будівельного плану, конструктивними осями, перерізами, отворами та геометричними контурами елементів. Наведені задачі є **навчальними математичними моделями** і не замінюють нормативного проєктного або конструктивного розрахунку.

Питання для підготовки

1. Як скласти рівняння прямої за двома заданими точками?
2. Як визначити координати точки перетину двох прямих?
3. Які умови паралельності та перпендикулярності прямих?
4. Як знайти кут між двома прямими?
5. Як записується рівняння кола з центром у довільній точці?
6. Як за рівнянням кола визначити його центр і радіус?
7. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?
8. Як визначити півосі еліпса?
9. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи?

10. Як визначити асимптоти гіперболи?
11. Який вигляд має рівняння параболи з вершиною в початку координат?
12. Як визначити параметр параболи за координатами точки, що їй належить?
13. Як визначити ширину параболічного контуру на заданому рівні?
14. Які професійні геометричні задачі будівництва можна математично моделювати за допомогою рівнянь прямої та кривих другого порядку?

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 11

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 2

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема: Рішення завдань за модулем 2

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 5 балів

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань і практичних умінь за змістовим модулем 2 «Аналітична геометрія»; визначити рівень сформованості вмінь застосовувати метод координат, складати рівняння прямої на площині, визначати взаємне розміщення прямих, знаходити точку їх перетину та кут між прямими, використовувати умови паралельності й перпендикулярності.

Перевірити вміння розпізнавати криві другого порядку, працювати з канонічними рівняннями кола, еліпса, гіперболи та параболи, визначати їх основні геометричні характеристики.

Сформувати здатність застосовувати методи аналітичної геометрії під час розв’язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Саме ці математичні теми передбачені змістовим модулем 2 робочої програми.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для розрахунків, калькулятор, лінійка, креслярське приладдя, координатна сітка.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети модульного контролю.

3. Ознайомлення з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань.
6. Перевірка отриманих результатів.
7. Оцінювання виконаних робіт.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків змістового модуля 2.

Структура індивідуального варіанта

Кожний варіант містить **шість завдань**:

1. метод координат та рівняння прямої;
2. взаємне розміщення двох прямих, точка перетину та кут між ними;
3. коло;
4. еліпс;
5. гіпербола;
6. парабола та професійно орієнтоване застосування для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Метод координат та рівняння прямої.

Дано точки $A(1;2)$і $B(5;5)$. Знайти відстань між точками Aі B, координати середини відрізка ABта скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки.

Завдання 2. Взаємне розміщення прямих.

Дано прямі

$$2x - y - 1 = 0,\ x + y - 5 = 0.$$

Визначити їх взаємне розміщення, знайти координати точки перетину та кут між прямими.

Завдання 3. Коло.

Дано рівняння

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Визначити координати центра кола, його радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс.

Для еліпса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

визначити півосі, координати вершин, координати фокусів та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола.

Для гіперболи

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

визначити півосі, координати вершин і фокусів та скласти рівняння асимптот.

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Поперечний контур аркового елемента будівельної конструкції у вибраній системі координат моделюється параболою

$$x^2=8y.$$

Визначити вершину параболи, її параметр, координати фокуса, рівняння директриси та напрям відкриття параболи. Пояснити, яку геометричну інформацію про форму аркового елемента дає отримана математична модель.

Варіант 2

Завдання 1. Дано точки $\boldsymbol{A(-;21)}$і $\boldsymbol{B(4;5)}$. Знайти відстань між точками, координати середини відрізка та рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$.

Завдання 2. Для прямих

$$x-2y+3=0,\ 2x+y-4=0$$

визначити взаємне розміщення, точку перетину та кут між ними.

Завдання 3. Для кола

$$(x+2)^2+(y-4)^2=16$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Обрис аркового прорізу будівлі задано параболою

$$x^2 = 12y.$$

Визначити вершину, параметр параболи, фокус, директрису та напрям її відкриття. Пояснити геометричний зміст отриманих характеристик для заданого контуру.

Варіант 3

Завдання 1. Дано точки $\boldsymbol{A(2;-1)}$і $\boldsymbol{B(6;4)}$. Знайти довжину відрізка $\boldsymbol{AB}$, його середину та рівняння прямої через точки $\boldsymbol{A}$і $\boldsymbol{B}$.

Завдання 2. Дано прямі

$$3x - y - 2 = 0,\ x + 2y - 6 = 0.$$

Визначити їх взаємне розміщення, знайти точку перетину та кут між ними.

Завдання 3. Для кола

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 36$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Профіль криволінійного конструктивного елемента описується рівнянням

$$y^2 = 16x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття параболи.

Варіант 4

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;32)}$, $\boldsymbol{B(3;6)}$. Знайти відстань $\boldsymbol{AB}$, середину відрізка і рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$.

Завдання 2. Для прямих

$$2x + 3y - 7 = 0,\ 3x - 2y + 1 = 0$$

знайти точку перетину, визначити взаємне розміщення і кут.

Завдання 3. Для

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

визначити центр, радіус та діаметр кола.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти гіперболи.

Завдання 6. Геометрична вісь аркового конструктивного елемента моделюється параболою

$$x^2 = 20y.$$

Визначити її вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 5

Завдання 1. Для точок $\boldsymbol{A(1;-3)}$, $\boldsymbol{B(7;2)}$знайти відстань, середину відрізка та рівняння прямої.

Завдання 2. Для прямих

$$x + 3y - 6 = 0,\ 2x - y - 3 = 0$$

визначити взаємне розміщення, точку перетину та кут.

Завдання 3. Для кола

$$(x-5)^2+(y+2)^2=49$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

Завдання 6. Контур склепінчастого елемента споруди задано параболою

$$y^2=24x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису і напрям відкриття кривої.

Варіант 6

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;1-2)}$, $\boldsymbol{B(5;3)}$. Знайти довжину $\boldsymbol{AB}$, координати середини та рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$.

Завдання 2. Для прямих

$$3x+2y-8=0,\ x-y+1=0$$

визначити точку перетину і кут між ними.

Завдання 3. Для кола

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25$$

знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{49}=1$$

визначити основні характеристики та асимптоти.

Завдання 6. Криволінійна вісь арки моделюється параболою

$$x^2 = 28y.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 7

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(2;3)}$, $\boldsymbol{B(8;-1)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$.

Завдання 2. Для прямих

$$2x - y + 4 = 0,\ x + 2y - 5 = 0$$

знайти точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 64$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{81} = 1$$

знайти півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$$

знайти півосі, вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Поперечний профіль криволінійного елемента будівлі описується параболою

$$y^2 = 32x.$$

Визначити її основні геометричні характеристики та напрям відкриття.

Варіант 8

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;41)}$, $\boldsymbol{B(2;7)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$4x - y - 6 = 0,\ x + 3y - 7 = 0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x+1)^2+(y-6)^2=36$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{100}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{25}=1$$

визначити основні характеристики та асимптоти.

Завдання 6. Арковий елемент фасаду описується параболою

$$x^2=36y.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 9

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(3;-2)}$, $\boldsymbol{B(9;4)}$. Визначити довжину, середину відрізка та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x-y+2=0,\ 2x+3y-9=0$$

знайти точку перетину і кут між прямими.

Завдання 3. Для

$$(x-4)^2+(y+3)^2=81$$

знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$

визначити основні параметри еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{100}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Контур аркового перекриття задано

$$y^2 = 40x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису і напрям відкриття.

Варіант 10

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A}(-; \mathbf{2} - \mathbf{4})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{4}; \mathbf{2})$знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$x + 2y - 8 = 0,\ 3x - y - 2 = 0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Обрис криволінійного конструктивного елемента задано

$$x^2 = 16y.$$

Визначити всі основні характеристики параболи та пояснити напрям її відкриття.

Варіант 11

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A}(\mathbf{0}; \mathbf{2})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{6}; \mathbf{8})$. Знайти довжину, середину та рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$.

Завдання 2. Для

$$2x + 5y - 12 = 0,\ 5x - 2y - 3 = 0$$

визначити взаємне розміщення, точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x-6)^2+(y-1)^2=49$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{13}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{17}=1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Параболічний профіль будівельного елемента має рівняння

$$y^2=20x.$$

Знайти вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 12

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;3-1)}$, $\boldsymbol{B(5;5)}$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x+4y-10=0,\ 4x-3y+2=0$$

знайти точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x+2)^2+(y+5)^2=64$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$$

визначити основні характеристики й асимптоти.

Завдання 6. Вісь аркового елемента описується

$$x^2 = 24y.$$

Визначити геометричні характеристики параболи.

Варіант 13

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(1;4)}$, $\boldsymbol{B(7;-2)}$. Знайти відстань, середину і рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$5x - y - 7 = 0,\ x + 4y - 6 = 0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 121$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{51} = 1$$

визначити основні параметри еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Криволінійний елемент споруди задано параболою

$$y^2 = 28x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 14

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A(-;52)}$, $\boldsymbol{B(3;8)}$знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$2x + 3y - 9 = 0,\ 3x - 2y - 4 = 0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x+4)^2+(y-3)^2=144$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{72}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Профіль арки задано

$$x^2=32y.$$

Визначити основні характеристики параболи та напрям її відкриття.

Варіант 15

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(2;5)}$, $\boldsymbol{B(10;1)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$4x+y-11=0,\ x-3y+5=0$$

знайти точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-7)^2+(y+1)^2=25$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{95}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{40}=1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Арковий проріз будівлі описується параболою

$$y^2 = 36x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 16

Завдання 1. Для $\boldsymbol{A}(-; \mathbf{13})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{7}; \mathbf{9})$визначити відстань, середину і рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x + 2y - 7 = 0,\ 2x - 3y + 1 = 0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{120} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{44} = 1$$

визначити характеристики й асимптоти.

Завдання 6. Контур склепіння задано

$$x^2 = 40y.$$

Визначити основні геометричні характеристики параболи.

Варіант 17

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A}(\mathbf{3}; \mathbf{1})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{9}; \mathbf{7})$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$5x + 2y - 13 = 0,\ 2x - 5y + 4 = 0$$

знайти точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-2)^2+(y+6)^2=49$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{15}=1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Криволінійний елемент перекриття описано рівнянням

$$y^2=44x.$$

Знайти вершину, параметр, фокус, директрису і напрям відкриття.

Варіант 18

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;4-2)}$, $\boldsymbol{B(4;6)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$x+4y-9=0,\ 4x-y-6=0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x+3)^2+(y+4)^2=64$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{56}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{28}=1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Параболічний профіль конструкції має рівняння

$$x^2 = 44y.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 19

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(2;-5)}$, $\boldsymbol{B(8;3)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$2x + 5y - 14 = 0,\ 5x - 2y - 8 = 0$$

знайти точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 81$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{45} = 1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Обрис аркового елемента задано

$$y^2 = 48x.$$

Визначити основні характеристики параболи.

Варіант 20

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;24)}$, $\boldsymbol{B(6;10)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x + 5y - 15 = 0,\ 5x - 3y + 1 = 0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x+7)^2+(y-3)^2=100$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{96}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{51}=1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Криволінійна вісь склепіння описується

$$x^2=48y.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 21

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(1;6)}$, $\boldsymbol{B(9;0)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$4x+3y-12=0,\ 3x-4y-5=0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x-4)^2+(y+5)^2=121$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{72}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Профіль аркового покриття описується

$$y^2 = 52x.$$

Визначити всі основні характеристики параболи.

Варіант 22

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;\,5-1)}$, $\boldsymbol{B(3;\,5)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$5x + 3y - 17 = 0,\ 3x - 5y + 2 = 0$$

знайти точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 144$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{133} = 1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{80} = 1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Контур криволінійного елемента споруди задається

$$x^2 = 52y.$$

Знайти вершину, параметр, фокус, директрису і напрям відкриття.

Варіант 23

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(4;\,-3)}$, $\boldsymbol{B(10;\,5)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$2x + 7y - 16 = 0,\ 7x - 2y - 9 = 0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x-6)^2+(y+2)^2=169$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{147}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{88}=1$$

визначити характеристики та асимптоти гіперболи.

Завдання 6. Арковий конструктивний елемент описується

$$y^2=56x.$$

Визначити основні характеристики параболи.

Варіант 24

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A}(-;\mathbf{35})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{5};\mathbf{11})$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x+7y-18=0,\ 7x-3y-4=0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x+8)^2+(y-1)^2=25$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{189}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{196}-\frac{y^2}{96}=1$$

визначити характеристики гіперболи та її асимптоти.

Завдання 6. Поперечний контур склепіння моделюється

$$x^2 = 56y.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 25

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(0; -4)}$, $\boldsymbol{B(8; 4)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$4x + 5y - 20 = 0,\ 5x - 4y - 3 = 0$$

знайти точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 36$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{125} = 1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Арковий проріз будівлі описується

$$y^2 = 60x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису і напрям відкриття.

Варіант 26

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-; 62)}$, $\boldsymbol{B(2; 10)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$5x + 4y - 19 = 0,\ 4x - 5y + 1 = 0$$

визначити точку перетину та кут.

Завдання 3. Для

$$(x+5)^2+(y+6)^2=49$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{240}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{135}=1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Криволінійний профіль будівельного елемента описується

$$x^2=60y.$$

Визначити всі основні характеристики параболи.

Варіант 27

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(3;6)}$, $\boldsymbol{B(11;-2)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$6x+y-14=0,\ x-6y+5=0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x-9)^2+(y+2)^2=64$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{324}+\frac{y^2}{243}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{289}-\frac{y^2}{145}=1$$

визначити характеристики гіперболи.

Завдання 6. Профіль аркового елемента споруди задається

$$y^2 = 64x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 28

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(-;\,46)}$, $\boldsymbol{B(4;\,12)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$7x + 2y - 20 = 0,\ 2x - 7y + 3 = 0$$

знайти точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 81$$

визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{361} + \frac{y^2}{280} = 1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{180} = 1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Геометрична вісь арки описується

$$x^2 = 64y.$$

Визначити основні характеристики параболи.

Варіант 29

Завдання 1. Дано $\boldsymbol{A(5;\,-4)}$, $\boldsymbol{B(13;\,4)}$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Для

$$3x + 8y - 21 = 0,\ 8x - 3y - 7 = 0$$

визначити точку перетину і кут.

Завдання 3. Для

$$(x-10)^2+(y-2)^2=100$$

визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{336}=1$$

визначити характеристики еліпса.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{361}-\frac{y^2}{192}=1$$

визначити характеристики гіперболи та асимптоти.

Завдання 6. Контур аркового перекриття описується

$$y^2=68x.$$

Визначити вершину, параметр, фокус, директрису та напрям відкриття.

Варіант 30

Завдання 1. Метод координат та рівняння прямої.

На координатному плані задано точки $A(-;23)$і $B(8;9)$. Визначити відстань між точками, координати середини відрізка ABта скласти рівняння прямої, що проходить через точки Aі B.

Завдання 2. Взаємне розміщення прямих.

Дано прямі

$$4x+7y-22=0,$$

$$7x-4y-6=0.$$

Визначити взаємне розміщення прямих, знайти координати точки їх перетину та обчислити кут між ними.

Завдання 3. Коло.

Дано коло

$$(x+6)^2+(y-8)^2=121.$$

Визначити координати центра кола, його радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс.

Дано еліпс

$$\frac{x^2}{441}+\frac{y^2}{392}=1.$$

Визначити довжини великої та малої півосей, координати вершин, координати фокусів та ексцентриситет еліпса.

Завдання 5. Гіпербола.

Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{225}=1.$$

Визначити дійсну та уявну півосі, координати вершин, координати фокусів та скласти рівняння асимптот.

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Поперечний обрис аркового конструктивного елемента громадської будівлі в локальній системі координат моделюється параболою

$$x^2=72y.$$

Необхідно:

1. визначити координати вершини параболи;
2. визначити параметр параболи;
3. знайти координати фокуса;
4. скласти рівняння директриси;
5. установити вісь симетрії;
6. визначити напрям відкриття параболи;
7. виконати схематичне зображення кривої та пояснити, яку інформацію отримана математична модель дає про геометрію аркового елемента.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ

У кожному завданні необхідно записувати основні формули, виконувати послідовні математичні перетворення та подавати остаточну відповідь.

Під час роботи з прямими необхідно не тільки знайти рівняння або точку перетину, а й обґрунтувати взаємне розміщення прямих.

Для кривих другого порядку необхідно правильно визначити тип кривої та використати відповідне канонічне рівняння.

Для еліпса необхідно враховувати співвідношення

$$c^2 = a^2 - b^2,\ \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Для гіперболи:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

а рівняння асимптот для гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мають вигляд

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

У завданнях з параболою дотримуємося єдиного позначення, яке використовували в попередніх матеріалах:

$$y^2 = 2px$$

або

$$x^2 = 2py.$$

Тому для рівняння $y^2 = 2px$фокус має координати

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right),$$

а директриса має рівняння

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Для рівняння $x^2 = 2py$відповідно

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right),\ y = -\frac{p}{2}.$$

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 2

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Зміст**	**Максимальна кількість балів**
1	Метод координат та рівняння прямої	0,75
2	Взаємне розміщення прямих, точка перетину, кут	0,75
3	Коло	0,50

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
4	Еліпс	0,75
5	Гіпербола	0,75
6	Парабола та професійно орієнтоване застосування	1,50
Разом		**5,00**

4,50–5,00 бала — усі або майже всі завдання виконано правильно; математичні методи обрано обґрунтовано; обчислення послідовні; основні характеристики кривих визначено правильно; професійно орієнтовану задачу розв'язано повністю та пояснено геометричний зміст результату.

3,50–4,49 бала — основні методи аналітичної геометрії засвоєно, але допущено окремі незначні обчислювальні або алгебраїчні помилки.

2,50–3,49 бала — здобувач освіти володіє основними поняттями, але допускає суттєві помилки під час складання рівняння прямої, визначення параметрів кривих другого порядку або виконання професійно орієнтованого завдання.

1,50–2,49 бала — правильно виконано лише частину завдань; алгоритми застосовано непослідовно; основні характеристики кривих визначено частково.

0–1,49 бала — більшість завдань не виконано або виконано неправильно.

ТИПОВІ ПОМИЛКИ

Під час виконання модульного контролю необхідно звернути увагу на правильне використання формули відстані між двома точками; визначення координат середини відрізка; складання рівняння прямої за двома точками; правильне знаходження точки перетину прямих; розрізнення умов паралельності та перпендикулярності.

Під час роботи з колом типовою помилкою є неправильне визначення координат центра за знаками у рівнянні. Наприклад, у рівнянні $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$центр має координати $C(a;b)$.

Для еліпса необхідно правильно визначати більшу піввісь і використовувати співвідношення $c^2=a^2-b^2$. Для гіперболи необхідно пам'ятати про співвідношення $c^2=a^2+b^2$та правильно складати рівняння асимптот.

Для параболи особливу увагу необхідно звертати на те, яка змінна піднесена до квадрата, оскільки від цього залежить положення осі симетрії та напрям відкриття кривої.

ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ

Модульний контроль № 2 завершує змістовий модуль **«Аналітична геометрія»**. Робоча програма передбачає в цьому модулі метод координат і пряму на площині, самостійну роботу з рівняннями площини та прямої у просторі, коло, еліпс, гіперболу, параболу, прикладне застосування та підсумкове практичне заняття № 11 «Рішення завдань за модулем 2».

Для **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** математичний зміст не змінюється. Професійна спрямованість реалізується через геометричне моделювання контурів, аркових і криволінійних елементів будівельних конструкцій, тобто аналітична геометрія використовується як математичний інструмент, а не замінюється матеріалом спеціальних будівельних дисциплін.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Оскільки практичне заняття № 11 є **модульним контролем**, окреме індивідуальне домашнє завдання, яке додатково оцінюється в балах, не передбачається.

Після перевірки роботи здобувач освіти повинен проаналізувати допущені помилки, повторити відповідний теоретичний матеріал і повторно розв’язати завдання, у яких були допущені помилки.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.

4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 12

Тема: Обчислення границь функцій

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Границя функції та її обчислення»; сформувати практичні вміння знаходити границі функцій різних типів; навчитися визначати спосіб обчислення границі, застосовувати безпосередню підстановку, основні властивості границь, виконувати математичні перетворення для усунення невизначеностей, застосовувати першу та другу важливі границі; розвивати навички послідовного математичного запису та перевірки логічності отриманого результату.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 12 входить до змістового модуля 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної» і має тему «Обчислення границь функцій». Для індивідуального завдання передбачено обчислення границь функцій різних типів із визначенням способу обчислення, використанням безпосередньої підстановки, усуненням невизначеностей математичними перетвореннями, застосуванням властивостей границь та перевіркою отриманого результату.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Що називається границею функції?
2. Що означає запис $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$?
3. Що називається границею функції в точці?
4. Що називається границею функції на нескінченності?
5. Які основні властивості границь ви знаєте?
6. Чому дорівнює границя сталої величини?
7. Як знаходиться границя суми двох функцій?
8. Як знаходиться границя різниці двох функцій?
9. Як знаходиться границя добутку двох функцій?

10. Як знаходиться границя частки двох функцій?
11. За якої умови можна застосувати правило знаходження границі частки?
12. У яких випадках границю можна знайти безпосередньою підстановкою?
13. Що називається невизначеністю?
14. Які основні види невизначеностей ви знаєте?
15. Що означає невизначеність виду $\frac{0}{0}$?
16. Що означає невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$?
17. Які математичні перетворення можна застосовувати для усунення невизначеності $\frac{0}{0}$?
18. Як застосовується розкладання многочлена на множники під час обчислення границь?
19. Для чого під час обчислення границь використовують спряжений вираз?
20. Як обчислюють границі раціональних функцій при $x \to \infty$?
21. Яке значення має степінь чисельника і знаменника під час обчислення границі раціональної функції на нескінченності?
22. Сформулюйте першу важливу границю.
23. За якої умови застосовується перша важлива границя?
24. Сформулюйте другу важливу границю.
25. Яке число позначають літерою e?
26. Чому перед початком перетворень доцільно виконати безпосередню підстановку?
27. Чи завжди отримання виразу $\frac{0}{0}$означає, що границя дорівнює нулю?
28. Чи завжди отримання виразу $\frac{\infty}{\infty}$означає, що границя дорівнює одиниці?
29. Як перевірити логічність отриманого значення границі?
30. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час обчислення границі?

Розв’язування прикладів

1. Обчислити границю безпосередньою підстановкою

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4).$$

Розв’язок

Спочатку визначимо, чи можна застосувати безпосередню підстановку.

Функція

$$f(x)=3x^2-5x+4$$

є многочленом, тому в точці $x=2$її границю можна знайти безпосередньою підстановкою.

Підставимо $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)=3\cdot 2^2-5\cdot 2+4.$$

Виконаємо обчислення:

$$3\cdot 4-10+4=12-10+4=6.$$

Відповідь:

$$\boxed{6}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-4x+5).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-3x+1).$$

2. Обчислити границю дробово-раціональної функції безпосередньою підстановкою

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x+2}.$$

Розв’язок

Перевіримо знаменник у граничній точці:

$$2+2=4\neq 0.$$

Отже, безпосередня підстановка можлива.

Підставимо $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=\frac{2^2+3\cdot 2-1}{2+2}.$$

Обчислимо чисельник:

$$4+6-1=9.$$

Знаменник:

$$2+2=4.$$

Отже:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=\frac{9}{4}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{9}{4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+3}{x+3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x+2}{2x+1}.$$

3. Обчислити границю, усунувши невизначеність виду $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Розв'язок

Спочатку виконаємо безпосередню підстановку:

$$\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Необхідно виконати математичні перетворення.

Розкладемо чисельник як різницю квадратів:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Тоді:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}.$$

Оскільки при знаходженні границі xпрямує до 3, але не дорівнює 3, скорочуємо множник $x - 3$:

$$\lim_{x \to 3} (x + 3).$$

Тепер застосуємо безпосередню підстановку:

$$3 + 3 = 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

4. Обчислити границю шляхом розкладання квадратного тричлена на множники

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

Розв'язок

Виконаємо безпосередню підстановку:

$$\frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2 - 2} = \frac{4 - 10 + 6}{0} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Розкладемо чисельник на множники:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Тоді:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}.$$

Скорочуємо спільний множник:

$$\lim_{x\to 2}(x-3).$$

Підставимо $x=2$:

$$2-3=-1.$$

Відповідь:

$$\boxed{-1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}.$$

5. Обчислити границю з використанням спряженого виразу

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

Розв'язок

Безпосередня підстановка дає:

$$\frac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника:

$$\sqrt{x}+2.$$

Маємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}.$$

У чисельнику використаємо формулу різниці квадратів:

$$\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=x-4.$$

Отже:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}.$$

Скорочуємо $x-4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Тепер підставляємо $x=4$:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}.$$

6. Обчислити границю раціональної функції при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+4x-5}.$$

Розв'язок

При $x\to\infty$чисельник і знаменник необмежено зростають. Маємо невизначеність виду:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Найвищий степінь змінної в чисельнику і знаменнику дорівнює 2.

Поділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}.$$

При $x \to \infty$:

$$\frac{1}{x}\to 0,\ \frac{1}{x^2}\to 0.$$

Тому:

$$\frac{3-0+0}{1+0-0}=3.$$

Відповідь:

$$\boxed{3}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-1}{2x^2-x+4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x+1}{4x^3+5x^2-3}.$$

7. Обчислити границю, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x+1}.$$

Розв'язок

Маємо невизначеність виду:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Найвищий степінь знаменника дорівнює 2. Поділимо всі члени на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

При $x \to \infty$:

$$\frac{2}{x} \to 0,\ \frac{5}{x^2} \to 0,\ \frac{3}{x} \to 0,\ \frac{1}{x^2} \to 0.$$

Отже:

$$\frac{0+0}{1+0+0} = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{0}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{x^2+2}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2}{2x^3+x}.$$

8. Обчислити границю, якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+1}.$$

Розв'язок

Поділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

При $x \to +\infty$:

$$x \to +\infty,\ \frac{2}{x} \to 0,\ \frac{1}{x^2} \to 0.$$

Тому:

$$\frac{+\infty+0}{1+0} = +\infty.$$

Відповідь:

$$\boxed{+\infty}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x}{x^2+4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-1}{x^2+3x}.$$

Перша важлива границя

Перша важлива границя має вигляд:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$$

Під час її застосування аргумент тригонометричної функції повинен бути виражений у радіанах.

9. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Розв'язок

Для використання першої важливої границі необхідно отримати відношення:

$$\frac{\sin 5x}{5x}.$$

Помножимо та поділимо вираз на 5:

$$\frac{\sin 5x}{x}=5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}.$$

Отже:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}.$$

При $x\to 0$:

$$5x\to 0.$$

За першою важливою границею:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1.$$

Тому:

$$5 \cdot 1 = 5.$$

Відповідь:

$$\boxed{5}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{x}.$$

10. Обчислити границю за допомогою першої важливої границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}.$$

Розв’язок

Перетворимо вираз:

$$\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x}.$$

Тоді:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x}.$$

За першою важливою границею:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1,$$

а також:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1.$$

Отже:

$$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{2}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 2x}.$$

Друга важлива границя

Друга важлива границя записується у вигляді:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e},$$

де e— число Ейлера:

$$e\approx 2{,}71828.$$

11. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}.$$

Розв'язок

Необхідно привести вираз до другої важливої границі.

Запишемо:

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}.$$

Позначимо:

$$t=\frac{x}{3}.$$

Якщо:

$$x\to\infty,$$

то:

$$t\to\infty.$$

Крім того:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{t}.$$

Тому:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{3}.$$

За другою важливою границею:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Отже:

$$e^{3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{e^{3}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}.$$

12. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}.$$

Розв'язок

Перетворимо основу степеня:

$$\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}.$$

Отже:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Це друга важлива границя.

Тому:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}=e.$$

Відповідь:

$$\boxed{e}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчисліть границі безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4);$$

2.

$$\lim_{x\to -1}(2x^3-x+5);$$

3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x+1}{x+1}.$$

2. Обчисліть границі, усунувши невизначеність виду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5};$$

2.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3};$$

3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

3. Обчисліть границі з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9};$$

2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2};$$

3.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}.$$

4. Обчисліть границі при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-2}{2x^2-x+1};$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x^2+2};$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x}{x^2+5}.$$

5. Використовуючи першу важливу границю, обчисліть:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x};$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x};$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

6. Використовуючи другу важливу границю, обчисліть:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x};$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x};$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розуміти поняття границі функції;
- визначати можливість застосування безпосередньої підстановки;
- застосовувати основні властивості границь;
- розпізнавати невизначеність виду $\frac{0}{0}$;
- розпізнавати невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;
- усувати невизначеність шляхом розкладання виразів на множники;
- скорочувати спільні множники після відповідних алгебраїчних перетворень;
- застосовувати спряжений вираз;
- обчислювати границі раціональних функцій на нескінченності;
- порівнювати степені чисельника та знаменника;
- застосовувати першу важливу границю;
- застосовувати другу важливу границю;
- правильно оформлювати послідовність математичних перетворень;
- перевіряти логічність отриманого результату.

Саме така послідовність роботи — вибір способу, безпосередня підстановка, усунення невизначеності, використання властивостей границь і перевірка результату — передбачена робочою програмою для практичного заняття 12.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття границі функції.

2. Границя функції в точці.
3. Границя функції на нескінченності.
4. Основні властивості границь.
5. Границя суми функцій.
6. Границя різниці функцій.
7. Границя добутку функцій.
8. Границя частки функцій.
9. Безпосередня підстановка під час знаходження границі.
10. Поняття невизначеності.
11. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$.
12. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.
13. Усунення невизначеності розкладанням на множники.
14. Застосування формул скороченого множення.
15. Застосування спряженого виразу.
16. Обчислення границь раціональних функцій на нескінченності.
17. Перша важлива границя.
18. Застосування першої важливої границі.
19. Друга важлива границя.
20. Застосування другої важливої границі.
21. Число e.
22. Послідовність обчислення границі функції.
23. Перевірка логічності отриманого результату.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 10 **«Границя функції та її обчислення»**. Опрацювати основні властивості границь, способи усунення невизначеностей, першу та другу важливі границі.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті наведено **п’ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Відповідно до попередньо встановлених вимог завдання мають загальноматематичний характер і **не містять професійного спрямування**.

Варіант 1

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-4x+5).$$

2. Обчислити границю. У разі виникнення невизначеності виконати необхідні алгебраїчні перетворення:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}.$$

3. Обчислити границю при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-4x+5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Варіант 2

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-x+4).$$

2. Обчислити границю, попередньо усунувши невизначеність:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+2}{2x^2+3x-1}.$$

4. Застосовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}.$$

5. Застосовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 3

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x+2).$$

2. Обчислити границю шляхом розкладання чисельника на множники:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2+5x+1}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 4

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+1}{x+3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x+1}{2x^3+5x^2-4}.$$

4. Обчислити за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 2x}.$$

5. Обчислити за допомогою другої важливої границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 5

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 1}(4x^3-2x^2+x+3).$$

2. Обчислити границю, використовуючи спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-5}{8x^2-x+2}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 6

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to -2}(2x^2+3x-1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+2}{2x^2-x+3}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 7

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-4x+7).$$

2. Обчислити границю шляхом розкладання на множники:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+x^2-1}{3x^3-2x+4}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{3x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 8

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+2x-5).$$

2. Обчислити границю з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{6x^2-5x+2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{\sin 2x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 9

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -1}(3x^2-2x+6).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x-6}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+x+7}.$$

4. Обчислити за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 12\,x}{4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x.$$

Варіант 10

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 4}(2x^2-3x+1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{7x+4}{3x^2+2x-1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5\,x}{\sin x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x.$$

Варіант 11

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2 - x - 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 27}{x - 3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{9x^2 - x + 4}{3x^2 + 2x + 5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x.$$

Варіант 12

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -2}(x^3 + x^2 - 2x + 5).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{8x^3 + 2x}{4x^3 - x^2 + 3}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^x.$$

Варіант 13

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 1}(6x^2 - 4x + 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x}{2x^2-3x+1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 15\,x}{5x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{11}{x}\right)^x.$$

Варіант 14

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(2x^3-x^2+4).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+8}{5x^2-x+2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8\,x}{\sin 4\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x}\right)^x.$$

Варіант 15

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -1}(4x^3+2x^2-x+1).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 36}\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-x+2}{5x^2+4x-7}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 12\,x}{3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^x.$$

Варіант 16

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(7x^2-5x+1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-1}{4x^2+2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 14\,x}{7x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{13}{x}\right)^x.$$

Варіант 17

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(3x^2+2x-7).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{3x^2+5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10\,x}{\sin 5\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{14}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 18

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -2}(5x^2+3x-4).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 49}\frac{\sqrt{x}-7}{x-49}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3-x+4}{6x^3+2x^2-5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 18\,x}{6x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 19

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 1}(8x^2-3x+2).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-8}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{14x^2-x+4}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 16\,x}{4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{15}{x}\right)^x.$$

Варіант 20

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 4}(x^2-2x+6).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+7}{2x^2+3x+1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 12\,x}{\sin 3\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x}\right)^x.$$

Варіант 21

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(9x^2-4x+3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-125}{x-5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{15x^2+2x-1}{5x^2-3x+7}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 20\,x}{5x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{16}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 22

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -1}(6x^3-x+5).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{x-64}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x}{10x^3-x+1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 15\,x}{\sin 3\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 23

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(4x^2+x-2).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x-9}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x+3}{x^2+6x-2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 21\,x}{7x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{17}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 24

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(5x^3-2x+1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{x-6}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{18x^2-x+3}{6x^2+4x-1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 18\,x}{\sin 6\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 25

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -2}(3x^3+4x^2-x+6).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 81}\frac{\sqrt{x}-9}{x-81}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{16x^3+3}{8x^3+2x-5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 24\,x}{8x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{18}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 26

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 1}(10x^2-7x+4).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^2-100}{x-10}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{13x+5}{4x^2-x+8}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 14\,x}{\sin 2\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+10}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 27

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 3}(7x^2-2x+5).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{21x^2+4x-1}{7x^2-x+2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 27\,x}{9x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{19}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 28

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to -1}(8x^3+3x^2-2).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x\to 100}\frac{\sqrt{x}-10}{x-100}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3-x^2+2}{3x^3+5x-4}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 20\,x}{\sin 4\,x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+11}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 29

1. Обчислити:

$$\lim_{x\to 2}(11x^2-6x+3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^3-343}{x-7}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{24x^2+x-3}{8x^2-2x+5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 30\,x}{10x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{20}{x}\right)^{x}.$$

Варіант 30

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x\to 4}(6x^2-5x+2).$$

2. Обчислити границю. Спочатку встановити вид невизначеності, а потім усунути її за допомогою відповідних алгебраїчних перетворень:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-8}.$$

3. Обчислити границю раціональної функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3-3x+1}{5x^3+2x^2-4}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 24\,x}{\sin 6\,x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+12}{x}\right)^{x}.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	**Зміст**	**Максимальна кількість балів**
1	Обчислення границі безпосередньою підстановкою	0,25
2	Обчислення границі з усуненням невизначеності	0,50
3	Обчислення границі функції на нескінченності	0,50
4	Застосування першої важливої границі	0,25
5	Застосування другої важливої границі	0,50

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено спосіб обчислення кожної границі, виконано безпосередню підстановку там, де вона можлива, правильно встановлено вид невизначеності, виконано необхідні алгебраїчні перетворення, правильно застосовано першу та другу важливі границі. Розв’язання записано послідовно, а кінцеві результати є правильними.

1,50–1,75 бала

Здобувач освіти правильно визначає способи обчислення границь та володіє основними прийомами їх знаходження. Допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок, які не свідчать про нерозуміння способу розв’язування.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання та частину завдань середнього рівня складності. Здобувач освіти розуміє поняття границі та може застосувати безпосередню підстановку, але допускає помилки під час усунення невизначеностей або застосування важливих границь.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти правильно виконує лише найпростіші обчислення. Під час виникнення невизначеності має труднощі з вибором способу її усунення. Перша та друга важливі границі застосовуються з істотними помилками.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння способів обчислення границь функцій.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний

університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 12 — «Обчислення границь функцій».

Практичне заняття № 13

Тема: Обчислення похідних і диференціалів функцій

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Похідна. Правила диференціювання»; сформувати практичні вміння знаходити похідні елементарних, складених, степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій; навчитися застосовувати таблицю похідних та правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки функцій; формувати вміння знаходити похідну складеної функції, обчислювати значення похідної у заданій точці, знаходити диференціал функції та його значення.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 13 входить до змістового модуля 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної» і має тему **«Обчислення похідних і диференціалів функцій»**. Індивідуальним завданням передбачено знаходження похідних і диференціалів заданих функцій із застосуванням таблиці похідних, правил диференціювання, правила диференціювання складеної функції та обчисленням значення похідної або диференціала у заданій точці.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, таблиця похідних елементарних функцій, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Що називається похідною функції в точці?
2. Як позначається похідна функції?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Який механічний зміст похідної?
5. Чому дорівнює похідна сталої?
6. Чому дорівнює похідна функції $y = x$?
7. Чому дорівнює похідна степеневої функції $y = x^n$?
8. Чому дорівнює похідна функції $y = \sin x$?
9. Чому дорівнює похідна функції $y = \cos x$?

10. Чому дорівнює похідна функції $y = \tan x$?
11. Чому дорівнює похідна функції $y = \cot x$?
12. Чому дорівнює похідна показникової функції $y = e^x$?
13. Чому дорівнює похідна функції $y = a^x$?
14. Чому дорівнює похідна натурального логарифма?
15. Як знаходиться похідна суми двох функцій?
16. Як знаходиться похідна різниці двох функцій?
17. Як знаходиться похідна добутку двох функцій?
18. Як знаходиться похідна частки двох функцій?
19. Що називається складеною функцією?
20. Сформулюйте правило знаходження похідної складеної функції.
21. Що називається внутрішньою функцією?
22. Що називається зовнішньою функцією?
23. Як знайти значення похідної функції у заданій точці?
24. Що називається диференціалом функції?
25. Як позначається диференціал функції?
26. Який зв'язок існує між похідною і диференціалом функції?
27. Як обчислюється диференціал функції у заданій точці?
28. Чому дорівнює диференціал незалежної змінної?
29. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час знаходження похідної складеної функції?
30. Чому правильне визначення виду функції є важливим перед початком диференціювання?

Розв'язування прикладів

1. Знайти похідну степеневої функції

Знайти похідну функції:

$$y = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7.$$

Розв’язок

Використаємо правило диференціювання суми та різниці функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

а також формулу похідної степеневої функції:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Диференціюємо кожний доданок окремо:

$$y' = (4x^5)' - (3x^3)' + (2x)' - 7'.$$

Маємо:

$$(4x^5)' = 20x^4,$$

$$(3x^3)' = 9x^2,$$

$$(2x)' = 2,$$

$$7' = 0.$$

Отже:

$$y' = 20x^4 - 9x^2 + 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 20x^4 - 9x^2 + 2}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Знайти похідну функції:

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 4.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 8.$$

2. Знайти похідну функції з дробовими та від’ємними показниками степеня

Знайти похідну:

$$y = \sqrt{x} + \frac{3}{x^2}.$$

Розв’язок

Для зручності запишемо функцію у степеневому вигляді:

$$y = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-2}.$$

Застосуємо правило:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Тоді:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3(-2)x^{-3}.$$

Отримаємо:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \sqrt{x} + \frac{4}{x}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{5}{x^3}.$$

Правило диференціювання добутку

Для функцій $u = u(x)$та $v = v(x)$:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

3. Знайти похідну добутку двох функцій

Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 3)(2x - 1).$$

Розв'язок

Функція є добутком двох функцій.

Позначимо:

$$u = x^2 + 3,$$

$$v = 2x - 1.$$

Знайдемо їх похідні:

$$u' = 2x,$$

$$v' = 2.$$

Застосуємо правило диференціювання добутку:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо знайдені вирази:

$$y' = 2x(2x - 1) + (x^2 + 3) \cdot 2.$$

Розкриємо дужки:

$$y' = 4x^2 - 2x + 2x^2 + 6.$$

Зведемо подібні доданки:

$$y' = 6x^2 - 2x + 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 6x^2 - 2x + 6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 1)(3x - 2).$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^3 - 1)(x + 4).$$

Правило диференціювання частки

Якщо

$$y = \frac{u}{v},$$

то за умови $v \neq 0$:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

4. Знайти похідну частки двох функцій

Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 2}.$$

Розв'язок

Позначимо:

$$u = x^2 + 1,\ v = x + 2.$$

Знайдемо похідні:

$$u' = 2x,$$

$$v' = 1.$$

Застосуємо правило диференціювання частки:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Підставимо:

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2+1)\cdot 1}{(x+2)^2}.$$

Розкриємо дужки в чисельнику:

$$y' = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x+2)^2}.$$

Зведемо подібні доданки:

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 5}{x^2 + 1}.$$

Похідні тригонометричних функцій

Основні формули:

$$(\sin x)' = \cos x\,,$$

$$(\cos x)' = -\sin x\,,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Знайти похідну тригонометричної функції

Знайти похідну:

$$y = 3\sin x - 2\cos x\,.$$

Розв'язок

Застосуємо правило диференціювання суми та таблицю похідних:

$$y' = 3(\sin x)' - 2(\cos x)'.$$

Оскільки:

$$(\sin x)' = \cos x\,,$$

а

$$(\cos x)' = -\sin x\,,$$

одержимо:

$$y' = 3\cos x - 2(-\sin x).$$

Отже:

$$y' = 3\cos x + 2\sin x\,.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3\cos x + 2\sin x}\,.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = 5\sin x + 3\cos x\,.$$

2. Знайти похідну:

$$y = 4\cos x - 7\sin x.$$

Похідна складеної функції

Якщо функція має вигляд

$$y = f(u),\ u = g(x),$$

то її похідна знаходиться за правилом:

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

Тобто спочатку знаходимо похідну зовнішньої функції, не змінюючи внутрішню функцію, а потім множимо отриманий результат на похідну внутрішньої функції.

6. Знайти похідну складеної степеневої функції

Знайти похідну:

$$y = (3x + 2)^5.$$

Розв'язок

Функція є складеною.

Внутрішня функція:

$$u = 3x + 2.$$

Зовнішня функція:

$$y = u^5.$$

Знайдемо похідну зовнішньої функції:

$$\frac{dy}{du} = 5u^4.$$

Знайдемо похідну внутрішньої функції:

$$u' = 3.$$

За правилом диференціювання складеної функції:

$$y' = 5u^4 \cdot 3.$$

Повернемося до змінної x:

$$y' = 15(3x + 2)^4.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 15(3x + 2)^4}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = (2x - 1)^6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (5x + 3)^4.$$

7. Знайти похідну складеної тригонометричної функції

Знайти похідну:

$$y = \sin(4x + 1).$$

Розв'язок

Внутрішня функція:

$$u = 4x + 1.$$

Зовнішня функція:

$$y = \sin u\,.$$

Похідна зовнішньої функції:

$$\frac{dy}{du} = \cos u\,.$$

Похідна внутрішньої функції:

$$u' = 4.$$

Тому:

$$y' = \cos u \cdot 4.$$

Повернемося до змінної x:

$$y' = 4\cos(4x + 1).$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 4\cos(4x + 1)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \sin(3x - 2).$$

2. Знайти похідну:

$$y = \cos(5x + 1).$$

8. Знайти похідну показникової функції

Знайти похідну:

$$y = e^{3x+2}.$$

Розв'язок

Маємо складену функцію.

Внутрішня функція:

$$u = 3x + 2.$$

Зовнішня функція:

$$y = e^u.$$

Відомо, що:

$$(e^u)' = e^u \cdot u'.$$

Знайдемо:

$$u' = 3.$$

Отже:

$$y' = 3e^{3x+2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3e^{3x+2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = e^{2x-1}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = e^{5x+4}.$$

9. Знайти похідну логарифмічної функції

Знайти похідну:

$$y = \ln(2x + 3).$$

Розв'язок

Внутрішня функція:

$$u = 2x + 3.$$

Зовнішня функція:

$$y = \ln u\,.$$

Відомо:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Знайдемо похідну внутрішньої функції:

$$u' = 2.$$

Тому:

$$y' = \frac{2}{2x+3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{2}{2x+3}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \ln(3x+1).$$

2. Знайти похідну:

$$y = \ln(5x-2).$$

10. Знайти похідну функції та обчислити її значення у заданій точці

Знайти похідну функції

$$y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Розв'язок

Спочатку знайдемо похідну функції:

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (4x)' - 1'.$$

Отже:

$$y' = 3x^2 - 4x + 4.$$

Тепер обчислимо значення похідної при $x = 2$:

$$y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4.$$

Виконуємо обчислення:

$$y'(2) = 12 - 8 + 4 = 8.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3x^2 - 4x + 4},$$

$$\boxed{y'(2) = 8}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну функції

$$y = x^3 + 2x^2 - x + 3$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

2. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 - 3x^2 + 5$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Диференціал функції

Диференціалом функції

$$y = f(x)$$

називається вираз:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отже, для знаходження диференціала необхідно:

1. знайти похідну функції;
2. помножити отриману похідну на dx.

11. Знайти диференціал функції

Знайти диференціал:

$$y = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1.$$

Розв'язок

Знайдемо похідну:

$$y' = 12x^3 - 4x + 5.$$

За означенням диференціала:

$$dy = y'dx.$$

Тому:

$$dy = (12x^3 - 4x + 5)\,dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = (12x^3 - 4x + 5)\,dx}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Знайти диференціал:

$$y = 2x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти диференціал:

$$y = 4x^5 - 3x^2 + 7.$$

12. Знайти диференціал складеної функції

Знайти диференціал:

$$y = (2x + 1)^4.$$

Розв’язок

Спочатку знайдемо похідну функції.

Маємо складену функцію:

$$y = (2x + 1)^4.$$

Похідна зовнішньої функції:

$$4(2x + 1)^3.$$

Похідна внутрішньої функції:

$$(2x + 1)' = 2.$$

Тому:

$$y' = 4(2x + 1)^3 \cdot 2.$$

Отже:

$$y' = 8(2x + 1)^3.$$

Диференціал функції:

$$dy = y'dx.$$

Тому:

$$dy = 8(2x + 1)^3 dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 8(2x + 1)^3 dx}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Знайти диференціал:

$$y = (3x - 2)^5.$$

2. Знайти диференціал:

$$y = (4x + 1)^3.$$

13. Обчислити значення диференціала функції у заданій точці

Для функції

$$y = x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при

$$x = 2,\ dx = 0{,}1.$$

Розв’язок

Знайдемо похідну:

$$y' = 3x^2 + 2.$$

Диференціал функції:

$$dy = (3x^2 + 2)dx.$$

Підставимо:

$$x = 2,\ dx = 0{,}1.$$

Маємо:

$$dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0{,}1.$$

Обчислимо:

$$3 \cdot 4 + 2 = 14.$$

Тому:

$$dy = 14 \cdot 0{,}1 = 1{,}4.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 1{,}4}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Для функції

$$y = x^2 + 3x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}05$.

2. Для функції

$$y = 2x^3 - x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0{,}1$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайдіть похідні функцій:

$$y = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 6;$$

2.

$$y = 2x^5 + 4x^3 - x + 7;$$

3.

$$y = \sqrt{x} + \frac{2}{x}.$$

2. Знайдіть похідні добутків функцій:

$$y = (x^2 + 2)(3x - 1);$$

2.

$$y = (2x^3 + 1)(x^2 - 4);$$

3.

$$y = (x + 3)\sin x\,.$$

3. Знайдіть похідні часток функцій:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1};$$

2.

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 + 1};$$

3.

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

4. Знайдіть похідні складених функцій:

$$y = (2x + 3)^6;$$

2.

$$y = \sin(5x - 1);$$

3.

$$y = \cos(3x + 2);$$

4.

$$y = e^{4x-3};$$

5.

$$y = \ln(2x + 5).$$

5. Знайдіть похідну та обчисліть її значення у заданій точці:

$$y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2,\ x = 1;$$

2.

$$y = 2x^4 - x^2 + 3,\ x = 2;$$

3.

$$y = \sin x + \cos x\,,\ x = 0.$$

6. Знайдіть диференціали функцій:

$$y = 4x^3 - 2x + 5;$$

2.

$$y = (3x + 1)^4;$$

3.

$$y = \sin 2\,x;$$

4.

$$y = e^{3x};$$

5.

$$y = \ln(4x + 1).$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- користуватися таблицею похідних елементарних функцій;
- знаходити похідну сталої та степеневої функції;
- знаходити похідну суми і різниці функцій;
- застосовувати правило диференціювання добутку;
- застосовувати правило диференціювання частки;
- знаходити похідні тригонометричних функцій;
- знаходити похідні показникових та логарифмічних функцій;
- розпізнавати складену функцію;
- правильно визначати внутрішню та зовнішню функції;
- застосовувати правило диференціювання складеної функції;
- знаходити значення похідної у заданій точці;
- знаходити диференціал функції;
- обчислювати значення диференціала у заданій точці;
- правильно і послідовно оформлювати математичні перетворення.

Зміст заняття відповідає робочій програмі, яка для практичного заняття 13 передбачає застосування таблиці похідних, правил диференціювання, знаходження похідних складених функцій, визначення диференціала та обчислення значення похідної або диференціала у заданій точці.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення похідної функції.
2. Геометричний зміст похідної.
3. Механічний зміст похідної.
4. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
5. Похідна сталої.
6. Похідна степеневої функції.
7. Похідна суми функцій.
8. Похідна різниці функцій.
9. Похідна добутку функцій.

10.Похідна частки функцій.

11.Похідні тригонометричних функцій.

12.Похідна показникової функції.

13.Похідна логарифмічної функції.

14.Поняття складеної функції.

15.Внутрішня і зовнішня функції.

16.Правило знаходження похідної складеної функції.

17.Обчислення значення похідної у заданій точці.

18.Поняття диференціала функції.

19.Зв’язок між похідною та диференціалом.

20.Формула диференціала функції.

21.Знаходження диференціала складеної функції.

22.Обчислення значення диференціала у заданій точці.

23.Послідовність знаходження похідної функції.

24.Послідовність знаходження диференціала функції.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 11 **«Похідна. Правила диференціювання»**. Повторити таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання суми, різниці, добутку, частки і складеної функції.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті наведено **п’ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Біля порядкових номерів завдань кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання для всіх варіантів наведено після варіантів.

Варіант 1

1. Знайти похідну функції:

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = (x^2 + 2)(3x - 1).$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = (2x + 3)^5.$$

4. Знайти диференціал функції:

$$y = 2x^3 - 4x + 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 2

1. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^3 - 2x^2 + 4x + 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 3}.$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = (3x - 1)^6.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^4 - 3x^2 + 2.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 - x^2 + 3$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 3

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^5 - 3x^3 + x - 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 - 1)(x + 4).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(4x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^2 + 5x - 4.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}1$.

Варіант 4

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^6 - 5x^3 + 3x - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(3x - 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x + 1)^4.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^3 - x^2 + 4x - 2$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 5

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^4 - 2x^3 + 5x - 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 + 2)(2x - 5).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{2x+1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^3 - 2x + 7.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 4x$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0{,}05$.

Варіант 6

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^5 - 4x^2 + 3x + 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(3x + 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x - 1)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 7

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^3 - 5x^2 + 2x - 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^2 + 1)(x - 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (4x + 3)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 2x^4 + 3x^2 - 5.$$

5. Для функції

$$y = 2x^3 - x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0{,}2$.

Варіант 8

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^6 - 2x^4 + x^2 - 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(5x - 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^3 - 7x + 2.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 - 2x^2 + 5x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 9

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^4 - 4x^2 + 6x - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 - 3)(4x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(2x + 5).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (x + 2)^6.$$

5. Для функції

$$y = 3x^2 + 2x - 1$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}1$.

Варіант 10

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^5 - 3x^2 + 4x + 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 + 1}{x + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{4x-1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 6x^2 - 3x + 8.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 11

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^4 + 7x^3 - 3x + 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 + 3)(x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(2x + 5).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (4x - 1)^3.$$

5. Для функції

$$y = x^3 - 3x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}05$.

Варіант 12

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^6 - x^4 + 2x^2 - 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = (5x + 2)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^5 - 4x^2 + x.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 + 3x^2 - x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 13

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 - 1)(3x + 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(6x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^4 - 2x^3 + 6.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 5x + 2$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0{,}02$.

Варіант 14

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^5 + 2x^3 - 4x + 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(4x - 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x - 5)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 15

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^4 - 3x^3 + 2x - 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (4x^2 - 1)(x + 3).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{5x+2}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 2x^5 + x^3 - 4x.$$

5. Для функції

$$y = 3x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0{,}1$.

Варіант 16

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^5 - 2x^2 + 5x - 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x + 4}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(4x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x + 2)^4.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 + 2x^3 - 5x$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 17

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^6 - 4x^3 + x - 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 5)(2x - 3).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (6x - 1)^3.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 7x^3 - 5x^2 + 4.$$

5. Для функції

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 4$, $dx = 0{,}05$.

Варіант 18

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^4 + 3x^2 - 6x + 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(7x - 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^5 - 3x + 1.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - x^2 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 19

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^3 - 2x^2 + 4x - 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^3 + 1)(x - 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(5x + 4).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (x - 3)^7.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 4x^2$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}1$.

Варіант 20

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^7 - 5x^4 + 3x^2 - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 - 2}{2x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{3x-4}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^4 - 2x^2 + 3x.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^3 - 4x^2 + x + 5$$

та обчислити її значення при $x = 3$.

Варіант 21

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^5 + 2x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 - 3)(4x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(5x + 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x + 5)^6.$$

5. Для функції

$$y = 4x^2 + x - 3$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}04$.

Варіант 22

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^6 - 7x^2 + 2x + 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = (3x - 4)^7.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 6x^3 + x^2 - 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 - 3x^3 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 23

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^4 + 4x^3 - 2x + 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 - 4)(5x + 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(8x + 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^5 + 2x^2 - 7x.$$

5. Для функції

$$y = 2x^3 + 5x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0{,}05$.

Варіант 24

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^5 - x^3 + 3x^2 - 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{4x - 3}{x^2 + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(6x - 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (5x + 1)^3.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - 2x^2 + x - 6$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 25

1. Знайти похідну:

$$y = 10x^3 - 4x^2 + 3x - 9.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^3 + 5)(x - 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{6x+1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^4 + 2x^3 - x.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 6x - 2$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0{,}1$.

Варіант 26

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^7 - 3x^5 + 2x - 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x^2 + 5}{3x - 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(6x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (4x - 3)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 5x^3 + x^2 - 4x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 27

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^4 - 6x^2 + x + 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^2 + 4)(2x - 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (7x + 2)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^3 - 4x + 6.$$

5. Для функції

$$y = 3x^3 - x^2$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0{,}02$.

Варіант 28

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^6 + 5x^4 - 3x + 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(9x - 4).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 7x^4 - 2x^2 + 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 4x^4 - 3x^2 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 29

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^5 - 5x^3 + 4x - 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 + 3)(4x - 5).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(7x + 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x + 4)^6.$$

5. Для функції

$$y = 2x^2 + 7x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 4$, $dx = 0{,}05$.

Варіант 30

1. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 4.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = \frac{3x^2 - 1}{2x + 5}.$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = e^{4x+3}.$$

4. Знайти диференціал функції:

$$y = (2x - 3)^7.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 2$, якщо $dx = 0{,}1$.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Знаходження похідної із застосуванням таблиці похідних	0,25
2	Застосування правил диференціювання добутку або частки	0,50
3	Знаходження похідної складеної функції	0,50
4	Знаходження диференціала функції	0,25
5	Обчислення значення похідної або диференціала у заданій точці	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно та повністю. Здобувач освіти правильно використовує таблицю похідних, безпомилково застосовує правила диференціювання суми, різниці, добутку та частки, правильно визначає

внутрішню і зовнішню функції під час диференціювання складених функцій, правильно знаходить диференціал та обчислює значення похідної або диференціала у заданій точці. Розв’язання записані послідовно, математично грамотно та завершені правильними відповідями.

1,50–1,75 бала

Основні способи диференціювання засвоєно правильно. Допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно визначає правило, яке необхідно застосувати, але може допустити неточність під час спрощення отриманого виразу.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання та частину завдань середнього рівня складності. Здобувач освіти вміє користуватися таблицею похідних, але допускає помилки під час диференціювання добутку, частки або складеної функції. Диференціал функції знаходить із незначною допомогою викладача.

0,50–0,75 бала

Правильно виконано лише окремі прості завдання. Є суттєві помилки у використанні правил диференціювання. Здобувач освіти має труднощі з визначенням внутрішньої та зовнішньої функцій, знаходженням диференціала або обчисленням його значення.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння таблиці похідних, правил диференціювання та зв’язку між похідною і диференціалом функції.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.

4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.

5. **Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.

6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 13 — «Обчислення похідних і диференціалів функцій»

Практичне заняття № 14

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема: Дослідження функцій. Знаходження максимумів і мінімумів у прикладних задачах

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години

Вид заняття: практичне заняття з професійним спрямуванням

Мета заняття

Закріпити знання здобувачів освіти про застосування похідної до дослідження функцій; сформувати практичні вміння знаходити критичні точки функції, визначати проміжки її зростання та спадання, знаходити точки максимуму і мінімуму та застосовувати отримані результати до розв'язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Навчити здобувачів освіти будувати математичні моделі найпростіших оптимізаційних задач, пов'язаних із визначенням раціональних геометричних розмірів будівельних елементів, максимальної площі, максимального об'єму, мінімальної витрати матеріалу та інших величин, які можуть бути представлені функцією однієї змінної.

У результаті виконання практичного заняття здобувач освіти повинен

знати: поняття критичної точки функції; необхідну умову існування екстремуму; ознаки зростання і спадання функції; достатню умову максимуму і мінімуму; алгоритм дослідження функції за допомогою першої похідної; основні етапи розв'язування прикладної задачі на екстремум.

вміти: знаходити похідну функції; визначати критичні точки; установлювати проміжки зростання і спадання; визначати точки максимуму та мінімуму; складати функцію досліджуваної величини за умовою прикладної задачі; визначати допустимі значення змінної; знаходити оптимальне значення професійного параметра та пояснювати отриманий результат.

Оснащення

Конспекти лекцій, методичні матеріали, індивідуальні картки, калькулятор, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та професійної спрямованості заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення алгоритму дослідження функції за допомогою похідної.
5. Розв’язування професійно орієнтованих задач.
6. Виконання аналогічних завдань за зразком.
7. Самостійне розв’язування прикладних задач.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків.
10. Пояснення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називають похідною функції?
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Що називають критичною точкою функції?
4. Які точки необхідно досліджувати на можливий екстремум?
5. За якої умови функція зростає на проміжку?
6. За якої умови функція спадає на проміжку?
7. Що називають точкою максимуму функції?
8. Що називають точкою мінімуму функції?
9. Як за зміною знака першої похідної встановити характер критичної точки?
10. Яка послідовність дослідження функції на монотонність та екстремуми?
11. Чому в прикладній задачі необхідно встановлювати допустимі значення змінної?

12. Як сформувати функцію мети в оптимізаційній задачі?
13. Що означає максимальне значення функції у професійній задачі?
14. Що означає мінімальне значення функції у професійній задачі?
15. Які задачі будівництва можна математично звести до знаходження максимуму або мінімуму функції?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Визначення найбільшої площі прямокутного будівельного майданчика

Для огородження трьох сторін прямокутного будівельного майданчика виділено 80 метрів тимчасового огородження. Четверта сторона прилягає до існуючої стіни і не потребує огородження. Визначити розміри майданчика, за яких його площа буде найбільшою.

Розв'язання

Нехай xметрів — ширина майданчика, а yметрів — його довжина.

Огороджуються дві ширини та одна довжина:

$$2x + y = 80.$$

Звідси

$$y = 80 - 2x.$$

Площа прямокутника:

$$S = xy.$$

Тому

$$S(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

За фізичним змістом задачі

$$0 < x < 40.$$

Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 80 - 4x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$80 - 4x = 0,$$

$$x = 20.$$

Якщо $x < 20$, то $S'(x) > 0$, тому площа зростає.

Якщо $x > 20$, то $S'(x) < 0$, тому площа спадає.

Отже, при $x = 20$функція має максимум.

Довжина:

$$y = 80 - 2 \cdot 20 = 40.$$

Максимальна площа:

$$S_{\max} = 20 \cdot 40 = 800 \text{ м}^2.$$

Відповідь: оптимальні розміри майданчика — 20 метрів на 40 метрів; максимальна площа становить 800 квадратних метрів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика використовується 100 метрів огорожі. Четверта сторона прилягає до будівлі. Визначити розміри майданчика, за яких його площа буде найбільшою, та знайти максимальну площу.

2. Для тимчасового огородження трьох сторін прямокутної будівельної ділянки є 120 метрів огорожі. Визначити ширину та довжину ділянки, за яких її площа набуває найбільшого значення.

Приклад 2. Максимальна площа прямокутного перерізу

Периметр прямокутного конструктивного перерізу становить 40 сантиметрів. Визначити розміри прямокутника, за яких площа перерізу буде найбільшою.

Розв'язання

Позначимо сторони прямокутника через xі y.

За умовою

$$2x + 2y = 40.$$

Тому

$$x + y = 20,$$

$$y = 20 - x.$$

Площа:

$$S(x) = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Допустимі значення:

$$0 < x < 20.$$

Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 20 - 2x.$$

Прирівняємо її до нуля:

$$20 - 2x = 0,$$

$$x = 10.$$

Тоді

$$y = 20 - 10 = 10.$$

До $x = 10$похідна додатна, після $x = 10$— від'ємна. Отже, в точці $x = 10$площа набуває максимуму.

$$S_{\max} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2.$$

Відповідь: найбільшу площу має квадратний переріз зі сторонами 10 сантиметрів; максимальна площа — 100 квадратних сантиметрів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Периметр прямокутного перерізу будівельного елемента становить 48 сантиметрів. Визначити розміри перерізу, за яких його площа буде найбільшою.

2. Периметр прямокутного конструктивного елемента становить 60 сантиметрів. За допомогою похідної визначити розміри прямокутника максимальної площі.

Приклад 3. Мінімізація витрат матеріалу

У навчальній математичній моделі витрата матеріалу на виготовлення конструктивного елемента залежить від параметра xза законом

$$M(x) = x^2 - 12x + 50,$$

де $x > 0$. Визначити значення параметра x, за якого витрата матеріалу є найменшою.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$M'(x) = 2x - 12.$$

Знайдемо критичну точку:

$$2x - 12 = 0,$$

$$x = 6.$$

При $x < 6$

$$M'(x) < 0,$$

тому функція спадає.

При $x > 6$

$$M'(x) > 0,$$

тому функція зростає.

Отже, при $x = 6$функція має мінімум.

Обчислимо мінімальне значення:

$$M(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 50 = 36 - 72 + 50 = 14.$$

Відповідь: мінімальна витрата матеріалу досягається при $x = 6$і становить 14 умовних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Витрата матеріалу в умовній математичній моделі визначається функцією $M(x) = x^2 - 16x + 75, x > 0$. Знайти значення x, за якого витрата матеріалу буде мінімальною, та обчислити мінімальне значення функції.

2. Витрата матеріалу на умовний конструктивний елемент описується функцією $M(x) = 2x^2 - 24x + 90,\ x > 0$. Визначити оптимальне значення параметра та найменшу витрату матеріалу.

Приклад 4. Максимізація корисної площі

Корисна площа умовного конструктивного елемента залежить від його параметра xза законом

$$S(x) = 24x - 2x^2,\ 0 < x < 12.$$

Визначити значення x, за якого площа є найбільшою.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 24 - 4x.$$

Критична точка:

$$24 - 4x = 0,$$

$$x = 6.$$

При $0 < x < 6$похідна додатна, тому функція зростає.

При $6 < x < 12$похідна від'ємна, тому функція спадає.

Отже,

$$x = 6$$

є точкою максимуму.

Знайдемо найбільшу площу:

$$S(6) = 24 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 144 - 72 = 72.$$

Відповідь: оптимальне значення параметра дорівнює 6 одиницям, максимальна площа — 72 квадратні одиниці.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Площа конструктивного елемента описується функцією $S(x) = 30x - 3x^2$, $0 < x < 10$. Визначити значення x, за якого площа є найбільшою, та знайти максимальну площу.

2. Корисна площа елемента залежить від параметра за законом $S(x) = 40x - 2x^2$, $0 < x < 20$. Знайти оптимальне значення параметра і найбільшу площу.

Приклад 5. Оптимальні розміри прямокутного віконного прорізу

Сума ширини і висоти прямокутного віконного прорізу за умовою навчальної задачі повинна дорівнювати 6 метрам. Визначити ширину та висоту, за яких площа прорізу буде найбільшою.

Розв'язання

Нехай ширина дорівнює x, а висота — y.

За умовою

$$x + y = 6.$$

Тому

$$y = 6 - x.$$

Площа:

$$S = xy,$$

$$S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2.$$

Допустимі значення:

$$0 < x < 6.$$

Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 6 - 2x.$$

Критична точка:

$$6 - 2x = 0,$$

$$x = 3.$$

Тоді

$$y = 6 - 3 = 3.$$

Максимальна площа:

$$S_{\max} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ м}^2.$$

Відповідь: у межах цієї навчальної математичної моделі найбільша площа досягається при ширині 3 метри та висоті 3 метри; площа становить 9 квадратних метрів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Сума ширини і висоти прямокутного прорізу становить 8 метрів. За допомогою похідної визначити розміри, за яких площа буде максимальною.

2. Сума двох розмірів прямокутного елемента становить 10 метрів. Визначити розміри, що забезпечують найбільшу площу.

Приклад 6. Максимальний об'єм прямокутного елемента

Об'єм прямокутного конструктивного елемента з постійною довжиною 5 метрів залежить від ширини x. Сума ширини xі висоти hйого поперечного перерізу дорівнює 8 метрам. Визначити ширину та висоту, за яких об'єм буде найбільшим.

Розв'язання

За умовою

$$x + h = 8.$$

Звідси

$$h = 8 - x.$$

Площа поперечного перерізу:

$$S = xh = x(8 - x).$$

Об'єм:

$$V = 5S.$$

Отже,

$$V(x) = 5x(8 - x) = 40x - 5x^2.$$

Знайдемо похідну:

$$V'(x) = 40 - 10x.$$

Критична точка:

$$40 - 10x = 0,$$

$$x = 4.$$

Тоді

$$h = 8 - 4 = 4.$$

Обчислимо максимальний об’єм:

$$V_{\max} = 5 \cdot 4 \cdot 4 = 80 \text{ м}^3.$$

Відповідь: ширина і висота поперечного перерізу повинні дорівнювати по 4 метри; максимальний об’єм у заданій математичній моделі становить 80 кубічних метрів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Довжина прямокутного елемента становить 6 метрів, а сума ширини і висоти поперечного перерізу — 10 метрів. Визначити ширину і висоту, за яких об’єм буде найбільшим.

2. Довжина прямокутного елемента становить 8 метрів, а сума двох розмірів поперечного перерізу — 12 метрів. Знайти розміри, за яких об’єм буде максимальним.

Приклад 7. Дослідження функції технічного параметра

Залежність умовного показника ефективності використання матеріалу від параметра xзадано функцією

$$E(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 10.$$

Дослідити функцію на зростання, спадання та екстремуми.

Розв’язання

Знайдемо похідну:

$$E'(x) = -3x^2 + 12x - 9.$$

Винесемо спільний множник:

$$E'(x) = -3(x^2 - 4x + 3).$$

Розкладемо квадратний тричлен:

$$E'(x) = -3(x - 1)(x - 3).$$

Критичні точки:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Дослідимо знак похідної.

На проміжку $(-;\infty 1)$:

$$E'(x) < 0.$$

Функція спадає.

На проміжку $(1; 3)$:

$$E'(x) > 0.$$

Функція зростає.

На проміжку $(3; +\infty)$:

$$E'(x) < 0.$$

Функція спадає.

Отже, при $x = 1$маємо мінімум, а при $x = 3$— максимум.

Обчислимо значення:

$$E(1) = -1 + 6 - 9 + 10 = 6,$$

$$E(3) = -27 + 54 - 27 + 10 = 10.$$

Відповідь: функція спадає на $(-;\infty 1)$і $(3; +\infty)$, зростає на $(1; 3)$; точка мінімуму $(1; 6)$, точка максимуму $(3; 10)$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Умовний показник використання матеріалу задано функцією $E(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$. Визначити критичні точки, проміжки зростання і спадання та екстремуми функції.

2. Технічний показник у навчальній математичній моделі описується функцією $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми.

Завдання для самостійного розв’язування на занятті

Завдання 1. Для огородження трьох сторін прямокутної будівельної ділянки використовується 140 метрів огорожі. Четверта сторона прилягає до існуючої споруди. Скласти функцію площі та визначити розміри ділянки максимальної площі.

Завдання 2. Периметр прямокутного перерізу конструктивного елемента дорівнює 80 сантиметрам. За допомогою похідної визначити розміри перерізу максимальної площі.

Завдання 3. Витрата матеріалу описується навчальною функцією $\boldsymbol{M(x) = 2x^2 - 32x + 150}$, $\boldsymbol{x > 0}$. Визначити значення параметра, за якого витрата є найменшою.

Завдання 4. Корисна площа умовного елемента визначається функцією $\boldsymbol{S(x) = 48x - 3x^2}$, $\boldsymbol{0 < x < 16}$. Знайти найбільше значення площі.

Завдання 5. Об’єм конструктивного елемента постійної довжини 10 метрів визначається прямокутним поперечним перерізом, сума ширини і висоти якого дорівнює 14 метрам. Визначити розміри поперечного перерізу, за яких об’єм буде найбільшим.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне професійно орієнтоване завдання

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**. У кожному варіанті необхідно розв’язати п’ять професійно орієнтованих задач. У кожній задачі необхідно записати математичну модель, визначити допустимі значення змінної, знайти похідну, визначити критичну точку, дослідити характер екстремуму, знайти шукане максимальне або мінімальне значення та сформулювати відповідь відповідно до професійного змісту задачі.

Варіант 1

1. Для огородження трьох сторін прямокутного будівельного майданчика є 80 метрів огорожі. Четверта сторона прилягає до існуючої будівлі. Визначити ширину і довжину майданчика, за яких його площа буде найбільшою, та обчислити максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу конструктивного елемента становить 40 сантиметрів. Визначити розміри перерізу, за яких його площа буде найбільшою.

3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 12x + 50$, $x > 0$. Визначити значення параметра x, за якого витрата матеріалу є найменшою, та обчислити це мінімальне значення.
4. Корисна площа умовного елемента описується функцією $S(x) = 24x - 2x^2$, $0 < x < 12$. Визначити значення параметра, за якого площа буде найбільшою.
5. Об'єм прямокутного елемента довжиною 5 метрів має поперечний переріз, для якого сума ширини і висоти дорівнює 8 метрам. Визначити ширину та висоту, за яких об'єм буде максимальним.

Варіант 2

1. Для огородження трьох сторін прямокутної ділянки є 100 метрів огорожі. Визначити розміри ділянки максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 48 сантиметрів. За допомогою похідної знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 16x + 75$, $x > 0$. Знайти значення параметра, за якого витрата є мінімальною.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 30x - 3x^2$, $0 < x < 10$. Визначити найбільшу площу.
5. Довжина прямокутного елемента становить 6 метрів, а сума ширини та висоти його перерізу — 10 метрів. Визначити розміри перерізу максимального об'єму.

Варіант 3

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика використовується 120 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри і максимальну площу.
2. Периметр прямокутного конструктивного перерізу становить 60 сантиметрів. Визначити його розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу визначається функцією $M(x) = 2x^2 - 24x + 90$, $x > 0$. Знайти мінімальне значення функції.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 40x - 2x^2$, $0 < x < 20$. Знайти максимальне значення площі.

5. Довжина прямокутного елемента становить 8 метрів, а сума ширини і висоти його поперечного перерізу дорівнює 12 метрам. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 4

1. Для трьох сторін прямокутного будівельного майданчика передбачено 90 метрів огорожі. Четверта сторона не огороджується. Визначити розміри майданчика максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу дорівнює 56 сантиметрам. Знайти розміри, що забезпечують максимальну площу.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = x^2 - 20x + 120$, $x > 0$. Знайти параметр мінімальної витрати та її значення.
4. Корисна площа описується функцією $S(x) = 36x - 2x^2$, $0 < x < 18$. Знайти її максимум.
5. Прямокутний елемент має довжину 7 метрів, а сума ширини та висоти перерізу дорівнює 10 метрам. Визначити розміри, що забезпечують максимальний об’єм.

Варіант 5

1. Для огородження трьох сторін ділянки використовується 110 метрів огорожі. Визначити ширину, довжину і максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 64 сантиметри. Визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 28x + 110$, $x > 0$. Визначити її мінімум.
4. Площа умовного елемента задана функцією $S(x) = 42x - 3x^2$, $0 < x < 14$. Знайти максимальну площу.
5. Довжина прямокутного елемента дорівнює 9 метрам, а сума розмірів його поперечного перерізу становить 14 метрів. Визначити розміри, що забезпечують найбільший об’єм.

Варіант 6

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 130 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри та максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 72 сантиметри. Знайти розміри перерізу максимальної площі.

3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 18x + 100$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Корисна площа описується функцією $S(x) = 32x - 2x^2$, $0 < x < 16$. Визначити максимальне значення.
5. Довжина елемента становить 10 метрів, а сума ширини та висоти поперечного перерізу — 12 метрів. Знайти розміри максимального об'єму.

Варіант 7

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки використовується 140 метрів огорожі. Визначити розміри ділянки максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 80 сантиметрів. Визначити його оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = 2x^2 - 32x + 150$, $x > 0$. Визначити параметр мінімальної витрати.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 48x - 3x^2$, $0 < x < 16$. Визначити максимальну площу.
5. Довжина конструктивного елемента становить 10 метрів, а сума ширини і висоти перерізу — 14 метрів. Визначити максимальний об'єм та відповідні розміри.

Варіант 8

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 150 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 88 сантиметрів. Визначити розміри максимальної площі.
3. Функція витрати матеріалу має вигляд $M(x) = x^2 - 22x + 130$, $x > 0$. Знайти мінімум.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 50x - 2x^2$, $0 < x < 25$. Визначити її максимальне значення.
5. Довжина прямокутного елемента становить 12 метрів, а сума ширини та висоти його перерізу дорівнює 16 метрам. Визначити розміри, що забезпечують максимальний об'єм.

Варіант 9

1. Для огородження трьох сторін прямокутної ділянки передбачено 160 метрів огорожі. Визначити розміри максимальної площі.

2. Периметр прямокутного перерізу дорівнює 96 сантиметрам. Визначити оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = 2x^2 - 36x + 180$, $x > 0$. Визначити її мінімальне значення.
4. Корисна площа описується функцією $S(x) = 54x - 3x^2$, $0 < x < 18$. Знайти максимум.
5. Довжина елемента дорівнює 8 метрам, а сума ширини та висоти перерізу — 18 метрів. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 10

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 180 метрів огорожі. Визначити його оптимальні розміри та максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 100 сантиметрів. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 24x + 160$, $x > 0$. Визначити її мінімум.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 60x - 3x^2$, $0 < x < 20$. Знайти максимальне значення.
5. Довжина прямокутного елемента становить 15 метрів, а сума ширини та висоти його перерізу дорівнює 20 метрам. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 11

1. Для огородження трьох сторін будівельної ділянки виділено 70 метрів огорожі. Визначити розміри ділянки максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 44 сантиметри. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу визначається функцією $M(x) = x^2 - 10x + 40$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 20x - x^2$, $0 < x < 20$. Знайти максимальну площу.
5. Довжина елемента становить 4 метри, а сума ширини і висоти перерізу дорівнює 6 метрам. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 12

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика використовується 200 метрів огорожі. Знайти оптимальні розміри.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 120 сантиметрів. Визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 40x + 230$, $x > 0$. Визначити мінімальне значення.
4. Корисна площа описується функцією $S(x) = 64x - 2x^2$, $0 < x < 32$. Знайти максимум.
5. Довжина конструктивного елемента дорівнює 20 метрам, а сума ширини та висоти його перерізу — 24 метри. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 13

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки передбачено 84 метри огорожі. Четверта сторона прилягає до споруди. Визначити оптимальні розміри ділянки.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 52 сантиметри. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 14x + 60$, $x > 0$. Знайти мінімум.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 28x - 2x^2$, $0 < x < 14$. Визначити максимум.
5. Довжина елемента становить 6 метрів, а сума ширини і висоти його перерізу дорівнює 8 метрам. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 14

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 96 метрів огорожі. Визначити розміри максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 68 сантиметрів. Визначити оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 20x + 70$, $x > 0$. Визначити її мінімум.
4. Площа елемента задана функцією $S(x) = 36x - 3x^2$, $0 < x < 12$. Знайти максимум.

5. Довжина прямокутного елемента становить 7 метрів, а сума ширини та висоти перерізу дорівнює 12 метрам. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 15

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки використовується 108 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри та площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 76 сантиметрів. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 26x + 190$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 44x - 2x^2$, $0 < x < 22$. Знайти максимум.
5. Довжина елемента становить 9 метрів, а сума ширини і висоти поперечного перерізу — 16 метрів. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 16

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 124 метри огорожі. Визначити розміри, що забезпечують максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 84 сантиметри. Визначити його оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = 2x^2 - 44x + 260$, $x > 0$. Знайти мінімальне значення.
4. Корисна площа визначається функцією $S(x) = 52x - 2x^2$, $0 < x < 26$. Знайти максимум.
5. Довжина конструктивного елемента дорівнює 11 метрам, а сума ширини і висоти перерізу — 18 метрів. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 17

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки передбачено 136 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 92 сантиметри. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 28x + 210$, $x > 0$. Знайти мінімум.

4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 56x - 2x^2$, $0 < x < 28$. Визначити максимум.
5. Довжина елемента становить 12 метрів, а сума ширини і висоти перерізу дорівнює 20 метрам. Визначити розміри максимального об'єму.

Варіант 18

1. Для огородження трьох сторін будівельного майданчика використовується 144 метри огорожі. Знайти розміри максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 104 сантиметри. Визначити оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 48x + 310$, $x > 0$. Знайти мінімум.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 60x - 2x^2$, $0 < x < 30$. Знайти максимум.
5. Довжина прямокутного елемента дорівнює 14 метрам, а сума ширини і висоти перерізу становить 22 метри. Визначити максимальний об'єм.

Варіант 19

1. Для трьох сторін прямокутного майданчика є 156 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри та максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 112 сантиметрів. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 30x + 250$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Корисна площа задана функцією $S(x) = 66x - 3x^2$, $0 < x < 22$. Знайти її максимальне значення.
5. Довжина конструктивного елемента становить 16 метрів, а сума ширини та висоти перерізу дорівнює 24 метрам. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 20

1. Для огородження трьох сторін прямокутної ділянки передбачено 168 метрів огорожі. Визначити розміри максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу дорівнює 116 сантиметрам. Визначити оптимальні розміри.

3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 52x + 360$, $x > 0$. Знайти мінімальне значення.
4. Площа елемента задана функцією $S(x) = 72x - 3x^2$, $0 < x < 24$. Визначити максимум.
5. Довжина елемента становить 18 метрів, а сума ширини і висоти перерізу дорівнює 26 метрам. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 21

1. Для огородження трьох сторін прямокутного будівельного майданчика є 76 метрів огорожі. Визначити ширину та довжину, що забезпечують максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 36 сантиметрів. Визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 8x + 25$, $x > 0$. Знайти її мінімум.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 18x - x^2$, $0 < x < 18$. Знайти максимальне значення.
5. Довжина елемента становить 5 метрів, а сума ширини і висоти перерізу дорівнює 10 метрам. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 22

1. Для трьох сторін прямокутної будівельної ділянки передбачено 88 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 44 сантиметри. Визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 16x + 45$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Корисна площа задана функцією $S(x) = 26x - x^2$, $0 < x < 26$. Знайти максимум.
5. Довжина прямокутного елемента становить 6 метрів, а сума ширини та висоти перерізу дорівнює 14 метрам. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 23

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика є 104 метри огорожі. Визначити розміри максимальної площі та її значення.

2. Периметр прямокутного перерізу становить 52 сантиметри. Визначити оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 18x + 95$, $x > 0$. Визначити мінімальну витрату.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 34x - x^2$, $0 < x < 34$. Знайти максимальне значення.
5. Довжина елемента дорівнює 8 метрам, а сума ширини і висоти його перерізу становить 16 метрів. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 24

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки використовується 116 метрів огорожі. Визначити ширину, довжину та максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу дорівнює 60 сантиметрам. Знайти розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = 2x^2 - 28x + 105$, $x > 0$. Знайти мінімум.
4. Площа елемента описується функцією $S(x) = 42x - x^2$, $0 < x < 42$. Визначити максимум.
5. Довжина прямокутного елемента становить 10 метрів, а сума ширини та висоти перерізу — 18 метрів. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 25

1. Для огородження трьох сторін будівельного майданчика є 128 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри і максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 68 сантиметрів. Визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 20x + 115$, $x > 0$. Знайти мінімум.
4. Корисна площа описується функцією $S(x) = 46x - x^2$, $0 < x < 46$. Визначити максимальне значення.
5. Довжина конструктивного елемента становить 12 метрів, а сума ширини і висоти перерізу дорівнює 20 метрам. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 26

1. Для трьох сторін прямокутної ділянки передбачено 148 метрів огорожі. Визначити розміри максимальної площі.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 76 сантиметрів. Знайти його оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу задана функцією $M(x) = 2x^2 - 36x + 175$, $x > 0$. Визначити мінімум.
4. Площа елемента визначається функцією $S(x) = 54x - x^2$, $0 < x < 54$. Знайти максимальну площу.
5. Довжина прямокутного елемента становить 14 метрів, а сума ширини та висоти перерізу — 22 метри. Визначити максимальний об’єм.

Варіант 27

1. Для огородження трьох сторін прямокутного майданчика використовується 172 метри огорожі. Визначити ширину та довжину, за яких площа буде найбільшою.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 84 сантиметри. Визначити оптимальні розміри.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = x^2 - 24x + 155$, $x > 0$. Визначити мінімальне значення.
4. Площа елемента задана функцією $S(x) = 58x - x^2$, $0 < x < 58$. Знайти максимум.
5. Довжина конструктивного елемента становить 16 метрів, а сума ширини та висоти перерізу дорівнює 24 метрам. Визначити розміри максимального об’єму.

Варіант 28

1. Для трьох сторін прямокутної будівельної ділянки передбачено 184 метри огорожі. Четверта сторона прилягає до будівлі. Визначити оптимальні розміри та максимальну площу.
2. Периметр прямокутного перерізу становить 92 сантиметри. За допомогою похідної визначити розміри максимальної площі.
3. Витрата матеріалу описується функцією $M(x) = 2x^2 - 44x + 255$, $x > 0$. Визначити значення параметра мінімальної витрати та саме мінімальне значення.

4. Корисна площа умовного елемента описується функцією $S(x) = 62x - x^2$, $0 < x < 62$. Знайти параметр, за якого площа максимальна, та її найбільше значення.

5. Довжина прямокутного конструктивного елемента становить 18 метрів, а сума ширини і висоти його поперечного перерізу дорівнює 26 метрам. Визначити ширину і висоту, за яких об’єм буде максимальним.

Варіант 29

1. Для огородження трьох сторін прямокутного будівельного майданчика є 192 метри огорожі, а четверта сторона прилягає до існуючої споруди. Скласти функцію площі, визначити допустимі значення змінної, знайти оптимальні розміри майданчика та його максимальну площу.

2. Периметр прямокутного конструктивного перерізу становить 108 сантиметрів. Скласти функцію площі через одну змінну та за допомогою похідної визначити розміри перерізу, за яких його площа буде максимальною.

3. Витрата матеріалу на умовний конструктивний елемент описується функцією $M(x) = x^2 - 32x + 280$, $x > 0$. Знайти похідну, критичну точку, визначити характер екстремуму та обчислити мінімальну витрату матеріалу.

4. Корисна площа елемента описується функцією $S(x) = 68x - 2x^2$, $0 < x < 34$. Дослідити функцію на зростання і спадання та визначити найбільше значення площі.

5. Довжина прямокутного конструктивного елемента становить 20 метрів, а сума ширини і висоти його поперечного перерізу дорівнює 28 метрам. Скласти функцію об’єму та визначити розміри перерізу, за яких об’єм буде максимальним.

Варіант 30

1. Для огородження трьох сторін прямокутної будівельної ділянки виділено 200 метрів огорожі. Четверта сторона ділянки прилягає до існуючої будівлі та не потребує огородження. Позначити ширину ділянки через x, виразити її довжину через x, скласти функцію площі, визначити допустимі значення змінної, знайти критичну точку та визначити розміри ділянки, за яких площа буде максимальною. Обчислити максимальну площу.

2. Периметр прямокутного перерізу конструктивного елемента становить 120 сантиметрів. Позначити одну сторону через x, виразити другу сторону через x, скласти функцію площі перерізу, дослідити її за допомогою першої похідної та визначити розміри перерізу максимальної площі.

3. Витрата матеріалу на виготовлення умовного конструктивного елемента описується функцією $M(x) = 2x^2 - 48x + 320$, $x > 0$. Знайти похідну функції, визначити критичну точку, установити проміжки спадання і зростання та знайти значення параметра x, за якого витрата матеріалу буде найменшою. Обчислити мінімальне значення функції.

4. Корисна площа умовного будівельного елемента залежить від параметра xза законом $S(x) = 72x - 2x^2$, $0 < x < 36$. Знайти похідну, критичну точку, визначити проміжки зростання і спадання функції та знайти параметр, за якого площа буде максимальною. Обчислити максимальну площу.

5. Прямокутний конструктивний елемент має постійну довжину 24 метри. Сума ширини xі висоти hйого поперечного перерізу дорівнює 30 метрам. Виразити висоту через ширину, скласти функцію об'єму $V(x)$, визначити допустимі значення x, знайти похідну та критичну точку, а потім визначити ширину і висоту перерізу, за яких об'єм елемента буде найбільшим. Обчислити максимальний об'єм.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Зміст уміння, яке оцінюється**	**Максимальна кількість балів**
1	Побудова математичної моделі та визначення максимальної площі будівельної ділянки	**1,00**
2	Застосування похідної для оптимізації геометричних параметрів конструктивного перерізу	**1,00**
3	Знаходження мінімального значення функції витрати матеріалу	**1,00**

Завдання	Зміст уміння, яке оцінюється	Максимальна кількість балів
4	Дослідження функції професійного параметра та знаходження максимуму	**1,00**
5	Побудова й дослідження функції об’єму конструктивного елемента	**1,00**
Разом		**5,00 балів**

Деталізація оцінювання кожного завдання

За кожне правильно виконане завдання здобувач освіти може отримати **1 бал**:

- правильне складання математичної моделі або запис заданої функції — **0,20 бала**;
- правильне знаходження похідної — **0,20 бала**;
- правильне визначення критичної точки — **0,20 бала**;
- правильне встановлення характеру екстремуму та виконання необхідних обчислень — **0,20 бала**;
- правильна відповідь із поясненням професійного змісту та одиницями вимірювання — **0,20 бала**.

Типові помилки

Під час виконання професійно орієнтованих задач найчастіше виникають помилки не лише під час диференціювання, а вже на етапі складання математичної моделі. Необхідно правильно вибрати незалежну змінну, виразити через неї інші параметри та лише після цього складати функцію площі, об’єму або іншої досліджуваної величини.

Необхідно обов’язково враховувати **область допустимих значень**. Наприклад, ширина, довжина, висота, площа або об’єм реального геометричного об’єкта не можуть бути від’ємними.

Не кожна точка, у якій похідна дорівнює нулю, автоматично є точкою максимуму або мінімуму. Характер критичної точки необхідно обґрунтувати за зміною знака першої похідної або іншим вивченим способом.

Особливу увагу потрібно приділяти формулюванню відповіді. У професійно орієнтованій задачі недостатньо записати, наприклад, $x = 20$. Необхідно

пояснити, **який саме геометричний або технічний параметр дорівнює 20, у яких одиницях він вимірюється та яке оптимальне значення досліджуваної величини отримано**.

Підведення підсумків

Практичне заняття № 14 безпосередньо відповідає змісту робочої програми: передбачено дослідження функції за допомогою похідної, визначення області визначення, критичних точок, проміжків зростання і спадання, максимумів і мінімумів та застосування отриманих результатів у прикладних задачах.

Для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** професійну складову реалізовано через навчальні задачі на визначення оптимальних розмірів будівельних майданчиків, площ прямокутних перерізів, геометричних параметрів конструктивних елементів, мінімізацію умовної витрати матеріалу та максимізацію об’єму.

При цьому функції витрати матеріалу та інші технічні залежності, спеціально задані в умовах задач, потрібно трактувати як **навчальні математичні моделі**, а не як нормативні формули для проєктування будівельних конструкцій.

Питання для підготовки

1. Що називають критичною точкою функції?
2. Як знайти критичні точки функції?
3. За якої умови функція зростає?
4. За якої умови функція спадає?
5. Як за першою похідною визначити точку максимуму?
6. Як за першою похідною визначити точку мінімуму?
7. Чому необхідно визначати область допустимих значень змінної?
8. Що називають функцією мети у прикладній оптимізаційній задачі?
9. Якою є послідовність розв’язування задачі на найбільше або найменше значення?
10. Як скласти функцію площі прямокутника, якщо між його сторонами існує задана залежність?
11. Як скласти функцію об’єму через одну змінну?
12. Як перевірити, що знайдена критична точка відповідає максимуму?

13. Як перевірити, що знайдена критична точка відповідає мінімуму?
14. Який професійний зміст може мати максимум функції в задачах будівництва?
15. Який професійний зміст може мати мінімум функції в задачах будівництва?

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 15

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 3

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема: Рішення завдань за модулем 3

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 5 балів

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань і практичних умінь з диференціального числення функції однієї змінної; сформованість умінь обчислювати границі функцій, знаходити похідні та диференціали, визначати проміжки зростання і спадання функцій, знаходити критичні точки та точки екстремуму, виконувати дослідження функцій.

Перевірити здатність використовувати похідну як математичний інструмент для розв’язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія», зокрема задач оптимізації геометричних розмірів будівельних елементів, площі, об’єму, витрат матеріалів та інших параметрів.

Робочою програмою для практичного заняття № 15 передбачено комплексний варіант, що охоплює **обчислення границь, знаходження похідних, обчислення диференціала, визначення проміжків монотонності, знаходження екстремумів, дослідження функції та прикладну задачу на максимум або мінімум**.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань.
6. Перевірка та оцінювання виконаних робіт.
7. Аналіз типових помилок.
8. Підведення підсумків змістового модуля 3.

Структура індивідуального варіанта

Кожний із 30 варіантів містить сім завдань відповідно до робочої програми:

1. обчислення границі;
2. знаходження похідної;
3. обчислення диференціала;
4. визначення проміжків монотонності;
5. знаходження екстремумів;
6. дослідження функції;
7. професійно орієнтована задача на максимум або мінімум для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Обчислення границі.
Обчислити границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Завдання 2. Знаходження похідної.
Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

Завдання 3. Обчислення диференціала.
Для функції

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x$$

знайти диференціал dy.

Завдання 4. Проміжки монотонності.
Визначити проміжки зростання і спадання функції

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Завдання 5. Екстремуми функції.
Знайти точки максимуму та мінімуму функції

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Завдання 6. Дослідження функції.
Дослідити функцію

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

за допомогою похідної: визначити область визначення, критичні точки, проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та побудувати ескіз графіка.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.
Для прямокутної ділянки під будівельний майданчик необхідно влаштувати огорожу довжиною 80 метрів. Нехай довжина ділянки дорівнює xметрів. Визначити залежність площі ділянки від xта за допомогою похідної знайти такі розміри прямокутника, за яких його площа буде максимальною.

Варіант 2

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 2x^5 - 4x^3 + 6x - 1.$$

Завдання 3. Для

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

знайти диференціал.

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 - 8x + 7.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

Завдання 6. Дослідити за допомогою похідної

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4.$$

Завдання 7. Прямокутна будівельна ділянка має периметр 100 метрів. Позначивши одну сторону через $\boldsymbol{x}$, скласти функцію площі та визначити за допомогою похідної розміри ділянки, за яких площа буде максимальною.

Варіант 3

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 4x^3 - 7x^2 + 3x + 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал функції

$$y = x^4 - 2x^2 + 3x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 10x + 16.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 12x + 5.$$

Завдання 7. Для прямокутного майданчика під складську споруду передбачено 120 метрів огорожі. Визначити розміри майданчика, за яких його площа буде максимальною.

Варіант 4

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 9.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 3x^3 - 5x + 2.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання і спадання

$$y = x^2 - 12x + 20.$$

Завдання 5. Знайти точки екстремуму

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 3.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x.$$

Завдання 7. Необхідно спроєктувати прямокутний відкритий майданчик, на огородження якого виділено 140 метрів матеріалу. За допомогою похідної визначити довжину і ширину майданчика, за яких його площа буде найбільшою.

Варіант 5

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 6x^3 - 4x^2 + 7x - 5.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 2x^4 - 3x^2 + x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 - 14x + 30.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 12x + 1.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 6x^2 + 5$$

за допомогою похідної.

Завдання 7. Периметр прямокутної ділянки для розміщення будівельного складу становить 160 метрів. Визначити за допомогою похідної розміри ділянки, що забезпечують максимальну площу.

Варіант 6

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 3x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 2.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 4x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 4x - 5.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x.$$

Завдання 7. Прямокутний майданчик для тимчасового складу будівельних матеріалів має периметр 180 метрів. Скласти функцію його площі та визначити розміри, за яких площа максимальна.

Варіант 7

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 7x^4 - 2x^3 + 5x - 6.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = x^5 - 3x^3 + 2x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання і спадання

$$y = x^2 + 6x - 7.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1.$$

Завдання 6. Виконати дослідження

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

Завдання 7. Для прямокутної зони складування на будівельному майданчику передбачено 200 метрів огорожі. Визначити розміри зони, що забезпечують найбільшу площу.

Варіант 8

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 5x^3 - 4x^2 + 2x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 + 8x + 3.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

Завдання 7. Периметр прямокутної ділянки для розміщення тимчасової будівлі становить 220 метрів. Знайти її оптимальні розміри за критерієм максимальної площі.

Варіант 9

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 4x^5 - 6x^2 + 3x - 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 16x + 12.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 6x^2 - 27x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 12x^2 + 27x.$$

Завдання 7. Для огородження прямокутної виробничої зони на будівельному майданчику є 240 метрів матеріалу. Визначити розміри зони максимальної площі.

Варіант 10

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 8x + 4.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 2x^5 - x^3 + 4x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 + 10x - 4.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 3x^2 - 24x.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x.$$

Завдання 7. Прямокутна ділянка для складування будівельних конструкцій повинна мати огорожу загальною довжиною 260 метрів. Визначити розміри ділянки максимальної площі.

Варіант 11

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-24}{x-4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 9.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = x^4 + 3x^2 - 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 18x + 20.$$

Завдання 5. Знайти точки екстремуму

$$y = x^3 - 15x^2 + 48x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 3x^2 - 24x.$$

Завдання 7. Для прямокутного майданчика під тимчасові споруди використовується 280 метрів огорожі. За допомогою похідної визначити довжину і ширину, що забезпечують максимальну площу.

Варіант 12

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+x-30}{x-5}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x + 2.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 4x^4 - 5x^2 + 3x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання і спадання

$$y = x^2 + 12x + 8.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 4.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x.$$

Завдання 7. Прямокутний майданчик для зберігання будівельних матеріалів має периметр 300 метрів. Визначити його оптимальні розміри за критерієм максимальної площі.

Варіант 13

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 8x^3 - 3x^2 + 5x - 7.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 3x^5 - 2x^3 + x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 20x + 25.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 3x^2 - 15x.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 + 6x^2 - 15x.$$

Завдання 7. Для прямокутної ділянки під відкритий склад передбачено 320 метрів огорожі. Скласти функцію площі та визначити її максимальне значення і відповідні розміри ділянки.

Варіант 14

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 5x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 1.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 2x^4 + 5x^3 - 4x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 + 14x + 9.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 6x^2 - 9x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 3x^2 - 15x.$$

Завдання 7. Для прямокутної зони зберігання залізобетонних виробів використовується 340 метрів огорожі. Визначити розміри зони, за яких її площа найбільша.

Варіант 15

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 7x^4 + 2x^3 - 6x + 5.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = x^5 + 4x^3 - 3x^2.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 22x + 30.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 12x^2 + 27x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 9x^2 + 15x.$$

Завдання 7. Будівельний майданчик прямокутної форми має бути огороджений парканом довжиною 360 метрів. За допомогою похідної визначити розміри майданчика максимальної площі.

Варіант 16

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+6x-40}{x-4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 7.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 5x^4 - 3x^3 + 2x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 + 16x + 10.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 6x^2 - 36x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 15x^2 + 48x.$$

Завдання 7. Для прямокутного майданчика під будівельне обладнання передбачено 380 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри майданчика за критерієм максимальної площі.

Варіант 17

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+7x-60}{x-5}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 9x^3 - 5x^2 + 4x - 2.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 2x^5 + 3x^2 - 6x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 - 24x + 35.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 3x^2 - 35x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 9x^2 - 21x.$$

Завдання 7. Периметр прямокутної ділянки для розміщення будівельної техніки становить 400 метрів. Знайти за допомогою похідної розміри, що забезпечують найбільшу площу.

Варіант 18

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 12}{x - 2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 6x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 4x^5 - x^4 + 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 + 18x + 12.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 15x^2 + 36x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 12x^2 + 27x.$$

Завдання 7. Для огородження прямокутної зони монтажних робіт є 420 метрів огорожі. Визначити довжину та ширину зони, за яких її площа буде максимальною.

Варіант 19

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 9}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 4.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 7x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання і спадання

$$y = x^2 - 26x + 40.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 6x^2 - 27x.$$

Завдання 7. Прямокутна зона складування конструкцій має периметр 440 метрів. За допомогою похідної визначити її оптимальні розміри та максимальну площу.

Варіант 20

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 8x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 + 20x + 15.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 6x^2 - 27x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Завдання 7. Для прямокутної технологічної зони будівельного майданчика передбачено 460 метрів огорожі. Визначити розміри зони максимальної площі.

Варіант 21

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3}{x-1}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 10x^3 - 6x^2 + 2x - 9.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 6x^4 - 3x^2 + 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 28x + 45.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 9x^2 - 24x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 3x^2 - 35x.$$

Завдання 7. На огородження прямокутного майданчика для будівельних матеріалів передбачено 480 метрів огорожі. Знайти розміри, за яких площа майданчика буде максимальною.

Варіант 22

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-20}{x-2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 7x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 6.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 2x^4 + 6x^3 - x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 + 22x + 18.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 12x^2 - 45x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 15x^2 + 36x.$$

Завдання 7. Прямокутна ділянка під тимчасовий будівельний комплекс має периметр 500 метрів. Скласти функцію її площі та знайти максимальну площу й відповідні розміри.

Варіант 23

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 4x^2 - 63}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 9x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 4x^5 + 2x^3 - 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 30x + 50.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 9x^2 - 48x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 15x^2 + 36x.$$

Завдання 7. Для прямокутної ділянки під склад будівельних конструкцій передбачено 520 метрів огорожі. Визначити за допомогою похідної оптимальні розміри ділянки.

Варіант 24

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 + 5x^2 - 144}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 6x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 2.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 3x^5 + 5x^2 - 4x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 + 24x + 20.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 18x^2 + 45x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 18x^2 + 45x.$$

Завдання 7. Периметр прямокутного майданчика для розміщення будівельного обладнання становить 540 метрів. Визначити його розміри, за яких площа буде максимальною.

Варіант 25

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 + 6x^2 - 275}{x - 5}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 11x^3 - 4x^2 + 7x - 3.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 5x^4 + 3x^3 - 2x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 - 32x + 55.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 12x^2 - 63x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 9x^2 - 48x.$$

Завдання 7. Для прямокутної ділянки під склад сипучих будівельних матеріалів є 560 метрів огорожі. Визначити оптимальні розміри ділянки за критерієм максимальної площі.

Варіант 26

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x-1}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 8x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 4.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 7x^3 - 4x^2 + 6x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 + 26x + 24.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 21x^2 + 108x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 9x^2 - 24x.$$

Завдання 7. На огородження прямокутного майданчика під будівельні механізми використовується 580 метрів матеріалу. За допомогою похідної визначити розміри майданчика максимальної площі.

Варіант 27

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2+2x-32}{x-2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 12x^3 + 3x^2 - 5x + 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 4x^4 + 7x^3 - 3x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність

$$y = x^2 - 34x + 60.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 15x^2 - 72x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 12x^2 - 63x.$$

Завдання 7. Прямокутна зона зберігання будівельних виробів має периметр 600 метрів. Визначити її довжину, ширину та максимальну площу.

Варіант 28

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 90}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 9x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 5.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 6x^4 - 2x^3 + 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності

$$y = x^2 + 28x + 30.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 - 24x^2 + 135x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 21x^2 + 108x.$$

Завдання 7. Для огородження прямокутної зони під будівельні матеріали виділено 620 метрів огорожі. Визначити розміри, за яких площа цієї зони буде найбільшою.

Варіант 29

Завдання 1. Обчислити

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^3 + 7x^2 + 4x - 192}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну

$$y = 10x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 6x.$$

Завдання 3. Знайти диференціал

$$y = 5x^5 + 2x^4 - 3x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання та спадання

$$y = x^2 - 36x + 70.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми

$$y = x^3 + 18x^2 - 99x.$$

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 + 15x^2 - 72x.$$

Завдання 7. Прямокутний будівельний майданчик має бути огороджений огорожею загальною довжиною 640 метрів. Скласти функцію площі та за допомогою похідної знайти оптимальні розміри і максимальну площу майданчика.

Варіант 30

Завдання 1. Обчислення границі.
Обчислити границю

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 + 8x^2 + 5x - 350}{x - 5}.$$

Завдання 2. Знаходження похідної.
Знайти похідну функції

$$y = 12x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 4.$$

Завдання 3. Обчислення диференціала.
Для функції

$$y = 6x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 2x$$

знайти похідну та записати її диференціал.

Завдання 4. Проміжки монотонності.
Для функції

$$y = x^2 + 30x + 40$$

знайти похідну, критичну точку та визначити проміжки зростання і спадання.

Завдання 5. Екстремуми функції.
Для функції

$$y = x^3 - 27x^2 + 180x$$

визначити критичні точки, установити характер кожної критичної точки та знайти значення функції в точках максимуму і мінімуму.

Завдання 6. Дослідження функції.

Дослідити функцію

$$y = x^3 - 24x^2 + 135x.$$

Необхідно визначити область визначення; знайти похідну; визначити критичні точки; установити проміжки зростання та спадання; знайти точки максимуму і мінімуму; визначити значення функції у точках екстремуму та побудувати ескіз графіка.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Для організації будівельного майданчика необхідно огородити прямокутну ділянку. Загальна довжина огорожі становить **660 метрів**.

Нехай одна сторона прямокутної ділянки дорівнює xметрів.

Необхідно:

1. виразити другу сторону прямокутника через x;
2. скласти функцію площі $S(x)$;
3. визначити область допустимих значень x;
4. знайти похідну $S'(x)$;
5. визначити критичну точку;
6. установити, чи відповідає вона максимуму площі;
7. визначити оптимальні довжину та ширину ділянки;
8. обчислити максимальну площу;
9. пояснити практичний зміст отриманого результату для організації будівельного майданчика.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ

Під час обчислення границі необхідно визначити характер невизначеності, виконати необхідні алгебраїчні перетворення та лише після цього здійснювати граничний перехід.

Під час знаходження похідної необхідно правильно застосовувати правила диференціювання. Для диференціала функції використовується співвідношення

$$dy = y'(x)\,dx.$$

Під час дослідження функції на монотонність необхідно знайти похідну, визначити критичні точки, розбити область визначення на відповідні проміжки та встановити знак похідної на кожному проміжку.

Для знаходження екстремумів недостатньо лише розв’язати рівняння $y' = 0$. Необхідно встановити зміну знака похідної поблизу критичної точки або використати інший вивчений критерій екстремуму.

У професійно орієнтованій задачі необхідно скласти математичну модель, визначити область допустимих значень змінної, знайти похідну цільової функції, визначити критичну точку та обґрунтувати, що отримане значення відповідає максимуму або мінімуму.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 3

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Зміст**	**Максимальна кількість балів**
1	Обчислення границі	0,50
2	Знаходження похідної	0,50
3	Обчислення диференціала	0,50
4	Визначення проміжків монотонності	0,75
5	Знаходження екстремумів	0,75
6	Дослідження функції	0,75
7	Професійно орієнтована задача на максимум або мінімум	1,25
Разом		**5,00**

4,50–5,00 бала — здобувач освіти правильно виконав усі або майже всі завдання, обґрунтовано застосував правила диференціювання та методи дослідження функції, правильно розв’язав професійно орієнтовану задачу й пояснив практичний зміст отриманого результату.

3,50–4,49 бала — основні методи засвоєно правильно, але допущено окремі обчислювальні або алгебраїчні помилки, які не змінюють загального правильного алгоритму розв’язування.

2,50–3,49 бала — здобувач освіти володіє основними поняттями диференціального числення, але допускає суттєві помилки під час дослідження монотонності, знаходження екстремумів або розв'язування прикладної задачі.

1,50–2,49 бала — правильно виконано лише частину завдань; алгоритми застосовано непослідовно; професійно орієнтовану задачу розв'язано частково.

0–1,49 бала — більшість завдань не виконано або виконано неправильно; основні методи змістового модуля не засвоєно на достатньому рівні.

ТИПОВІ ПОМИЛКИ

Під час виконання завдань на границі типовими помилками є безпосередня підстановка при отриманні невизначеності, неправильне розкладання многочлена на множники та несвоєчасне скорочення дробу.

Під час диференціювання необхідно контролювати показники степенів, числові коефіцієнти та знаки. Під час запису диференціала не слід ототожнювати похідну y'і диференціал dy.

Під час дослідження монотонності критичні точки необхідно розглядати разом із областю визначення функції. Знак похідної має визначатися на кожному проміжку окремо.

У задачах на екстремум поширеною помилкою є твердження, що будь-яка точка, у якій $y' = 0$, автоматично є точкою максимуму або мінімуму. Характер критичної точки необхідно обґрунтувати.

У професійно орієнтованих задачах важливо правильно скласти цільову функцію та врахувати фізичні й геометричні обмеження. Наприклад, довжина або ширина будівельної ділянки не може мати від'ємного значення.

ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ

Модульний контроль № 3 завершує змістовий модуль «**Диференціальне числення функції однієї змінної»**. У робочій програмі передбачено вивчення границі функції, похідної, диференціала, проміжків монотонності та опуклості, точок екстремуму і перегину, загальної схеми дослідження функції та застосування похідної у прикладних задачах.

Особливо важливо, що структура контрольної роботи не сформована довільно: робоча програма прямо передбачає для практичного заняття № 15 комплексне завдання із **семи складових — границя, похідна, диференціал, монотонність, екстремуми, дослідження функції та прикладна задача на максимум або мінімум**.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Оскільки практичне заняття № 15 є модульним контролем, окреме домашнє завдання, яке додатково оцінюється в балах, не встановлюється.

Після перевірки модульної роботи здобувачам освіти необхідно проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні теми та повторно розв’язати завдання, у яких були допущені помилки, з повним записом алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 16

Тема: Обчислення невизначених інтегралів

Мета

Закріпити теоретичні знання про первісну та невизначений інтеграл; сформувати практичні вміння знаходити невизначені інтеграли за допомогою таблиці основних інтегралів і властивостей невизначеного інтеграла; навчитися застосовувати безпосереднє інтегрування, попередні алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами; удосконалити навички перевірки результату інтегрування за допомогою диференціювання; формувати вміння правильно й послідовно оформлювати розв'язання.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 16 входить до змістового модуля 4 «Інтегральне числення функції однієї змінної» і має тему **«Обчислення невизначених інтегралів»**. Воно спирається на самостійну роботу «Первісна та невизначений інтеграл» і лекцію «Основні методи інтегрування».

Оснащення: опорні конспекти, конспект лекції з теми «Основні методи інтегрування», таблиця основних невизначених інтегралів, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування)

1. Що називається первісною функції?
2. Яка функція називається первісною для функції $f(x)$на заданому проміжку?
3. Скільки первісних може мати одна функція?
4. Чим відрізняються дві первісні однієї і тієї самої функції?
5. Що називається невизначеним інтегралом?
6. Як позначається невизначений інтеграл?
7. Що називається підінтегральною функцією?
8. Що називається підінтегральним виразом?
9. Що означає символ dx?

10. Що означає стала C у записі невизначеного інтеграла?
11. Чому під час знаходження невизначеного інтеграла необхідно записувати довільну сталу?
12. Який зв'язок існує між операціями диференціювання та інтегрування?
13. Як можна перевірити правильність знаходження невизначеного інтеграла?
14. Сформулюйте властивість інтегрування суми функцій.
15. Сформулюйте властивість інтегрування різниці функцій.
16. Чи можна сталий множник винести за знак інтеграла?
17. Чому дорівнює $\int x^n \ dx$?
18. За якої умови застосовується формула інтегрування степеневої функції?
19. Чому випадок $n = -1$ розглядається окремо?
20. Чому дорівнює $\int \frac{dx}{x}$?
21. Чому дорівнює $\int e^x \ dx$?
22. Чому дорівнює $\int \sin x \ dx$?
23. Чому дорівнює $\int \cos x \ dx$?
24. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
25. У чому полягає метод заміни змінної?
26. У яких випадках доцільно застосовувати заміну змінної?
27. У чому полягає метод інтегрування частинами?
28. Якою формулою виражається інтегрування частинами?
29. Як правильно вибрати u та dv під час інтегрування частинами?
30. Якої послідовності дій доцільно дотримуватися під час обчислення невизначеного інтеграла?

Короткі теоретичні відомості

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для кожного x цього проміжку виконується:

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо $F(x)$є однією з первісних функції $f(x)$, то множина всіх її первісних має вигляд:

$$F(x) + C,$$

де C— довільна стала.

Невизначеним інтегралом функції $f(x)$називається множина всіх первісних цієї функції:

$$\int f\,(x)\,dx = F(x) + C.$$

Під час виконання практичних завдань обов'язково необхідно пам'ятати про довільну сталу C.

Основні формули інтегрування

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C;$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Розв’язування прикладів

1. Обчислити невизначений інтеграл степеневої функції

Приклад

Обчислити:

$$\int x^5 \, dx.$$

Розв’язання

Застосуємо формулу:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1.$$

У нашому випадку:

$$n = 5.$$

Тоді:

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C.$$

Отже:

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Перевірка

Знайдемо похідну отриманої первісної:

$$\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію. Отже, інтеграл обчислено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^6}{6} + C}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Обчислити:

$$\int x^7\ dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x^9\ dx.$$

2. Обчислити інтеграл від суми степеневих функцій

Приклад

Обчислити:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4)\, dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивість лінійності невизначеного інтеграла:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4)\, dx = 3\int x^4\ dx - 2\int x^2\ dx + 5\int x\ dx - 4\int d\,x.$$

Обчислимо кожний інтеграл:

$$3\int x^4\ dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5};$$

$$-2\int x^2\ dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3};$$

$$5\int x\ dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$-4\int d\,x = -4x.$$

Отже:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4)\, dx = \frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C.$$

Перевірка

Диференціюємо отриманий результат:

$$\left(\frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C\right)' = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 4.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int (2x^3 + 4x^2 - 3x + 6)\, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int (5x^4 - 3x^3 + 2x - 7)\, dx.$$

3. Обчислити інтеграл після попереднього перетворення підінтегральної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}\, dx.$$

Розв'язання

Перед інтегруванням спростимо підінтегральний вираз:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} = x^2 + 2x - 3,\ x \neq 0.$$

Тому:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}\, dx = \int (x^2 + 2x - 3)\, dx.$$

Застосуємо табличні формули:

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3},$$

$$2\int x\ dx = x^2,$$

$$-3\int d\,x = -3x.$$

Отже:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C\right)' = x^2 + 2x - 3.$$

А для $x \neq 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \frac{x^4 + 3x^2}{x}\, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \frac{2x^5 - x^3 + 4x}{x}\, dx.$$

4. Обчислити інтеграл із дробовими та від'ємними показниками степеня

Приклад

Обчислити:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

Розв'язання

Перетворимо підінтегральну функцію до степеневого вигляду:

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

$$\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}.$$

Тому:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + 2x^{-2}\right) dx.$$

Інтегруємо кожний доданок:

$$\int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2};$$

$$2\int x^{-2}\, dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} = -2x^{-1}.$$

Отже:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{x} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{-1} + C\right)' = x^{1/2} + 2x^{-2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{x} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{4}{x^3}\right) dx.$$

5. Обчислити інтеграл, що містить функцію $\frac{1}{x}$

Приклад

Обчислити:

$$\int \left(2x^3 + \frac{5}{x}\right) dx.$$

Розв'язання

Розділимо інтеграл:

$$\int \left(2x^3 + \frac{5}{x}\right) dx = 2\int x^3\ dx + 5\int \frac{dx}{x}.$$

Використаємо формули:

$$\int x^3\ dx = \frac{x^4}{4},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Отже:

$$2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5\ln|x| + C.$$

Після спрощення:

$$\frac{x^4}{2} + 5\ln|x| + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{x^4}{2} + 5\ln|x| + C\right)' = 2x^3 + \frac{5}{x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^4}{2} + 5\ln|x| + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \left(5x^4 - \frac{2}{x}\right) dx.$$

6. Обчислити інтеграл від тригонометричних функцій

Приклад

Обчислити:

$$\int (3\cos x - 2\sin x)\, dx.$$

Розв’язання

Використаємо властивості невизначеного інтеграла:

$$\int (3\cos x - 2\sin x)\,dx = 3\int \cos x\;dx - 2\int \sin x\;dx.$$

З таблиці інтегралів:

$$\int \cos x\;dx = \sin x\,,$$

$$\int \sin x\;dx = -\cos x\,.$$

Отже:

$$3\sin x - 2(-\cos x) + C.$$

Тому:

$$\int (3\cos x - 2\sin x)\,dx = 3\sin x + 2\cos x + C.$$

Перевірка

$$(3\sin x + 2\cos x + C)' = 3\cos x - 2\sin x\,.$$

Відповідь:

$$\boxed{3\sin x + 2\cos x + C}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Обчислити:

$$\int (4\cos x + 5\sin x)\,dx.$$

2. Обчислити:

$$\int (7\sin x - 3\cos x)\,dx.$$

Метод заміни змінної

Метод заміни змінної доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральний вираз містить складену функцію та множник, пов’язаний із похідною її внутрішньої функції.

Якщо:

$$u = \varphi(x),$$

то:

$$du = \varphi'(x)\,dx.$$

Після заміни інтеграл зводиться до простішого табличного інтеграла.

7. Обчислити інтеграл методом заміни змінної

Приклад

Обчислити:

$$\int 2\,x(x^2+3)^4\,dx.$$

Розв'язання

У підінтегральному виразі міститься складена функція:

$$(x^2+3)^4.$$

Виконаємо заміну:

$$u = x^2+3.$$

Знайдемо диференціал:

$$du = 2x\,dx.$$

У початковому інтегралі присутній множник $2x\,dx$, тому:

$$\int 2\,x(x^2+3)^4\,dx = \int u^4\ du.$$

Використаємо формулу степеневого інтеграла:

$$\int u^4\ du = \frac{u^5}{5} + C.$$

Повернемося до змінної x:

$$\frac{(x^2+3)^5}{5} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{(x^2+3)^5}{5}\right)' = \frac{1}{5}\cdot 5(x^2+3)^4 \cdot 2x.$$

Отже:

$$\left(\frac{(x^2+3)^5}{5}\right)' = 2x(x^2+3)^4.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{(x^2+3)^5}{5}+C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int 2\,x(x^2+1)^3\,dx.$$

2. Обчислити:

$$\int 3\,x^2(x^3+2)^4\,dx.$$

8. Обчислити інтеграл методом заміни змінної

Приклад

Обчислити:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = x^2+5.$$

Тоді:

$$du = 2x\,dx.$$

Отже:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{du}{u}.$$

Застосуємо табличну формулу:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Тому:

$$\ln|u| + C.$$

Оскільки:

$$u = x^2+5 > 0,$$

можемо записати:

$$\ln(x^2+5)+C.$$

Перевірка

$$\left(\ln(x^2+5)\right)' = \frac{2x}{x^2+5}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\ln(x^2+5)+C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx.$$

9. Обчислити інтеграл від показникової складеної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int e^{3x+2}\,dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = 3x+2.$$

Тоді:

$$du = 3\,dx.$$

Звідси:

$$dx = \frac{1}{3}du.$$

Підставимо:

$$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du.$$

Використаємо табличний інтеграл:

$$\int e^u \, du = e^u + C.$$

Тому:

$$\frac{1}{3}e^u + C.$$

Повертаємося до змінної x:

$$\frac{1}{3}e^{3x+2} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{1}{3}e^{3x+2}\right)' = \frac{1}{3}e^{3x+2} \cdot 3 = e^{3x+2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{3}e^{3x+2} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int e^{2x-1} \, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int e^{5x+3} \, dx.$$

10. Обчислити інтеграл від тригонометричної складеної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int \cos(4x - 1) \, dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = 4x - 1.$$

Тоді:

$$du = 4 \, dx,$$

звідки:

$$dx = \frac{1}{4}du.$$

Отже:

$$\int \cos(4x-1)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos u\ du.$$

За таблицею інтегралів:

$$\int \cos u\ du = \sin u + C.$$

Отже:

$$\frac{1}{4}\sin u + C.$$

Повернемося до початкової змінної:

$$\frac{1}{4}\sin(4x-1) + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{1}{4}\sin(4x-1)\right)' = \frac{1}{4}\cos(4x-1)\cdot 4 = \cos(4x-1).$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{4}\sin(4x-1) + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \cos(3x+2)\,dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \sin(5x-1)\,dx.$$

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами застосовують, зокрема, для інтегралів від добутків функцій, коли безпосереднє застосування таблиці інтегралів неможливе або незручне.

Формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du}.$$

Необхідно правильно вибрати функцію uта вираз dv, після чого знайти duта v.

11. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int x\, e^x\, dx.$$

Розв'язання

Виберемо:

$$u = x,$$

$$dv = e^x\, dx.$$

Тоді:

$$du = dx,$$

а

$$v = \int e^x\ dx = e^x.$$

Застосуємо формулу:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Отже:

$$\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\ dx.$$

Маємо:

$$\int x\, e^x\, dx = xe^x - e^x + C.$$

Винесемо e^xза дужки:

$$e^x(x-1) + C.$$

Перевірка

$$[e^x(x-1)]' = e^x(x-1) + e^x = xe^x.$$

Відповідь:

$$\boxed{e^x(x-1)+C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int x\, e^{2x}\, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x\, e^{3x}\, dx.$$

12. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int x \cos x \; dx.$$

Розв'язання

Виберемо:

$$u = x,$$

$$dv = \cos x \; dx.$$

Тоді:

$$du = dx,$$

$$v = \sin x\,.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cos x \; dx = x \sin x - \int \sin x \; dx.$$

Оскільки:

$$\int \sin x \; dx = -\cos x\,,$$

одержимо:

$$x \sin x + \cos x + C.$$

Перевірка

$$(x\sin x+\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x\,.$$

Відповідь:

$$\boxed{x\sin x+\cos x+C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int x\sin x\ dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x\cos 2\,x\,dx.$$

13. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int \ln x\ dx.$$

Розв'язання

Запишемо:

$$\int \ln x\ dx=\int 1\cdot\ln x\ dx.$$

Виберемо:

$$u=\ln x\,,$$

$$dv=dx.$$

Тоді:

$$du=\frac{dx}{x},$$

$$v=x.$$

За формулою інтегрування частинами:

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}.$$

Спростимо:

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - \int d\, x.$$

Отже:

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - x + C.$$

Перевірка

$$(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x\,.$$

Відповідь:

$$\boxed{x \ln x - x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \ln (2x)\, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x \ln x \ dx.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчисліть методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (\, 4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)\, dx;$$

2.

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx;$$

3.

$$\int \left(5x^4 + \frac{3}{x}\right) dx.$$

2. Обчисліть інтеграли від тригонометричних та показникових функцій:

$$\int (2\cos x + 3\sin x)\, dx;$$

2.

$$\int e^{4x}\, dx;$$

3.

$$\int \sin(3x)\, dx.$$

3. Обчисліть методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 4)^5\, dx;$$

2.

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 5}\, dx;$$

3.

$$\int e^{5x-2}\, dx.$$

4. Обчисліть методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^x\, dx;$$

2.

$$\int x \sin x\, dx;$$

3.

$$\int x \cos x\, dx;$$

4.

$$\int \ln x\, dx.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розуміти поняття первісної функції;
- розуміти зміст невизначеного інтеграла;
- правильно використовувати довільну сталу C;
- користуватися таблицею основних невизначених інтегралів;
- застосовувати властивість лінійності невизначеного інтеграла;
- виносити сталий множник за знак інтеграла;
- виконувати попередні алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу;
- застосовувати формулу інтегрування степеневої функції;
- інтегрувати показникові та тригонометричні функції;
- правильно обирати метод інтегрування;
- застосовувати метод заміни змінної;
- виконувати заміну та правильно повертатися до початкової змінної;
- застосовувати метод інтегрування частинами;
- правильно визначати u, dv, duі v;
- перевіряти отриману первісну диференціюванням;
- правильно та послідовно оформлювати розв’язання.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття первісної функції.
2. Основна властивість первісної.
3. Поняття невизначеного інтеграла.
4. Позначення невизначеного інтеграла.
5. Підінтегральна функція та підінтегральний вираз.
6. Довільна стала інтегрування.
7. Властивість лінійності невизначеного інтеграла.
8. Таблиця основних невизначених інтегралів.
9. Інтегрування степеневої функції.

10.Інтегрування функції $\frac{1}{x}$.

11.Інтегрування показникових функцій.

12.Інтегрування тригонометричних функцій.

13.Метод безпосереднього інтегрування.

14.Попереднє перетворення підінтегральної функції.

15.Метод заміни змінної.

16.Вибір нової змінної.

17.Знаходження диференціала нової змінної.

18.Повернення до початкової змінної після інтегрування.

19.Метод інтегрування частинами.

20.Формула інтегрування частинами.

21.Правила вибору uта dv.

22.Перевірка результату інтегрування диференціюванням.

23.Зв'язок між диференціюванням та інтегруванням.

24.Послідовність обчислення невизначеного інтеграла.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал самостійної роботи **«Первісна та невизначений інтеграл»** і лекції 14 **«Основні методи інтегрування»**. Повторити таблицю основних невизначених інтегралів, правила безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить **п'ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Біля порядкових номерів завдань кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання наведено після всіх варіантів.

Варіант 1

1. Обчислити невизначений інтеграл, використовуючи таблицю основних інтегралів:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, попередньо виконавши необхідні алгебраїчні перетворення:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної тригонометричної функції:

$$\int \cos(3x + 1)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^x\, dx.$$

Варіант 2

1. Обчислити невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (5x^3 - 4x + 2)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної показникової функції:

$$\int e^{2x+3}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos x\, dx.$$

Варіант 3

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^5 - 3x^3 + 2x)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2(x^3 + 2)^5\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(4x - 1)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin x\ dx.$$

Варіант 4

1. Обчислити невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (2x^6 - 5x^2 + 3x - 4)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, подавши корінь у вигляді степеня:

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{4}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 5}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{4x-2}\ dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int \ln x\ dx.$$

Варіант 5

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^4 - 2x^3 + x - 6)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5x^2 + \frac{3}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2\,x(x^2 + 1)^6\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(5x + 2)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{2x}\, dx.$$

Варіант 6

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^5 - 4x^2 + 7)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{5}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x}{2x^2 + 3}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(3x + 4)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 2\,x\, dx.$$

Варіант 7

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^3 - 5x^2 + 4x - 1)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3x^4 - \frac{2}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4\,x^3(x^4 + 2)^3\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{5x+1}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 2\,x\, dx.$$

Варіант 8

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^6 - 2x^4 + x^2 - 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 3}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(6x - 3)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{3x}\, dx.$$

Варіант 9

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^4 - 3x^2 + 2x + 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6x^3 + \frac{4}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3\,x^2(x^3 + 4)^2\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(7x - 2)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 3\,x\, dx.$$

Варіант 10

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^5 - 3x^3 + 4x - 2)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{6}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 7}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{3x-5}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 3\,x\, dx.$$

Варіант 11

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^4 + 7x^3 - 3x + 4)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2x^5 + \frac{5}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 6)^3\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(2x + 5)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{4x}\, dx.$$

Варіант 12

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^6 - x^4 + 2x^2 - 3)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5\sqrt{x} - \frac{3}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 8}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{6x+2}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 4x\, dx.$$

Варіант 13

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^3 - 5x + 6)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4x^2 - \frac{3}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4\,x^3(x^4 + 5)^4\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(8x + 1)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 4\,x\, dx.$$

Варіант 14

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^5 + 2x^3 - 4x + 7)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{7}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 2}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(7x - 4)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{5x}\, dx.$$

Варіант 15

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^4 - 3x^3 + 2x - 8)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7x^4 + \frac{2}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 5\, x^4 (x^5 + 1)^3\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{2x-7}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 5\, x\, dx.$$

Варіант 16

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^5 - 2x^2 + 3x - 4)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{4}{x^4}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 6}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(9x - 3)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 5\, x\, dx.$$

Варіант 17

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^6 - 4x^3 + x - 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3x^2 + \frac{6}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2\,x(x^2 + 8)^5\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(4x + 7)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{6x}\, dx.$$

Варіант 18

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^4 + 3x^2 - 6x + 1)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 7}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{7x-1}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 6\,x\, dx.$$

Варіант 19

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^3 - 2x^2 + 4x - 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(8x^3 - \frac{5}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3\,x^2(x^3 + 9)^4\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(5x + 6)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 6\,x\, dx.$$

Варіант 20

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^7 - 5x^4 + 3x^2 - 6)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 10}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(8x - 5)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{7x}\, dx.$$

Варіант 21

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^5 + 2x^3 - 5x + 3)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5x^2 + \frac{7}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4\, x^3 (x^4 + 3)^5\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{8x+4}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 7\, x\, dx.$$

Варіант 22

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^6 - 7x^2 + 2x + 4)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5\sqrt{x} + \frac{4}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 11}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(6x - 7)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 7\, x\, dx.$$

Варіант 23

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^4 + 4x^3 - 2x + 9)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6x^4 - \frac{4}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 5\, x^4 (x^5 + 2)^4\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(9x + 2)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{8x}\, dx.$$

Варіант 24

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^5 - x^3 + 3x^2 - 2)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7\sqrt{x} - \frac{5}{x^2}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 8}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{9x-3}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 8\, x\, dx.$$

Варіант 25

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (10x^3 - 4x^2 + 3x - 7)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4x^5 + \frac{8}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2\,x(x^2 + 12)^3\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(10x + 1)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 8\,x\, dx.$$

Варіант 26

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^7 - 3x^5 + 2x - 1)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 9}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(10x - 6)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{9x}\, dx.$$

Варіант 27

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^4 - 6x^2 + x + 5)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(9x^3 - \frac{3}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3\,x^2(x^3 + 6)^5\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{10x+1}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 9\,x\, dx.$$

Варіант 28

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^6 + 5x^4 - 3x + 8)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(8\sqrt{x} + \frac{5}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 10}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(11x - 5)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 9\,x\, dx.$$

Варіант 29

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^5 - 5x^3 + 4x - 6)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7x^2 + \frac{9}{x}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4\, x^3 (x^4 + 7)^3\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(11x + 4)\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{10x}\, dx.$$

Варіант 30

1. Обчислити невизначений інтеграл, застосувавши властивості невизначеного інтеграла та табличні формули:

$$\int (5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 7)\, dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, попередньо подавши корінь і дробовий вираз у степеневій формі:

$$\int \left(6\sqrt{x} - \frac{7}{x^3}\right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 15}\, dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної показникової функції:

$$\int e^{12x-5}\, dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 10\, x\, dx.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Безпосереднє інтегрування із застосуванням таблиці основних інтегралів	0,25
2	Інтегрування після попередніх алгебраїчних перетворень	0,25
3	Обчислення невизначеного інтеграла методом заміни змінної	0,50
4	Інтегрування складеної показникової або тригонометричної функції	0,50
5	Обчислення невизначеного інтеграла методом інтегрування частинами	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено метод обчислення кожного невизначеного інтеграла. Здобувач освіти правильно застосовує таблицю основних інтегралів, властивості невизначеного інтеграла, виконує необхідні алгебраїчні перетворення, правильно здійснює заміну змінної, застосовує метод інтегрування частинами, у всіх відповідях записує довільну сталу C. Розв’язання математично обґрунтовані та послідовно оформлені.

1,50–1,75 бала

Основні способи інтегрування засвоєно правильно. Здобувач освіти правильно вибирає метод інтегрування, але допускає окремі незначні арифметичні або алгебраїчні помилки, неточності під час заміни змінної чи спрощення отриманого результату. Загальний хід розв’язання правильний.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання базового рівня та частину завдань достатнього рівня. Здобувач освіти користується таблицею інтегралів, але допускає помилки під час застосування методу заміни змінної або інтегрування частинами. Можливі окремі випадки пропуску довільної сталої C.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти виконує лише найпростіші табличні інтеграли, але має труднощі з вибором способу інтегрування, заміною змінної та застосуванням формули інтегрування частинами. У розв'язаннях наявні суттєві математичні помилки.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння поняття невизначеного інтеграла та не володіє основними методами його обчислення.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
4. **Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння:*

Збірник індивідуальних завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.

6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 16 — **«Обчислення невизначених інтегралів»**.

Практичне заняття № 17

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення функції однієї змінної

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об’ємів, шляху та роботи

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години

Вид заняття: практичне заняття з професійним спрямуванням

Мета заняття

Закріпити та поглибити знання здобувачів освіти про визначений інтеграл і його геометричний та фізичний зміст; сформувати вміння застосовувати визначений інтеграл до розв’язування професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Навчити здобувачів освіти складати математичні моделі для визначення площ плоских фігур і поперечних перерізів, об’ємів конструктивних елементів та земляних мас, шляху за заданою залежністю швидкості від часу, а також роботи змінної сили.

У результаті виконання практичного заняття здобувач освіти повинен

знати: поняття визначеного інтеграла; геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла; формулу Ньютона-Лейбніца; формули для обчислення площі плоскої фігури, об’єму тіла обертання, шляху за заданою швидкістю та роботи змінної сили.

вміти: визначати межі інтегрування; складати визначений інтеграл за умовою задачі; знаходити первісну; застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца; обчислювати площі, об’єми, шлях та роботу; правильно використовувати одиниці вимірювання; пояснювати професійний зміст отриманого результату.

Оснащення

Конспекти лекцій, методичні матеріали, індивідуальні картки із завданнями, калькулятор, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми та мети заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення геометричного та фізичного змісту визначеного інтеграла.
5. Обчислення площ плоских фігур.
6. Застосування інтеграла до визначення площ будівельних профілів і перерізів.
7. Обчислення об’ємів.
8. Визначення шляху за заданою швидкістю.
9. Обчислення роботи змінної сили.
10. Розв’язування професійно орієнтованих задач.
11. Самостійна робота.
12. Аналіз типових помилок.
13. Підведення підсумків.
14. Пояснення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називають визначеним інтегралом?
2. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
3. Який фізичний зміст може мати визначений інтеграл?
4. Як записується формула Ньютона-Лейбніца?
5. Що називають межами інтегрування?
6. Як визначити площу криволінійної трапеції?
7. Як обчислити площу фігури, обмеженої двома графіками?
8. Як за допомогою визначеного інтеграла знайти об’єм тіла обертання?
9. Як знайти шлях, якщо відома залежність швидкості від часу?
10. Як визначити роботу змінної сили?
11. У яких одиницях вимірюють площу?
12. У яких одиницях вимірюють об’єм?
13. У яких одиницях вимірюють механічну роботу?

14. Чому в прикладній задачі важливо правильно встановити межі інтегрування?
15. Які задачі будівництва та цивільної інженерії можна звести до обчислення визначеного інтеграла?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Визначення площі будівельного профілю

У навчальній математичній моделі верхня межа поперечного профілю будівельного елемента описується функцією

$$y = 4 - x^2,$$

а нижня межа збігається з віссю абсцис. Визначити площу профілю між точками $x = 0$і $x = 2$.

Розв'язання

Площу визначаємо за формулою

$$S = \int_a^b f\,(x)\,dx.$$

Для заданої задачі:

$$S = \int_0^2 (\,4 - x^2)\,dx.$$

Знайдемо первісну:

$$\int (\,4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}.$$

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)|_0^2.$$

Отже,

$$S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Відповідь: площа профілю становить $\frac{16}{3}$квадратних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Верхня межа умовного поперечного профілю описується функцією $y = 9 - x^2$. Визначити площу між графіком функції та віссю абсцис на проміжку від $x = 0$до $x = 3$.

2. Контур будівельного профілю задано функцією $y = 4x - x^2$. Визначити площу між графіком функції та віссю абсцис на проміжку від $x = 0$до $x = 4$.

Приклад 2. Площа перерізу між двома контурами

Верхня межа поперечного перерізу конструктивного елемента описується функцією

$$y_1 = 4,$$

а нижня —

$$y_2 = x^2.$$

Визначити площу перерізу на проміжку $[-; 22]$.

Розв'язання

Якщо фігура обмежена двома графіками, її площу визначаємо як інтеграл різниці верхньої та нижньої функцій:

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx.$$

Функція парна, тому

$$S = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx.$$

Обчислюємо:

$$S = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)|_0^2.$$

$$S = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: площа поперечного перерізу становить $\frac{32}{3}$квадратних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Верхня межа перерізу задана прямою $y = 9$, нижня — параболою $y = x^2$. Визначити площу між ними на проміжку $[-; 33]$.

2. Верхня межа профілю задана функцією $y = 4x$, нижня — $y = x^2$. Визначити площу профілю між точками перетину графіків.

Приклад 3. Визначення об'єму циліндричного конструктивного елемента за допомогою інтеграла

У навчальній моделі профіль радіуса циліндричного елемента задається функцією

$$y = 2$$

на проміжку

$$0 \le x \le 5.$$

При обертанні цього профілю навколо осі абсцис утворюється тіло. Визначити його об'єм.

Розв'язання

Об'єм тіла обертання визначається за формулою

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Тому

$$V = \pi \int_0^5 2^2 \, dx.$$

$$V = 4\pi \int_0^5 d\, x.$$

$$V = 4\pi x \,|_0^5.$$

$$V = 20\pi.$$

Відповідь: об'єм становить 20πкубічних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Радіус циліндричного елемента дорівнює 3 одиницям, а його довжина — 6 одиницям. Представити об'єм у вигляді визначеного інтеграла та обчислити його.

2. Профіль $y = 4$на проміжку від $x = 0$до $x = 8$обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм утвореного тіла.

Приклад 4. Об'єм елемента зі змінним радіусом

Профіль умовного конструктивного елемента описується функцією

$$y = x$$

на проміжку від $x = 0$до $x = 3$. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням цього профілю навколо осі абсцис.

Розв'язання

Використовуємо формулу

$$V = \pi \int_0^3 x^2 \, dx.$$

Знайдемо первісну:

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Тому

$$V = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^3.$$

$$V = \pi \cdot \frac{27}{3} = 9\pi.$$

Відповідь: об'єм становить 9πкубічних одиниць.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Профіль елемента описується функцією $y = x$на проміжку $[0; 4]$. Визначити об'єм тіла, отриманого обертанням профілю навколо осі абсцис.

2. Профіль елемента описується функцією $y = 2x$на проміжку $[0; 2]$. Визначити об'єм відповідного тіла обертання.

Приклад 5. Визначення об'єму земляних робіт

Площа поперечного перерізу ділянки земляних робіт змінюється вздовж її довжини за законом

$$S(x) = 4 + 0{,}5x,$$

де Sвимірюється у квадратних метрах, а x— у метрах. Визначити об'єм земляних мас на ділянці довжиною 20 метрів.

Розв'язання

Для неперервно змінної площі поперечного перерізу навчальна математична модель об’єму має вигляд

$$V = \int_a^b S\,(x)\,dx.$$

Тому

$$V = \int_0^{20} (\,4 + 0{,}5x)\,dx.$$

Знайдемо первісну:

$$4x + 0{,}25x^2.$$

Підставимо межі:

$$V = (4x + 0{,}25x^2)\,|_0^{20}.$$

$$V = 80 + 0{,}25 \cdot 400.$$

$$V = 80 + 100 = 180.$$

Відповідь: за прийнятою математичною моделлю об’єм земляних мас становить **180 кубічних метрів**.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Площа поперечного перерізу земляних робіт змінюється за законом $S(x) = 3 + 0{,}4x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці довжиною 15 метрів.

2. Площа поперечного перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 5 + 0{,}2x$квадратних метрів. Визначити об’єм виїмки на ділянці довжиною 30 метрів.

Приклад 6. Визначення шляху будівельного механізму

Швидкість переміщення робочого органу будівельного механізму змінюється за законом

$$v(t) = 2t + 1,$$

де швидкість вимірюється у метрах за секунду, а час — у секундах. Визначити шлях, пройдений за перші 5 секунд.

Розв’язання

Якщо швидкість невід’ємна, шлях визначаємо за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,(t)\,dt.$$

Отже,

$$s = \int_{0}^{5} (\,2t + 1)\,dt.$$

Первісна:

$$t^2 + t.$$

Тому

$$s = (t^2 + t)\,|_0^5.$$

$$s = 25 + 5 = 30.$$

Відповідь: робочий орган механізму пройде 30 метрів.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Швидкість переміщення будівельного механізму описується функцією $v(t) = 3t + 2$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4 секунди.

2. Швидкість руху робочого органу механізму задана функцією $v(t) = t^2 +$ 1метрів за секунду. Визначити шлях за проміжок часу від 0 до 3 секунд.

Приклад 7. Робота змінної сили

Під час переміщення будівельного елемента вздовж прямої сила змінюється залежно від координати за законом

$$F(x) = 100 + 20x,$$

де Fвимірюється у ньютонах, а x— у метрах. Визначити роботу сили під час переміщення від $x = 0$до $x = 5$метрів.

Розв’язання

Роботу змінної сили визначаємо:

$$A = \int_{a}^{b} F\,(x)\,dx.$$

Тому

$$A = \int_{0}^{5} (\,100 + 20x)\,dx.$$

Первісна:

$$100x + 10x^2.$$

Отже,

$$A = (100x + 10x^2)\,|_0^5.$$

$$A = 500 + 250 = 750.$$

Відповідь: робота змінної сили становить **750 джоулів**.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Під час переміщення конструктивного елемента сила змінюється за законом $F(x) = 80 + 10x$ньютонів. Визначити роботу сили на переміщенні від 0 до 6 метрів.

2. Сила, що діє на переміщуваний будівельний вантаж, описується функцією $F(x) = 120 + 15x$ньютонів. Визначити роботу під час переміщення від 0 до 4 метрів.

Приклад 8. Робота сили пружного елемента

У навчальній моделі сила опору пружного елемента визначається законом

$$F(x) = 400x,$$

де x— деформація в метрах. Визначити роботу, необхідну для деформування елемента від $x = 0$до $x = 0{,}05$метра.

Розв'язання

Робота:

$$A = \int_0^{0{,}05} 400\,x\,dx.$$

Первісна:

$$200x^2.$$

Тому

$$A = 200x^2\,|_0^{0{,}05}.$$

$$A = 200 \cdot (0{,}05)^2.$$

$$A = 200 \cdot 0{,}0025 = 0{,}5.$$

Відповідь: робота становить **0,5 джоуля**.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Сила пружного елемента описується законом $F(x) = 500x$ньютонів. Визначити роботу під час деформації від 0 до 0,04 метра.

2. Сила опору пружного елемента визначається функцією $F(x) = 800x$ньютонів. Визначити роботу під час деформації від 0 до 0,03 метра.

Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Верхня межа поперечного профілю задана функцією $\boldsymbol{y = 6x - x^2}$, а нижня збігається з віссю абсцис. Визначити площу профілю між точками його перетину з віссю абсцис.

Завдання 2. Профіль конструктивного елемента описується функцією $\boldsymbol{y = x}$на проміжку $[\mathbf{0}; \mathbf{5}]$. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням профілю навколо осі абсцис.

Завдання 3. Площа поперечного перерізу ділянки земляних робіт задана функцією $\boldsymbol{S(x) = 6 + 0,3x}$квадратних метрів. Визначити об'єм земляних мас на ділянці довжиною 20 метрів.

Завдання 4. Швидкість робочого органу будівельного механізму задана функцією $\boldsymbol{v(t) = 2t + 3}$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 6 секунд.

Завдання 5. Сила під час переміщення конструктивного елемента змінюється за законом $\boldsymbol{F(x) = 150 + 25x}$ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0 до 4 метрів.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне професійно орієнтоване завдання

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 індивідуальних варіантів**.

У кожному варіанті необхідно виконати п'ять завдань:

1. обчислити площу будівельного профілю або перерізу;
2. визначити об'єм;
3. визначити об'єм земляних робіт за змінною площею поперечного перерізу;
4. визначити шлях за заданою залежністю швидкості від часу;

5. визначити роботу змінної сили та пояснити фізичний зміст отриманого результату.

Варіант 1

1. Верхня межа поперечного профілю будівельного елемента описується функцією $y = 4 - x^2$, нижня межа збігається з віссю абсцис. Обчислити площу профілю на проміжку від $x = 0$до $x = 2$.
2. Профіль конструктивного елемента описується функцією $y = x$на проміжку від $x = 0$до $x = 3$. Визначити об’єм тіла, утвореного обертанням цього профілю навколо осі абсцис.
3. Площа поперечного перерізу ділянки земляних робіт змінюється за законом $S(x) = 4 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм земляних мас на ділянці довжиною 20 метрів.
4. Швидкість переміщення робочого органу будівельного механізму задана функцією $v(t) = 2t + 1$метрів за секунду. Визначити шлях, пройдений за перші 5 секунд.
5. Сила під час переміщення будівельного елемента змінюється за законом $F(x) = 100 + 20x$ньютонів. Визначити роботу сили під час переміщення від 0 до 5 метрів та пояснити фізичний зміст отриманого результату.

Варіант 2

1. Верхня межа будівельного профілю описується функцією $y = 9 - x^2$. Обчислити площу між графіком і віссю абсцис на проміжку $[0; 3]$.
2. Профіль елемента $y = x$на проміжку $[0; 4]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм утвореного тіла.
3. Площа поперечного перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 3 + 0{,}4x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці довжиною 15 метрів.
4. Швидкість механізму змінюється за законом $v(t) = 3t + 2$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4 секунди.
5. Сила переміщення елемента задана функцією $F(x) = 80 + 10x$ньютонів. Обчислити роботу на проміжку від 0 до 6 метрів та пояснити значення отриманого результату.

Варіант 3

1. Контур поперечного профілю задано функцією $y = 4x - x^2$. Визначити площу між графіком та віссю абсцис на проміжку $[0; 4]$.

2. Профіль $y = 2x$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу земляної виїмки змінюється за законом $S(x) = 5 + 0{,}2x$квадратних метрів. Знайти об’єм на ділянці довжиною 30 метрів.
4. Швидкість робочого органу механізму задана функцією $v(t) = t^2 + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3 секунди.
5. Сила переміщення будівельного вантажу задана функцією $F(x) = 120 + 15x$ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0 до 4 метрів та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 4

1. Верхня межа перерізу описується функцією $y = 6x - x^2$. Визначити площу між графіком та віссю абсцис на проміжку $[0; 6]$.
2. Профіль $y = x$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм утвореного тіла.
3. Площа поперечного перерізу земляних робіт задана функцією $S(x) = 6 + 0{,}3x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці довжиною 20 метрів.
4. Швидкість механізму описується функцією $v(t) = 2t + 3$метрів за секунду. Знайти шлях за перші 6 секунд.
5. Сила змінюється за законом $F(x) = 150 + 25x$ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0 до 4 метрів та пояснити отриманий результат.

Варіант 5

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 8x - x^2$. Обчислити площу між графіком і віссю абсцис на проміжку $[0; 8]$.
2. Профіль $y = 2x$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу насипу описується функцією $S(x) = 4 + 0{,}6x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці довжиною 10 метрів.
4. Швидкість робочого органу задана функцією $v(t) = 4t + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5 секунд.
5. Змінна сила описується функцією $F(x) = 200 + 20x$ньютонів. Визначити роботу від $x = 0$до $x = 5$метрів і пояснити фізичний зміст результату.

Варіант 6

1. Контур профілю задано функцією $y = 10x - x^2$. Визначити площу під графіком на проміжку $[0; 10]$.
2. Профіль $y = 3x$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу земляної виїмки описується функцією $S(x) = 5 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 16 метрів.
4. Швидкість механізму задана функцією $v(t) = t + 4$метрів за секунду. Визначити шлях за 8 секунд.
5. Сила задана функцією $F(x) = 100 + 30x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 6 метрів та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 7

1. Верхня межа поперечного перерізу описується функцією $y = 12 - x^2$. Обчислити площу на проміжку від $x = 0$до $x = 3$.
2. Профіль $y = x + 1$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа перерізу насипу задана функцією $S(x) = 7 + 0{,}2x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 25 метрів.
4. Швидкість робочого органу задана функцією $v(t) = 2t + 4$метрів за секунду. Визначити шлях за 5 секунд.
5. Сила переміщення задана функцією $F(x) = 180 + 10x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 8 метрів та пояснити результат.

Варіант 8

1. Верхня межа профілю описується функцією $y = 16 - x^2$. Визначити площу між графіком і віссю абсцис на проміжку $[0; 4]$.
2. Профіль $y = x + 2$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу земляних робіт задана функцією $S(x) = 8 + 0{,}4x$квадратних метрів. Знайти об’єм на ділянці довжиною 20 метрів.
4. Швидкість механізму описується функцією $v(t) = 3t + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за 6 секунд.

5. Сила задана функцією $F(x) = 160 + 20x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів і пояснити її фізичний зміст.

Варіант 9

1. Контур перерізу описується функцією $y = 5x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 5]$.
2. Профіль $y = 2x + 1$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 6 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 18 метрів.
4. Швидкість робочого органу задана функцією $v(t) = t^2 + 2$метрів за секунду. Знайти шлях за 4 секунди.
5. Сила описується функцією $F(x) = 140 + 25x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 4 метрів та пояснити результат.

Варіант 10

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 6x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 6]$.
2. Профіль $y = 2x$на проміжку $[0; 4]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу насипу змінюється за законом $S(x) = 10 + 0{,}2x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 30 метрів.
4. Швидкість механізму задана функцією $v(t) = 4t + 2$метрів за секунду. Визначити шлях за 5 секунд.
5. Сила змінюється за законом $F(x) = 200 + 40x$ньютонів. Обчислити роботу на переміщенні від 0 до 3 метрів та пояснити фізичний зміст.

Варіант 11

1. Профіль описується функцією $y = 7x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 7]$.
2. Профіль $y = x + 1$на проміжку $[0; 4]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу земляних робіт дорівнює $S(x) = 5 + 0{,}3x$квадратних метрів. Знайти об’єм на ділянці 20 метрів.

4. Швидкість робочого органу $v(t) = 2t^2 + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3 секунди.
5. Сила $F(x) = 90 + 20x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів та пояснити результат.

Варіант 12

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 8x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 8]$.
2. Профіль $y = 3x$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки описується функцією $S(x) = 7 + 0{,}4x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 15 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 3t + 5$метрів за секунду. Знайти шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 130 + 30x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 4 метрів та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 13

1. Контур будівельного профілю задано функцією $y = 9x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 9]$.
2. Профіль $y = x + 2$на проміжку $[0; 4]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу насипу задана функцією $S(x) = 6 + 0{,}6x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 10 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = t^2 + 3$метрів за секунду. Визначити шлях за 3 секунди.
5. Сила $F(x) = 170 + 15x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 6 метрів і пояснити результат.

Варіант 14

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 10x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 10]$.
2. Профіль $y = 2x + 1$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.

3. Площа перерізу земляних робіт описується функцією $S(x) = 8 + 0{,}25x$квадратних метрів. Знайти об’єм на ділянці 24 метри.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = 5t + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 150 + 20x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 7 метрів та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 15

1. Поперечний профіль описується функцією $y = 12x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 12]$.
2. Профіль $y = x + 3$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 9 + 0{,}3x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 20 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 2t + 5$метрів за секунду. Знайти шлях за 6 секунд.
5. Сила $F(x) = 220 + 10x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів та пояснити результат.

Варіант 16

1. Верхня межа перерізу задана функцією $y = 6 - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 2]$.
2. Профіль $y = 4x$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа перерізу насипу змінюється за законом $S(x) = 4 + 0{,}8x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 10 метрів.
4. Швидкість механізму задана функцією $v(t) = 3t^2 + 1$метрів за секунду. Визначити шлях за 2 секунди.
5. Сила $F(x) = 100 + 50x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 4 метрів і пояснити її фізичний зміст.

Варіант 17

1. Контур профілю описується функцією $y = 3x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 3]$.

2. Профіль $y = x + 1$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу земляних робіт задана функцією $S(x) = 10 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 12 метрів.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = 4t + 3$метрів за секунду. Визначити шлях за 5 секунд.
5. Сила $F(x) = 180 + 25x$ньютонів. Знайти роботу від 0 до 6 метрів та пояснити результат.

Варіант 18

1. Верхня межа профілю описується функцією $y = 4x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 4]$.
2. Профіль $y = 2x + 2$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки описується функцією $S(x) = 7 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 14 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 2t^2 + 2$метрів за секунду. Визначити шлях за 3 секунди.
5. Сила $F(x) = 160 + 30x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів та пояснити фізичний зміст.

Варіант 19

1. Будівельний профіль описується функцією $y = 5x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 5]$.
2. Профіль $y = 3x + 1$на проміжку $[0; 2]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа перерізу насипу задана функцією $S(x) = 8 + 0{,}6x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 15 метрів.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = 5t + 2$метрів за секунду. Знайти шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 200 + 35x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 4 метрів та пояснити отриманий результат.

Варіант 20

1. Верхня межа перерізу задана функцією $y = 6x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 6]$.
2. Профіль $y = x + 2$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу земляних робіт $S(x) = 9 + 0{,}4x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 20 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 3t + 4$метрів за секунду. Визначити шлях за 6 секунд.
5. Сила $F(x) = 240 + 20x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів і пояснити її фізичний зміст.

Варіант 21

1. Верхня межа профілю описується функцією $y = 7x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 7]$.
2. Профіль $y = 2x$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 5 + 0{,}7x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 10 метрів.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = t^2 + 4$метрів за секунду. Визначити шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 120 + 40x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 3 метрів та пояснити результат.

Варіант 22

1. Поперечний профіль описується функцією $y = 8x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 8]$.
2. Профіль $y = 3x$на проміжку $[0; 4]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу насипу змінюється за законом $S(x) = 6 + 0{,}8x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 12 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 4t + 5$метрів за секунду. Знайти шлях за 5 секунд.

5. Сила $F(x) = 210 + 30x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 4 метрів та пояснити фізичний зміст.

Варіант 23

1. Верхня межа будівельного профілю описується функцією $y = 9x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 9]$.
2. Профіль $y = x + 4$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу земляних робіт описується функцією $S(x) = 10 + 0{,}3x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 20 метрів.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = 2t^2 + 3$метрів за секунду. Визначити шлях за 3 секунди.
5. Сила $F(x) = 190 + 25x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 6 метрів і пояснити отриманий результат.

Варіант 24

1. Контур профілю задано функцією $y = 10x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 10]$.
2. Профіль $y = 2x + 3$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки задана функцією $S(x) = 8 + 0{,}7x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 10 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 6t + 1$метрів за секунду. Знайти шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 250 + 20x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 5 метрів та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 25

1. Верхня межа перерізу описується функцією $y = 12x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 12]$.
2. Профіль $y = 4x$на проміжку $[0; 3]$обертається навколо осі абсцис. Обчислити об’єм.
3. Площа перерізу насипу задана функцією $S(x) = 12 + 0{,}4x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 15 метрів.

4. Швидкість робочого органу $v(t) = 3t^2 + 2$метрів за секунду. Визначити шлях за 3 секунди.
5. Сила $F(x) = 140 + 50x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 4 метрів і пояснити результат.

Варіант 26

1. Будівельний профіль описується функцією $y = 14x - x^2$. Обчислити площу на проміжку $[0; 14]$.
2. Профіль $y = x + 3$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа поперечного перерізу земляних робіт задана функцією $S(x) = 7 + 0{,}9x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 10 метрів.
4. Швидкість механізму $v(t) = 5t + 4$метрів за секунду. Визначити шлях за 6 секунд.
5. Сила $F(x) = 220 + 30x$ньютонів. Обчислити роботу від 0 до 5 метрів та пояснити фізичний зміст результату.

Варіант 27

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 15x - x^2$. Визначити площу на проміжку $[0; 15]$.
2. Профіль $y = 2x + 1$на проміжку $[0; 5]$обертається навколо осі абсцис. Визначити об’єм.
3. Площа перерізу виїмки змінюється за законом $S(x) = 9 + 0{,}5x$квадратних метрів. Визначити об’єм на ділянці 18 метрів.
4. Швидкість робочого органу $v(t) = 2t^2 + 5$метрів за секунду. Визначити шлях за 4 секунди.
5. Сила $F(x) = 180 + 40x$ньютонів. Визначити роботу від 0 до 6 метрів та пояснити отриманий результат.

Варіант 28

1. Поперечний профіль будівельного елемента обмежений графіком функції $y = 16x - x^2$, віссю абсцис і прямими $x = 0$та $x = 16$. Скласти визначений інтеграл та обчислити площу цього профілю.

2. Профіль конструктивного елемента задано функцією $y = 3x + 1$на проміжку від $x = 0$до $x = 4$. Профіль обертається навколо осі абсцис. Скласти визначений інтеграл і знайти об’єм утвореного тіла.

3. Площа поперечного перерізу насипу змінюється вздовж його довжини за законом $S(x) = 10 + 0{,}6x$квадратних метрів. За допомогою визначеного інтеграла знайти об’єм насипу на ділянці довжиною 20 метрів.

4. Швидкість переміщення робочого органу будівельного механізму змінюється за законом $v(t) = 4t^2 + 1$метрів за секунду. За допомогою визначеного інтеграла знайти шлях, пройдений механізмом за перші 3 секунди.

5. Сила, необхідна для переміщення конструктивного елемента, змінюється за законом $F(x) = 200 + 50x$ньютонів. Визначити роботу сили на переміщенні від $x = 0$до $x = 4$метрів та пояснити фізичний зміст отриманої величини.

Варіант 29

1. Верхня межа поперечного профілю будівельного елемента задана функцією $y = 18x - x^2$, а нижня межа збігається з віссю абсцис. Скласти визначений інтеграл і обчислити площу профілю на проміжку від $x = 0$до $x = 18$.

2. Профіль конструктивного елемента описується функцією $y = 2x + 2$на проміжку від $x = 0$до $x = 5$. Визначити об’єм тіла, яке утворюється при обертанні профілю навколо осі абсцис. Записати формулу об’єму та виконати обчислення за формулою Ньютона-Лейбніца.

3. Площа поперечного перерізу земляної виїмки змінюється за законом $S(x) = 12 + 0{,}5x$квадратних метрів. Скласти математичну модель та визначити об’єм земляних мас на ділянці довжиною 24 метри.

4. Швидкість переміщення будівельного механізму описується функцією $v(t) = 3t^2 + 4$метрів за секунду. Визначити шлях, пройдений механізмом за проміжок часу від 0 до 4 секунд.

5. Сила, що діє під час переміщення будівельного елемента, змінюється за законом $F(x) = 240 + 40x$ньютонів. Визначити роботу сили під час переміщення від 0 до 5 метрів. Записати відповідь у джоулях та пояснити її фізичний зміст.

Варіант 30

1. Поперечний профіль будівельного елемента обмежений зверху параболою $y = 20x - x^2$, знизу віссю абсцис, а з боків прямими $x = 0$та $x = 20$. Побудувати математичну модель площі у вигляді визначеного інтеграла, знайти первісну, застосувати формулу Ньютона-Лейбніца та обчислити площу профілю.

2. Профіль конструктивного елемента задано функцією $y = 3x + 2$на проміжку від $x = 0$до $x = 4$. При обертанні цього профілю навколо осі абсцис утворюється просторове тіло. Скласти визначений інтеграл для його об’єму, виконати інтегрування та обчислити об’єм утвореного тіла.

3. Площа поперечного перерізу ділянки земляних робіт змінюється вздовж поздовжньої координати за законом $S(x) = 14 + 0{,}4x$квадратних метрів, де xвимірюється у метрах. За допомогою визначеного інтеграла визначити об’єм земляних мас на ділянці довжиною 30 метрів. Результат подати в кубічних метрах.

4. Швидкість переміщення робочого органу будівельного механізму змінюється за законом $v(t) = 2t^2 + 3t + 1$метрів за секунду. Визначити шлях, пройдений за перші 5 секунд руху. Скласти відповідний визначений інтеграл, знайти первісну та обчислити його значення.

5. Під час переміщення конструктивного елемента вздовж прямолінійної ділянки сила змінюється залежно від координати за законом $F(x) = 300 + 50x$ньютонів. За допомогою визначеного інтеграла визначити роботу цієї сили під час переміщення елемента від $x = 0$до $x = 6$метрів. Результат подати в джоулях та пояснити його фізичний зміст.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Зміст уміння, яке оцінюється**	**Максимальна кількість балів**
1	Застосування визначеного інтеграла до обчислення площі будівельного профілю або перерізу	**1,00**
2	Застосування визначеного інтеграла до обчислення об’єму	**1,00**

Завдання	Зміст уміння, яке оцінюється	Максимальна кількість балів
3	Визначення об’єму земляних робіт за змінною площею поперечного перерізу	**1,00**
4	Визначення шляху за заданою залежністю швидкості від часу	**1,00**
5	Обчислення роботи змінної сили та пояснення фізичного змісту результату	**1,00**
Разом		**5,00 балів**

Деталізація оцінювання кожного завдання

За кожне завдання можна отримати **1 бал**:

- правильний вибір математичної моделі та запис визначеного інтеграла — **0,20 бала**;
- правильне визначення меж інтегрування — **0,20 бала**;
- правильне знаходження первісної — **0,20 бала**;
- правильне застосування формули Ньютона-Лейбніца та виконання обчислень — **0,20 бала**;
- правильна відповідь, одиниці вимірювання та пояснення професійного або фізичного змісту — **0,20 бала**.

Типові помилки

Під час обчислення площі необхідно правильно визначати, яка функція задає верхню, а яка нижню межу фігури. Площа як геометрична величина не може бути від’ємною.

Під час обчислення об’єму тіла обертання необхідно пам’ятати, що у формулі використовується **квадрат функції**, яка визначає радіус поперечного перерізу.

У задачах на земляні роботи функція $S(x)$має зміст **площі поперечного перерізу**, тому інтегрування цієї функції за довжиною приводить до об’єму. Якщо площа вимірюється у квадратних метрах, а координата — у метрах, результат вимірюється у кубічних метрах.

У задачах на рух інтегрування швидкості дає переміщення; коли швидкість на всьому розглянутому проміжку невід’ємна, отримане значення одночасно є

пройденим шляхом. Якщо швидкість змінює знак, для визначення саме повного шляху необхідно враховувати модуль швидкості.

Під час визначення роботи змінної сили необхідно враховувати залежність сили від координати та правильно встановлювати межі переміщення. Якщо сила вимірюється у ньютонах, а переміщення — у метрах, робота вимірюється у джоулях.

Підведення підсумків

Практичне заняття № 17 безпосередньо реалізує передбачене робочою програмою застосування визначеного інтеграла до **обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи**, а також вимагає пояснення фізичного змісту отриманого результату.

Початковий професійно-прикладний приклад робочої програми був пов'язаний із визначенням шляху автомобіля за функцією швидкості. Для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** професійне спрямування змінено без зміни математичного змісту теми: використано площі будівельних профілів і перерізів, об'єми конструктивних елементів та земляних робіт, переміщення робочих органів будівельних механізмів і роботу змінної сили.

Задачі заняття є **навчальними математичними моделями**. Вони формують уміння застосовувати інтегральне числення у професійному контексті, але не замінюють нормативних інженерних розрахунків будівельних конструкцій.

Питання для підготовки

1. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
2. Як записується формула Ньютона-Лейбніца?
3. Як визначити площу криволінійної трапеції?
4. Як визначити площу фігури між двома графіками?
5. Як обчислити об'єм тіла обертання навколо осі абсцис?
6. Чому у формулі об'єму тіла обертання функція підноситься до квадрата?
7. Як визначити об'єм тіла зі змінною площею поперечного перерізу?
8. Як визначений інтеграл можна використати для розрахунку об'єму земляних робіт?
9. Як визначити шлях за відомою функцією швидкості?
10. Чим відрізняються шлях і переміщення, якщо швидкість змінює знак?

11. Як визначити роботу змінної сили?
12. Який фізичний зміст інтеграла від сили за переміщенням?
13. Які одиниці вимірювання отримують при інтегруванні площі за довжиною?
14. Які одиниці вимірювання отримують при інтегруванні швидкості за часом?
15. Які одиниці вимірювання отримують при інтегруванні сили за переміщенням?

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: збірник індивідуальних завдань*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
4. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
5. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
6. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
7. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною

редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 18

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 4

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення

Тема: Рішення завдань за модулем 4

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 7 балів

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань та практичних умінь з інтегрального числення функції однієї змінної.

Перевірити сформованість умінь знаходити первісні функцій; обчислювати невизначені інтеграли; застосовувати безпосереднє інтегрування, метод заміни змінної та інтегрування частинами; обчислювати визначені інтеграли; застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца.

Перевірити здатність застосовувати визначений інтеграл до розв’язування геометричних і професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія», зокрема до визначення площ поперечних перерізів і криволінійних ділянок, об’ємів будівельних елементів та роботи змінної сили.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань.

6. Перевірка отриманих результатів.
7. Оцінювання виконаних робіт.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків змістового модуля 4.

Структура індивідуального варіанта

Кожний варіант містить **сім завдань**:

1. знаходження первісної;
2. обчислення невизначеного інтеграла;
3. застосування методу заміни змінної;
4. інтегрування частинами;
5. обчислення визначеного інтеграла;
6. застосування формули Ньютона-Лейбніца;
7. професійно орієнтована задача для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Знаходження первісної.
Знайти загальний вигляд первісної для функції

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 3.$$

Завдання 2. Невизначений інтеграл.
Обчислити

$$\int (4x^3 - 6x + 5)\, dx.$$

Завдання 3. Метод заміни змінної.
Обчислити

$$\int 2\,x(x^2 + 1)^3\, dx.$$

Завдання 4. Інтегрування частинами.
Обчислити

$$\int x\, e^x\, dx.$$

Завдання 5. Визначений інтеграл.

Обчислити

$$\int_0^2 (3x^2 + 1)\, dx.$$

Завдання 6. Формула Ньютона-Лейбніца.

Знайти первісну для підінтегральної функції та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_1^3 (2x + 4)\, dx.$$

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Верхня межа поперечного перерізу будівельного елемента в системі координат описується функцією

$$y = 4 - x^2,\ -2 \le x \le 2.$$

Нижньою межею є вісь Ox. За допомогою визначеного інтеграла обчислити площу поперечного перерізу. Виконати схематичне зображення області інтегрування та пояснити практичний зміст отриманого результату.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної функції

$$f(x) = 8x^3 - 6x + 2.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (5x^4 + 3x^2 - 7)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 3\, x^2 (x^3 + 2)^4\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \sin x\ \, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (2x+1)\,dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (x^2+3)\,dx.$$

Завдання 7. Верхній контур поперечного перерізу будівельного елемента задано функцією

$$y = 9 - x^2,\ -3 \le x \le 3.$$

Обчислити площу перерізу, обмеженого цим графіком та віссю Ox.

Варіант 3

Завдання 1. Знайти первісну для

$$f(x) = 9x^2 + 4x - 5.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (6x^5 - 4x^3 + 2x)\,dx.$$

Завдання 3. Використовуючи заміну змінної, обчислити

$$\int 2x(x^2+4)^2\,dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x\cos x\ dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (4x-2)\,dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (3x^2+2x)\,dx,$$

попередньо визначивши первісну.

Завдання 7. Поперечний профіль аркового елемента задається функцією

$$y = 16 - x^2,\ -4 \le x \le 4.$$

Визначити площу області між профілем і віссю Ox.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної

$$f(x) = 12x^3 - 8x + 6.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (7x^4 - 5x^2 + 4)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 4\,x(2x^2 + 3)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x\, e^{2x}\, dx$$

методом інтегрування частинами.

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (5x^2 - 2x + 1)\, dx.$$

Завдання 6. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_1^4 (2x - 1)\, dx.$$

Завдання 7. Поперечний переріз криволінійного будівельного елемента обмежений графіком

$$y = 25 - x^2$$

та віссю Oxна проміжку $[-; 55]$. Обчислити площу перерізу.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 10x^4 - 6x^2 + 4.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (3x^5 + 8x^3 - 2x)\, dx.$$

Завдання 3. Виконати заміну змінної та обчислити

$$\int 6\,x(3x^2 + 1)^2\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \ln x \ dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^2 (6x^2 + 3)\, dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_0^3 (x^2 + 2x + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Площа фасадного елемента обмежена параболою

$$y = 4x - x^2$$

та віссю Ox. Знайти точки перетину параболи з віссю Ox, установити межі інтегрування та обчислити площу елемента.

Варіант 6

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 15x^2 - 10x + 7.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (8x^3 + 4x^2 - 6x + 2)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 5\, x^4 (x^5 + 2)^3\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \sin 2\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^1 (4x^3 + 2x)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 4)\, dx.$$

Завдання 7. Контур поперечного перерізу конструктивного елемента описується функцією

$$y = 6x - x^2.$$

Знайти точки перетину з віссю Oxта площу перерізу, обмеженого параболою й віссю координат.

Варіант 7

Завдання 1. Знайти первісну для

$$f(x) = 20x^3 + 6x^2 - 8.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (9x^4 - 3x^3 + 5x)\, dx.$$

Завдання 3. Застосувати метод заміни змінної:

$$\int 2\, x(x^2 + 5)^4\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x\, e^{-x}\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (2x^3 + x)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 3)\, dx.$$

Завдання 7. Арковий отвір у вертикальній площині моделюється функцією

$$y = 8x - x^2.$$

Знайти точки перетину контуру з горизонтальною віссю та за допомогою визначеного інтеграла обчислити площу отвору.

Варіант 8

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної

$$f(x) = 18x^2 + 12x - 4.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (5x^5 - 7x^3 + 3x^2)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 3\,x^2(x^3 + 1)^5\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \cos 2\,x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (x^2 + 4x)\, dx.$$

Завдання 6. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_0^2 (4x^3 + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Верхня межа декоративного фасадного елемента задана функцією

$$y = 10x - x^2.$$

Визначити межі області, обмеженої графіком і віссю Ox, та обчислити її площу.

Варіант 9

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 14x^3 - 9x^2 + 5.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (4x^6 - 6x^4 + 8x)\, dx.$$

Завдання 3. За допомогою заміни змінної обчислити

$$\int 4\,x^3(x^4 + 3)^2\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x\, e^{3x}\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (x^2 + 2)\, dx.$$

Завдання 6. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца до інтеграла

$$\int_1^2 (5x^2 - 3x + 2)\, dx.$$

Завдання 7. Поперечний профіль криволінійного елемента будівлі описується залежністю

$$y = 12x - x^2.$$

Знайти межі профілю по осі Oxта площу поперечного перерізу.

Варіант 10

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 16x^4 - 12x^2 + 8x.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (7x^5 + 5x^3 - 9x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 6\, x^2 (2x^3 + 5)^3\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \ln(2x)\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^4 (2x + 3)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^3 (2x^2 + x + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Вертикальний арковий отвір моделюється параболою

$$y = 14x - x^2.$$

Знайти точки перетину параболи з віссю Oxта обчислити площу отвору.

Варіант 11

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 21x^2 - 8x + 6.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (6x^4 + 9x^2 - 5)\, dx.$$

Завдання 3. Виконати заміну змінної та обчислити

$$\int 2\,x(x^2 + 7)^5\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \sin 3\,x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (5x^2 + 4x)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_1^3 (4x^2 - 2x + 5)\, dx.$$

Завдання 7. Поперечний переріз монолітного елемента обмежений кривою

$$y = 16x - x^2$$

та віссю Ox. Визначити межі інтегрування і площу перерізу.

Варіант 12

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 24x^3 + 10x - 3.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (8x^5 - 4x^2 + 7)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 5\,x^4(x^5 + 4)^2\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x \cos 3\,x\,dx$$

методом інтегрування частинами.

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x - 1)\,dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (x^3 + 3x^2)\,dx.$$

Завдання 7. Криволінійний фасадний елемент обмежений графіком

$$y = 18x - x^2$$

та віссю Ox. Знайти площу цього елемента.

Варіант 13

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної

$$f(x) = 25x^4 - 15x^2 + 10.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (9x^5 - 6x^3 + 4x)\,dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 8\,x(4x^2 + 1)^4\,dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x\,e^{4x}\,dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (6x^3 + 2x)\,dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_2^4 (3x^2 - x + 2)\,dx.$$

Завдання 7. Поперечний профіль будівельного елемента задається функцією

$$y = 20x - x^2.$$

Визначити точки перетину профілю з віссю Oxі площу відповідного перерізу.

Варіант 14

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 28x^3 - 14x + 9.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (10x^4 + 5x^2 - 8)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 3\,x^2(x^3 + 6)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \ln(3x)\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (2x^2 + 4x + 1)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_1^4 (x^2 + 2x + 3)\, dx.$$

Завдання 7. Криволінійний отвір у конструкції описується функцією

$$y = 22x - x^2.$$

Визначити його ширину по осі Oxта площу області, обмеженої кривою й віссю Ox.

Варіант 15

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 30x^2 + 16x - 5.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (12x^5 - 8x^3 + 6x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 10\, x(5x^2 + 2)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x \sin 4\, x\, dx$$

методом інтегрування частинами.

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^2 (8x^2 - 3x + 4)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^3 (2x^3 + x^2 + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Профіль аркового елемента будівлі описується функцією

$$y = 24x - x^2.$$

Знайти межі області та обчислити площу під профілем.

Варіант 16

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 32x^3 - 18x^2 + 4.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (11x^4 - 7x^2 + 9)\, dx.$$

Завдання 3. Застосовуючи заміну змінної, обчислити

$$\int 4\, x^3(x^4 + 5)^4\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \cos 4\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (7x^2 + 3x)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_1^3 (5x^2 + 2x - 2)\, dx.$$

Завдання 7. Верхня межа поперечного перерізу конструктивного елемента описується функцією

$$y = 26x - x^2.$$

Визначити межі інтегрування та площу перерізу.

Варіант 17

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 35x^4 - 20x^3 + 6x.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (13x^5 + 4x^3 - 7x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 6\,x^2(2x^3 + 1)^4\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x\, e^{5x}\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^4 (3x^2 + x)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну і за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (6x^3 + 2x + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Криволінійна частина фасаду задається функцією

$$y = 28x - x^2.$$

Знайти точки перетину з віссю Oxі площу фасадного елемента.

Варіант 18

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 36x^2 - 24x + 12.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (14x^4 - 10x^2 + 6)\, dx.$$

Завдання 3. За допомогою заміни змінної обчислити

$$\int 2\,x(x^2 + 8)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x \ln(4x)\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x + 3)\, dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_2^5 (2x^2 - x + 4)\, dx.$$

Завдання 7. Арковий елемент споруди описується функцією

$$y = 30x - x^2.$$

Знайти ширину області по осі Oxта її площу.

Варіант 19

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 40x^3 + 12x^2 - 10.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (15x^5 - 9x^3 + 5x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 5\,x^4(x^5 + 3)^4\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \sin 5\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (5x^2 + 4x - 2)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^4 (x^2 + 3x + 2)\, dx.$$

Завдання 7. Поперечний переріз криволінійного будівельного елемента задається функцією

$$y = 32x - x^2.$$

Визначити межі перерізу та його площу.

Варіант 20

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної

$$f(x) = 42x^2 + 18x - 8.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (16x^4 + 8x^3 - 4x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 8\, x(4x^2 + 7)^2\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \cos 5\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (9x^2 - 4x + 3)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_1^4 (4x^2 + x - 1)\, dx.$$

Завдання 7. Контур аркового прорізу описується функцією

$$y = 34x - x^2.$$

Знайти точки перетину з віссю Ox, установити межі інтегрування та обчислити площу прорізу.

Варіант 21

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 45x^4 - 25x^2 + 15.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (17x^5 - 6x^3 + 9x)\, dx.$$

Завдання 3. Використовуючи заміну змінної, обчислити

$$\int 3\, x^2 (x^3 + 9)^3\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x\, e^{6x}\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^2 (10x^2 + 5x)\, dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_0^3 (3x^3 + 2x^2 + 1)\, dx.$$

Завдання 7. Криволінійний елемент фасаду має профіль

$$y = 36x - x^2.$$

Обчислити площу області між графіком функції та віссю Ox.

Варіант 22

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 48x^3 - 30x + 12.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (18x^4 - 12x^2 + 7)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 10\,x(5x^2+4)^4\,dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x\ln(5x)\,dx$$

методом інтегрування частинами.

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (6x^2-2x+4)\,dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_2^4 (5x^2-3x+2)\,dx.$$

Завдання 7. Поперечний профіль конструктивного елемента задається функцією

$$y=38x-x^2.$$

Визначити межі області та обчислити її площу.

Варіант 23

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x)=50x^2+20x-10.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (19x^5+7x^3-5x)\,dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 4\,x^3(x^4+6)^3\,dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x\sin 6\,x\,dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^4 (4x^2+3x+1)\,dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (7x^3 + x^2 + 2)\, dx.$$

Завдання 7. Арковий отвір будівлі моделюється функцією

$$y = 40x - x^2.$$

Визначити ширину отвору по осі Oxта обчислити площу його поперечного перерізу.

Варіант 24

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 54x^3 - 36x^2 + 18.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (20x^4 - 14x^2 + 8)\, dx.$$

Завдання 3. За допомогою заміни змінної обчислити

$$\int 6\, x^2 (2x^3 + 7)^2\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \cos 6\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (11x^2 + 2x - 1)\, dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_1^3 (6x^2 + 4x + 3)\, dx.$$

Завдання 7. Верхня межа поперечного перерізу будівельного елемента задана функцією

$$y = 42x - x^2.$$

Знайти точки перетину з віссю Oxта площу перерізу.

Варіант 25

Завдання 1. Знайти загальний вигляд первісної

$$f(x) = 55x^4 - 30x^2 + 20x.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (21x^5 - 8x^3 + 6x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 2\,x(x^2 + 10)^5\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x\, e^{7x}\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (7x^2 - 5x + 2)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^4 (2x^3 + x + 3)\, dx.$$

Завдання 7. Площа декоративного фасадного елемента обмежена кривою

$$y = 44x - x^2$$

та віссю Ox. Визначити межі інтегрування та обчислити площу елемента.

Варіант 26

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 60x^3 + 24x - 12.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (22x^4 + 10x^2 - 9)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 5\,x^4(x^5 + 8)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x \ln(6x)\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^3 (8x^2 + 3x + 2)\, dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_2^5 (3x^2 + 2x - 4)\, dx.$$

Завдання 7. Криволінійний профіль аркового елемента задається функцією

$$y = 46x - x^2.$$

Визначити точки перетину профілю з горизонтальною віссю та обчислити площу області.

Варіант 27

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 63x^2 - 28x + 14.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (23x^5 - 9x^3 + 7x)\, dx.$$

Завдання 3. Використовуючи метод заміни змінної, обчислити

$$\int 8\, x(4x^2 + 9)^3\, dx.$$

Завдання 4. Обчислити

$$\int x \sin 7\, x\, dx$$

методом інтегрування частинами.

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^4 (5x^2 + 2x - 3)\, dx.$$

Завдання 6. За формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^3 (4x^3 + 3x^2 + 2)\, dx.$$

Завдання 7. Поперечний переріз криволінійного будівельного елемента описується функцією

$$y = 48x - x^2.$$

Знайти межі області та обчислити площу перерізу.

Варіант 28

Завдання 1. Знайти первісну функції

$$f(x) = 64x^3 - 32x^2 + 16x.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (24x^4 - 16x^2 + 10)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 3\, x^2 (x^3 + 11)^4\, dx.$$

Завдання 4. Методом інтегрування частинами обчислити

$$\int x \cos 7\, x\, dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_0^2 (12x^2 - 5x + 4)\, dx.$$

Завдання 6. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити

$$\int_1^4 (7x^2 + x - 2)\, dx.$$

Завдання 7. Верхній контур фасадного елемента описується функцією

$$y = 50x - x^2.$$

Визначити точки перетину з віссю Ox, установити межі інтегрування та обчислити площу елемента.

Варіант 29

Завдання 1. Знайти первісну

$$f(x) = 70x^4 - 35x^2 + 14.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\int (25x^5 + 12x^3 - 8x)\, dx.$$

Завдання 3. Методом заміни змінної обчислити

$$\int 10\,x(5x^2+6)^2\,dx.$$

Завдання 4. Обчислити методом інтегрування частинами

$$\int x\,e^{8x}\,dx.$$

Завдання 5. Обчислити

$$\int_1^3 (9x^2+4x-5)\,dx.$$

Завдання 6. Знайти первісну та за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити

$$\int_0^2 (8x^3+3x+1)\,dx.$$

Завдання 7. Арковий конструктивний елемент має профіль

$$y = 52x - x^2.$$

Визначити ширину області по осі Oxта обчислити площу поперечного перерізу.

Варіант 30

Завдання 1. Знаходження первісної.

Для функції

$$f(x) = 72x^3 - 36x + 18$$

знайти загальний вигляд усіх первісних. Перевірити результат диференціюванням.

Завдання 2. Обчислення невизначеного інтеграла.

Обчислити

$$\int (26x^4 - 18x^2 + 12x - 5)\,dx.$$

Виконати перевірку отриманого результату диференціюванням.

Завдання 3. Метод заміни змінної.

Використовуючи відповідну заміну змінної, обчислити

$$\int 4\,x^3(x^4+12)^3\,dx.$$

У розв’язанні зазначити введену нову змінну та виконати зворотну підстановку.

Завдання 4. Інтегрування частинами.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити

$$\int x \ln(7x)\, dx.$$

Зазначити вибір uта dv.

Завдання 5. Визначений інтеграл.

Обчислити

$$\int_0^3 (10x^2 - 4x + 6)\, dx.$$

Завдання 6. Формула Ньютона-Лейбніца.

Для визначеного інтеграла

$$\int_1^4 (5x^3 + 2x^2 - 3x + 4)\, dx$$

знайти первісну $F(x)$, записати формулу Ньютона-Лейбніца та обчислити різницю $F(4) - F(1)$.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Поперечний контур аркового елемента будівлі у вибраній системі координат описується функцією

$$y = 54x - x^2.$$

Нижньою межею аркового елемента є вісь Ox.

Необхідно:

1. знайти точки перетину графіка функції з віссю Ox;
2. визначити межі інтегрування;
3. виконати схематичне зображення області;
4. скласти визначений інтеграл для обчислення площі;
5. знайти первісну підінтегральної функції;
6. застосувати формулу Ньютона-Лейбніца;
7. обчислити площу поперечного перерізу;

8. пояснити практичний зміст отриманого результату для визначення геометричних характеристик будівельного елемента.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

У **завданні 1** необхідно записати загальний вигляд первісної з довільною сталою C. За можливості результат необхідно перевірити диференціюванням.

У **завданні 2** необхідно використати властивості невизначеного інтеграла та таблицю основних інтегралів.

У **завданні 3** здобувач освіти повинен не тільки записати результат, але й показати введення нової змінної, перетворення диференціала та повернення до початкової змінної.

У **завданні 4** необхідно обґрунтовано вибрати функції для застосування формули інтегрування частинами.

У **завданнях 5 і 6** необхідно знайти первісну та правильно підставити верхню і нижню межі інтегрування.

У **завданні 7** обов'язковими є математична модель професійної задачі, визначення меж інтегрування, запис відповідного визначеного інтеграла, його обчислення та формулювання відповіді з урахуванням практичного змісту отриманої величини.

Такий підхід відповідає змісту робочої програми, у якій передбачено безпосереднє інтегрування, заміну змінної, інтегрування частинами та перевірку результату диференціюванням.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 4

Максимальна кількість балів — 7 балів.

№	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Знаходження первісної	**0,75 бала**
2	Обчислення невизначеного інтеграла	**0,75 бала**
3	Застосування методу заміни змінної	**1,00 бал**
4	Інтегрування частинами	**1,00 бал**
5	Обчислення визначеного інтеграла	**0,75 бала**

№	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
6	Застосування формули Ньютона-Лейбніца	**1,00 бал**
7	Професійно орієнтована задача	**1,75 бала**
	Разом	**7,00 балів**

Деталізація оцінювання за завданнями

Завдання 1 — 0,75 бала. Повна кількість балів виставляється, якщо правильно визначено первісну, виконано всі необхідні перетворення та записано довільну сталу $\boldsymbol{C}$.

Завдання 2 — 0,75 бала. Повна кількість балів виставляється за правильне застосування властивостей невизначеного інтеграла, правильне використання табличних інтегралів і правильний кінцевий результат.

Завдання 3 — 1,00 бал. Оцінюється правильність вибору заміни змінної, перетворення диференціала, обчислення інтеграла в новій змінній та виконання зворотної підстановки.

Завдання 4 — 1,00 бал. Необхідно правильно визначити $\boldsymbol{u}$та $\boldsymbol{dv}$, знайти $\boldsymbol{du}$і $\boldsymbol{v}$, застосувати формулу інтегрування частинами та отримати правильний результат.

Завдання 5 — 0,75 бала. Оцінюється правильне знаходження первісної, підстановка меж інтегрування та правильність арифметичних обчислень.

Завдання 6 — 1,00 бал. Здобувач освіти повинен знайти первісну $\boldsymbol{F(x)}$, правильно записати формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити значення первісної на верхній та нижній межах і знайти їх різницю.

Завдання 7 — 1,75 бала. Професійно орієнтована задача оцінюється комплексно: правильність аналізу умови; визначення геометричної або фізичної величини, яку необхідно знайти; визначення меж інтегрування; складання математичної моделі; правильне обчислення визначеного інтеграла; зазначення одиниць вимірювання; формулювання висновку відповідно до змісту задачі.

ЗАГАЛЬНІ РІВНІ ОЦІНЮВАННЯ

6,30–7,00 балів — високий рівень. Здобувач освіти правильно та послідовно виконує інтегрування, обґрунтовано обирає методи, правильно

застосовує формулу Ньютона-Лейбніца, самостійно складає математичну модель професійно орієнтованої задачі та правильно інтерпретує отриманий результат.

5,25–6,29 бала — достатній рівень. Основні методи інтегрального числення засвоєно. Можливі окремі незначні обчислювальні або алгебраїчні помилки, які не свідчать про нерозуміння способу розв’язування.

3,50–5,24 бала — середній рівень. Здобувач освіти володіє основними поняттями та алгоритмами, однак допускає помилки під час застосування заміни змінної, інтегрування частинами, формули Ньютона-Лейбніца або під час математичного моделювання професійної задачі.

1,75–3,49 бала — початковий рівень. Правильно виконано лише окремі завдання або їх частини. Знання мають фрагментарний характер, виникають суттєві труднощі під час самостійного вибору методу інтегрування.

0–1,74 бала — недостатній рівень. Основні практичні вміння з інтегрального числення не сформовані; більшість завдань не виконано або виконано неправильно.

ТИПОВІ ПОМИЛКИ

Під час знаходження первісної типовою помилкою є відсутність довільної сталої C. Для невизначеного інтеграла необхідно пам’ятати, що результатом є не одна функція, а сукупність первісних.

Під час інтегрування степеневої функції необхідно правильно збільшити показник степеня на одиницю та поділити на новий показник.

Під час застосування методу заміни змінної необхідно виконати заміну не тільки виразу, але й відповідного диференціала.

Під час інтегрування частинами необхідно правильно обирати uта dvі дотримуватися знаків.

Під час обчислення визначеного інтеграла поширеною помилкою є неправильний порядок підстановки меж. За формулою Ньютона-Лейбніца від значення первісної на верхній межі віднімається значення первісної на нижній межі.

У професійно орієнтованих задачах необхідно насамперед правильно встановити геометричну область, визначити межі інтегрування і тільки після цього складати визначений інтеграл.

ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ

Модульний контроль № 4 завершує змістовий модуль **«Інтегральне числення»**. За робочою програмою цей модуль включає самостійну роботу «Первісна та невизначений інтеграл», лекцію «Основні методи інтегрування», практичне заняття № 16 «Обчислення невизначених інтегралів», самостійну роботу «Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца», практичне заняття № 17 «Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи» і підсумкове практичне заняття № 18 «Рішення завдань за модулем 4».

Для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** математичний зміст модуля збережено. Професійне спрямування реалізовано через задачі на визначення площ поперечних перерізів, аркових і фасадних елементів та інших геометричних характеристик будівельних об'єктів. Це дозволяє перевіряти саме знання з вищої математики, водночас показуючи можливість їх застосування у майбутній професійній діяльності.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Оскільки практичне заняття № 18 є **модульним контролем**, окреме домашнє завдання, яке додатково оцінюється в балах, не передбачається.

Після перевірки модульного контролю здобувачам освіти необхідно проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні методи інтегрування та повторно виконати ті завдання, у яких були допущені помилки, з повним записом розв'язання.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: збірник індивідуальних завдань*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

4. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
5. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
6. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 19

Тема: Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку

Мета

Закріпити теоретичні знання про диференціальні рівняння першого порядку; сформувати практичні вміння визначати тип диференціального рівняння, знаходити загальний і частинний розв’язки; навчитися розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими та відокремлюваними змінними; удосконалити навички застосування початкових умов до знаходження частинного розв’язку; закріпити вміння розв’язувати лінійні диференціальні рівняння першого порядку; формувати вміння виконувати перевірку отриманого розв’язку.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 19 входить до змістового модуля 5 **«Диференціальні рівняння»** і має тему **«Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку»**. Робочою програмою передбачено визначення типу рівняння, відокремлення змінних, інтегрування обох частин, знаходження загального розв’язку, використання початкової умови для знаходження частинного розв’язку та перевірку отриманого результату.

Практичне заняття спирається на матеріал лекції 15 **«Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними»** та самостійної роботи 8 **«Диференціальні лінійні рівняння першого порядку»**.

Оснащення: опорні конспекти, конспект лекції 15, матеріали самостійної роботи 8, таблиця основних невизначених інтегралів, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування)

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Яке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
4. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння першого порядку?
5. Що називається розв’язком диференціального рівняння?

6. Що називається загальним розв’язком диференціального рівняння?
7. Що називається частинним розв’язком?
8. Чим загальний розв’язок відрізняється від частинного?
9. Що називається початковою умовою?
10. Що називається задачею Коші?
11. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними?
12. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними?
13. У чому полягає відокремлення змінних?
14. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час розв’язування рівняння з відокремлюваними змінними?
15. Що необхідно зробити після відокремлення змінних?
16. Чому під час інтегрування з’являється довільна стала?
17. Як можна записати сталу після інтегрування двох частин рівняння?
18. Як із загального розв’язку отримати частинний розв’язок?
19. Як використовується початкова умова $y(x_0) = y_0$?
20. Як виконується перевірка отриманого розв’язку?
21. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
22. Що називається коефіцієнтом при невідомій функції у лінійному диференціальному рівнянні?
23. Що називається правою частиною лінійного диференціального рівняння?
24. Яке лінійне диференціальне рівняння називається однорідним?
25. Яке лінійне диференціальне рівняння називається неоднорідним?
26. Чи може лінійне однорідне рівняння першого порядку бути розв’язане відокремленням змінних?
27. Яку роль відіграє інтегрування під час розв’язування диференціальних рівнянь?
28. Чому перед початком розв’язування необхідно визначити тип рівняння?

29. Які способи перевірки розв’язку диференціального рівняння можна застосувати?

30. Якої загальної послідовності доцільно дотримуватися під час розв’язування диференціального рівняння першого порядку?

Короткі теоретичні відомості

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні.

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку можна записати:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо рівняння можна розв’язати відносно похідної, воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y).$$

У навчальних матеріалах з диференціальних рівнянь першого порядку окремо розглядаються основні поняття, рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні рівняння першого порядку.

Загальний розв’язок

Загальним розв’язком диференціального рівняння першого порядку називають сім’ю функцій, що залежить від однієї довільної сталої:

$$y = \varphi(x, C).$$

Частинний розв’язок

Якщо задано початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

то з неї визначають значення довільної сталої C. Після підстановки знайденого значення отримують частинний розв’язок.

Знаходження розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє задану початкову умову, становить **задачу Коші**. Поняття задачі Коші входить до програмного матеріалу з диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Для його розв’язування необхідно розмістити вирази, що містять y, разом із dy, а вирази, що містять x, разом із dx.

За умови $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Після цього інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f\,(x)\,dx.$$

Отримане співвідношення містить довільну сталу Cі визначає загальний розв'язок рівняння.

Саме такий алгоритм — **розділити змінні, проінтегрувати обидві частини, знайти загальний розв'язок, використати початкову умову та виконати перевірку** — безпосередньо передбачений робочою програмою для практичного заняття 19.

Розв'язування прикладів

1. Розв'язати найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 3x^2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо диференціальне рівняння першого порядку, в якому похідна безпосередньо задана функцією незалежної змінної:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

2. Запишемо рівняння у диференціальній формі:

$$dy = 3x^2\,dx.$$

3. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int d\,y = \int 3\,x^2\,dx.$$

Отримаємо:

$$y = x^3 + C.$$

Це загальний розв’язок заданого диференціального рівняння.

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = (x^3 + C)' = 3x^2.$$

Отримана похідна збігається з правою частиною початкового рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y = x^3 + C}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 4x^3.$$

2. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 5x^4 - 2x.$$

2. Розв’язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними

Приклад

Розв’язати:

$$y\,dy = 2x\,dx.$$

Розв’язання

1. Визначимо тип рівняння.

Змінні вже відокремлені: вираз із yзнаходиться разом із dy, а вираз із x— разом із dx.

2. Інтегруємо обидві частини:

$$\int y\ dy = \int 2\,x\,dx.$$

Отримаємо:

$$\frac{y^2}{2} = x^2 + C_1.$$

Помножимо обидві частини на 2:

$$y^2 = 2x^2 + 2C_1.$$

Оскільки $2C_1$ також є довільною сталою, позначимо:

$$C = 2C_1.$$

Тоді:

$$y^2 = 2x^2 + C.$$

Це загальний розв’язок у неявній формі.

За потреби можна виразити y:

$$y = \pm\sqrt{2x^2 + C}.$$

Перевірка

Диференціюємо:

$$y^2 = 2x^2 + C.$$

Отримуємо:

$$2yy' = 4x.$$

Звідси:

$$yy' = 2x.$$

Оскільки $y' = dy/dx$, маємо:

$$y\,dy = 2x\,dx.$$

Отримано початкове рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = 2x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Розв’язати:

$$y\,dy = 3x^2\,dx.$$

2. Розв’язати:

$$2y\,dy = 4x^3\,dx.$$

3. Розв’язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв’язати:

$$y' = xy.$$

Розв’язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = x\,dx.$$

3. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\ dx.$$

Отримаємо:

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

4. Знайдемо функцію y.

Піднесемо обидві частини до степеня з основою e:

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C}.$$

Використаємо властивість показникової функції:

$$|y| = e^{C}e^{x^2/2}.$$

Довільний ненульовий множник разом зі знаком можна позначити новою сталою C:

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Такий запис охоплює також нульовий розв’язок $y = 0$, якщо дозволити $C = 0$.

Перевірка

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = Ce^{x^2/2} \cdot x.$$

Оскільки:

$$Ce^{x^2/2} = y,$$

то:

$$y' = xy.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{x^2/2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = 2xy.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 3x^2y.$$

4. Розв'язати рівняння, у якому необхідно попередньо відокремити змінні

Приклад

Розв'язати:

$$(1 + x^2)y' = 2xy.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1 + x^2}\, dx.$$

3. Проінтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx.$$

Ліва частина:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y|.$$

Для правої частини виконаємо заміну:

$$u = 1 + x^2,$$

$$du = 2x\, dx.$$

Тоді:

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

Оскільки $1 + x^2 > 0$, маємо:

$$\ln |y| = \ln(1 + x^2) + C.$$

4. Знайдемо y:

$$y = C(1 + x^2).$$

Перевірка

$$y = C(1 + x^2),$$

тому:

$$y' = 2Cx.$$

Ліва частина початкового рівняння:

$$(1 + x^2)y' = 2Cx(1 + x^2).$$

Права частина:

$$2xy = 2xC(1 + x^2).$$

Ліва і права частини рівні.

Відповідь:

$$\boxed{y = C(1 + x^2)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$(1 + x^2)y' = xy.$$

2. Розв’язати:

$$(1 + x)y' = 2y.$$

Задача Коші

Якщо разом із диференціальним рівнянням задано початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

необхідно знайти не всю сім’ю розв’язків, а конкретний частинний розв’язок, який проходить через задану точку (x_0, y_0).

5. Розв’язати задачу Коші

Приклад

Розв’язати диференціальне рівняння:

$$y' = 2xy$$

за початкової умови:

$$y(0) = 3.$$

Розв’язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\,x\,dx.$$

Отримуємо:

$$\ln|y| = x^2 + C.$$

Звідси:

$$y = Ce^{x^2}.$$

Це загальний розв’язок.

4. Використаємо початкову умову.

При:

$$x = 0,\ y = 3$$

маємо:

$$3 = Ce^0.$$

Оскільки:

$$e^0 = 1,$$

одержимо:

$$C = 3.$$

Отже, частинний розв’язок:

$$y = 3e^{x^2}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = 3e^{x^2} \cdot 2x = 6xe^{x^2}.$$

Перевіримо праву частину:

$$2xy = 2x \cdot 3e^{x^2} = 6xe^{x^2}.$$

Отже:

$$y' = 2xy.$$

Перевіримо початкову умову:

$$y(0) = 3e^0 = 3.$$

Початкова умова виконується.

Відповідь:

$$\boxed{y = 3e^{x^2}}.$$

Приклади для самостійного розв’язування

1. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 2.$$

2. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y,\ y(0) = 4.$$

6. Розв'язати рівняння з добутком функцій від різних змінних

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$y\,dy = x\,dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int y\ dy = \int x\ dx.$$

Отримуємо:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C.$$

Перевірка

Диференціюємо:

$$2yy' = 2x.$$

Отже:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{y}.$$

2. Розв'язати:

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

7. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{1+y}.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+y}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$(1+y)\,dy = 2x\,dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int (1+y)\,dy = \int 2\,x\,dx.$$

Отримаємо:

$$y + \frac{y^2}{2} = x^2 + C.$$

Це загальний розв'язок рівняння у неявній формі.

Перевірка

Диференціюємо обидві частини за x:

$$y' + yy' = 2x.$$

Винесемо y':

$$(1+y)y' = 2x.$$

Отже:

$$y' = \frac{2x}{1+y}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y + \frac{y^2}{2} = x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x^2}{1+y}.$$

2. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{2+y}.$$

8. Розв'язати диференціальне рівняння з тригонометричною функцією

Приклад

Розв'язати:

$$y' = y\cos x\,.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \cos x\ dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\ dx.$$

Отримуємо:

$$\ln|y| = \sin x + C.$$

4. Знайдемо y:

$$y = Ce^{\sin x}.$$

Значення $C = 0$також дає розв'язок $y = 0$.

Перевірка

$$y' = Ce^{\sin x}\cos x\,.$$

Оскільки:

$$y = Ce^{\sin x},$$

отримаємо:

$$y' = y\cos x\,.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{\sin x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = y\sin x\,.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 2y\cos x.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Відповідно до робочої програми перед практичним заняттям 19 здобувачі освіти опрацьовують самостійну роботу 8 «**Диференціальні лінійні рівняння першого порядку**». У переліку програмного матеріалу окремо передбачено лінійні диференціальні рівняння першого порядку та загальний підхід до їх розв'язування.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку записують у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Для практичного опрацювання використаємо метод Бернуллі, за яким шукану функцію подаємо як добуток:

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Після підстановки до початкового рівняння функції $u(x)$та $v(x)$добирають так, щоб послідовно звести задачу до інтегрування простіших рівнянь.

Навчальні джерела, використані в курсі, окремо розглядають лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

9. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння

Приклад

Розв'язати:

$$y' + 2y = 0.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку.

Перепишемо:

$$y' = -2y.$$

Це рівняння також є рівнянням з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = -2\,dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int d\,x.$$

Отримуємо:

$$\ln|y| = -2x + C.$$

Звідси:

$$y = Ce^{-2x}.$$

Перевірка

$$y' = -2Ce^{-2x}.$$

Підставимо до початкового рівняння:

$$y' + 2y = -2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{-2x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' + 3y = 0.$$

2. Розв'язати:

$$y' - 4y = 0.$$

10. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

Приклад

Розв'язати:

$$y' + y = x.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де:

$$P(x) = 1,\ Q(x) = x.$$

2. Виконаємо підстановку:

$$y = uv.$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо:

$$u'v + uv' + uv = x.$$

Згрупуємо:

$$u'v + u(v' + v) = x.$$

3. Виберемо функцію vтак, щоб:

$$v' + v = 0.$$

Тоді:

$$\frac{dv}{dx} = -v.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dv}{v} = -dx.$$

Інтегруємо:

$$\ln | v | = -x.$$

Для зручності одну сталу під час визначення допоміжної функції беремо рівною одиниці:

$$v = e^{-x}.$$

4. Знайдемо функцію u.

Після вибору vрівняння набуває вигляду:

$$u'v = x.$$

Отже:

$$u'e^{-x} = x.$$

Звідси:

$$u' = xe^{x}.$$

Інтегруємо:

$$u = \int x\, e^{x}\, dx.$$

Застосуємо інтегрування частинами:

$$\int x\, e^{x}\, dx = xe^{x} - e^{x} + C.$$

Тому:

$$u = e^{x}(x - 1) + C.$$

5. Повернемося до функції y:

$$y = uv.$$

Отже:

$$y = [e^{x}(x - 1) + C]e^{-x}.$$

Розкриємо:

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = 1 - Ce^{-x}.$$

Підставимо:

$$y' + y = 1 - Ce^{-x} + x - 1 + Ce^{-x}.$$

Отже:

$$y' + y = x.$$

Рівняння виконується.

Відповідь:

$$\boxed{y = x - 1 + Ce^{-x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' + y = 1.$$

2. Розв'язати:

$$y' + 2y = 2.$$

11. Розв'язати лінійне рівняння та знайти частинний розв'язок

Приклад

Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 1,$$
$$y(0) = 2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.

2. Знайдемо загальний розв'язок.

Виконаємо підстановку:

$$y = uv.$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо:

$$u'v + uv' + uv = 1.$$

Згрупуємо:

$$u'v + u(v' + v) = 1.$$

Виберемо:

$$v' + v = 0.$$

Звідси:

$$v = e^{-x}.$$

Тоді:

$$u'e^{-x} = 1.$$

Отже:

$$u' = e^{x}.$$

Інтегруємо:

$$u = e^{x} + C.$$

Повертаємося до y:

$$y = (e^{x} + C)e^{-x}.$$

Отже:

$$y = 1 + Ce^{-x}.$$

3. Використаємо початкову умову.

При:

$$x = 0,\ y = 2$$

маємо:

$$2 = 1 + Ce^{0}.$$

Отже:

$$C = 1.$$

Тому частинний розв’язок:

$$y = 1 + e^{-x}.$$

Перевірка

$$y' = -e^{-x}.$$

Тоді:

$$y' + y = -e^{-x} + 1 + e^{-x} = 1.$$

Початкова умова:

$$y(0) = 1 + e^{0} = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 1 + e^{-x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 2,\ y(0) = 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 2y = 4,\ y(0) = 1.$$

12. Розв'язати задачу Коші для рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{x}{y},\ y(0) = 2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$y\,dy = x\,dx.$$

3. Проінтегруємо:

$$\int y\ dy = \int x\ dx.$$

Отримуємо:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C.$$

4. Використаємо початкову умову:

$$y(0) = 2.$$

Підставимо:

$$2^2 = 0^2 + C.$$

Отже:

$$C = 4.$$

Маємо:

$$y^2 = x^2 + 4.$$

Звідси:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 4}.$$

Оскільки початкова умова вимагає:

$$y(0) = 2 > 0,$$

вибираємо додатну гілку:

$$y = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Перевірка

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Оскільки:

$$y = \sqrt{x^2 + 4},$$

то:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Крім того:

$$y(0) = \sqrt{4} = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{2x}{y},\ y(0) = 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{x}{1+y},\ y(0) = 1.$$

Загальний алгоритм розв'язування диференціального рівняння першого порядку

Під час виконання практичної роботи доцільно дотримуватися такої послідовності:

1. Записати задане диференціальне рівняння.
2. Визначити його порядок.
3. Визначити тип рівняння.
4. Вибрати відповідний метод розв'язування.
5. Якщо змінні відокремлюються — розмістити вирази з yі dyв одній частині, а вирази з xі dx— в іншій.
6. Проінтегрувати обидві частини.
7. Записати довільну сталу.
8. За можливості виразити шукану функцію y.
9. Записати загальний розв'язок.
10. Якщо задана початкова умова — визначити сталу C.
11. Записати частинний розв'язок.
12. Виконати перевірку підстановкою або диференціюванням.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайдіть загальні розв'язки найпростіших диференціальних рівнянь:

$$y' = 6x^2;$$

2.

$$y' = 4x^3 - 2x;$$

3.

$$y' = \cos x\,;$$

4.

$$y' = e^x.$$

2. Розв'яжіть рівняння з відокремленими або відокремлюваними змінними:

$$y' = 2xy;$$

2.

$$y' = \frac{3x^2}{y};$$

3.

$$y' = \frac{x}{1+y};$$

4.

$$y' = y\sin x\,;$$

5.

$$(1+x^2)y' = 2xy.$$

3. Розв'яжіть задачі Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 3;$$

2.

$$y' = \frac{x}{y},\ y(0) = 2;$$

3.

$$y' = 2xy,\ y(0) = 1;$$

4.

$$y' = y\cos x\,,\ y(0) = 2.$$

4. Розв'яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

$$y' + y = 0;$$

2.

$$y' + 2y = 0;$$

3.

$$y' + y = 2;$$

4.

$$y' + 2y = 4.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- визначати порядок диференціального рівняння;
- розпізнавати диференціальне рівняння першого порядку;
- визначати тип диференціального рівняння;
- розрізняти загальний і частинний розв’язки;
- правильно використовувати початкову умову;
- розуміти зміст задачі Коші;
- розпізнавати рівняння з відокремленими змінними;
- розпізнавати рівняння з відокремлюваними змінними;
- правильно відокремлювати змінні;
- інтегрувати обидві частини диференціального рівняння;
- знаходити загальний розв’язок;
- визначати довільну сталу за початковою умовою;
- знаходити частинний розв’язок;
- розпізнавати лінійні диференціальні рівняння першого порядку;
- розв’язувати найпростіші лінійні диференціальні рівняння першого порядку;
- перевіряти отриманий розв’язок;
- правильно і послідовно оформлювати математичні перетворення.

Робоча програма визначає для практичного заняття 19 форму звітності як **письмове розрахункове завдання**, а індивідуальна робота повинна передбачати

визначення типу та розв’язування заданих диференціальних рівнянь першого порядку.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття диференціального рівняння.
2. Порядок диференціального рівняння.
3. Диференціальне рівняння першого порядку.
4. Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку.
5. Розв’язок диференціального рівняння.
6. Загальний розв’язок.
7. Частинний розв’язок.
8. Початкова умова.
9. Задача Коші.
10. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
11. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
12. Алгоритм відокремлення змінних.
13. Інтегрування обох частин диференціального рівняння.
14. Довільна стала у загальному розв’язку.
15. Знаходження сталої за початковою умовою.
16. Перехід від загального розв’язку до частинного.
17. Перевірка розв’язку диференціального рівняння.
18. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
19. Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку.
20. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.
21. Загальний підхід до розв’язування лінійного рівняння.
22. Роль невизначеного інтеграла у розв’язуванні диференціальних рівнянь.
23. Вибір методу розв’язування залежно від типу рівняння.
24. Послідовність перевірки отриманого розв’язку.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 15 **«Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними»** та самостійної роботи 8 **«Диференціальні лінійні рівняння першого порядку»**. Робоча програма саме в такій послідовності передбачає опрацювання цих тем перед практичним заняттям 19.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить **п'ять повністю сформульованих завдань різного рівня складності**. Біля порядкового номера завдання кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання наведено після всіх тридцяти варіантів.

У кожному варіанті необхідно не лише записати відповідь, а **визначити тип рівняння, показати основні етапи розв'язування, знайти загальний або частинний розв'язок відповідно до умови та виконати перевірку одного з отриманих розв'язків**. Це відповідає послідовності виконання індивідуального завдання, установленій робочою програмою.

Варіант 1

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3.$$

2. Визначити тип диференціального рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2xy.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = \frac{2x}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші та знайти частинний розв'язок:

$$y' = xy,\ y(0) = 2.$$

5. Визначити тип і розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Виконати перевірку отриманого загального розв'язку:

$$y' + y = 1.$$

Варіант 2

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = 3x^2.$$

2. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 3xy.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2xy,\ y(0) = 3.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку та перевірити отриманий розв'язок:

$$y' + 2y = 2.$$

Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 5x^4.$$

2. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = x^2y.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{3x^2}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 4.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 3.$$

Варіант 4

1. Визначити тип та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2x + 3.$$

2. Відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2x^2 y.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{2x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3xy,\ y(0) = 1.$$

5. Визначити тип і розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 4y = 4.$$

Виконати перевірку отриманого розв'язку.

Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 6x^2 - 2x.$$

2. Визначити тип і розв'язати:

$$y' = y\cos x\,.$$

3. Відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2xy,\ y(0) = 5.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + y = 2.$$

Варіант 6

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3 + 2x.$$

2. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = y\sin x\,.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x}{2+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = x^2 y,\ y(0) = 2.$$

5. Розв’язати та перевірити лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2y = 4.$$

Варіант 7

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 7x^2.$$

2. Відокремити змінні та розв’язати:

$$y' = 4xy.$$

3. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = \frac{4x^3}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y\cos x\,,\ y(0) = 3.$$

5. Розв’язати лінійне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 6.$$

Варіант 8

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 2y\cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{2x}{2 + y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2 y,\ y(0) = 2.$$

5. Визначити тип, розв’язати та перевірити:

$$y' + 4y = 8.$$

Варіант 9

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 5x^4 - 3x^2.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 3y \sin x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{x^3}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 5.$$

5. Розв’язати лінійне рівняння та перевірити результат:

$$y' + 5y = 5.$$

Варіант 10

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 2x^5.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 5xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{4x}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y,\ y(0) = 3.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 2y = 6.$$

Варіант 11

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 6x^5.$$

2. Відокремити змінні та розв’язати:

$$y' = 2x^3y.$$

3. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = \frac{5x^4}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y\sin x\,,\ y(0) = 2.$$

5. Розв’язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 9.$$

Варіант 12

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 4x^3 - 6x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 3x^2 y.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{2x^2}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 4xy,\ y(0) = 1.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 4y = 12.$$

Варіант 13

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 8x^3.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 4y\cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{3x^2}{2+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 6.$$

5. Визначити тип, розв’язати рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 5y = 10.$$

Варіант 14

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 3x^4 + 2x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 5y \sin x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{6x}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2 y,\ y(0) = 4.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 6y = 6.$$

Варіант 15

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 10x^4.$$

2. Відокремити змінні та розв’язати:

$$y' = 6xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{4x^3}{1 + y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y \cos x\,,\ y(0) = 4.$$

5. Розв’язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 2y = 8.$$

Варіант 16

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 7x^6.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 2x^4 y.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{5x}{2 + y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3xy,\ y(0) = 2.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 3y = 12.$$

Варіант 17

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 5x^3 - 2x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 2y \sin x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{2x^3}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = x^2 y,\ y(0) = 5.$$

5. Розв’язати та перевірити лінійне рівняння:

$$y' + 4y = 16.$$

Варіант 18

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 9x^2 - 3.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 7xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{4x^2}{1 + y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 2xy,\ y(0) = 6.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 5y = 15.$$

Варіант 19

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 6x^4 + 2x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 3y\cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{8x^3}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y,\ y(0) = 1.$$

5. Розв’язати лінійне диференціальне рівняння та перевірити результат:

$$y' + 6y = 12.$$

Варіант 20

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 4x^5 - 2x^3.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 8xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{3x}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y\sin x\,,\ y(0) = 3.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 2y = 10.$$

Варіант 21

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 11x^2.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 4x^2y.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{5x^4}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 7.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 3y = 15.$$

Варіант 22

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 3x^5 + 4x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 5y\cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{6x^2}{2+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y,\ y(0) = 2.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 4y = 20.$$

Варіант 23

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 12x^3.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 9xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{4x}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y\cos x\,,\ y(0) = 5.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 5y = 20.$$

Варіант 24

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 8x^4 - 4x^2.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 6y \sin x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{2x^4}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 4xy,\ y(0) = 3.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 6y = 18.$$

Варіант 25

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 15x^2 - 5x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 10xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{7x^2}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y,\ y(0) = 4.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 2y = 12.$$

Варіант 26

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 5x^6.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 7y \cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{8x}{2+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = xy,\ y(0) = 8.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 3y = 18.$$

Варіант 27

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 7x^4 + 3x^2.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 8y \sin x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{3x^3}{1+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y,\ y(0) = 5.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 4y = 24.$$

Варіант 28

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 16x^3 - 2x.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 11xy.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{5x^2}{2+y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = y\cos x\,,\ y(0) = 6.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 5y = 25.$$

Варіант 29

1. Знайти загальний розв’язок:

$$y' = 9x^5 - 3x^2.$$

2. Розв’язати:

$$y' = 9y\cos x\,.$$

3. Розв’язати:

$$y' = \frac{6x^3}{y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші:

$$y' = 3xy,\ y(0) = 5.$$

5. Розв’язати та перевірити:

$$y' + 6y = 24.$$

Варіант 30

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв’язок:

$$y' = 10x^4 - 4x.$$

2. Визначити тип диференціального рівняння, відокремити змінні, проінтегрувати обидві частини та знайти загальний розв’язок:

$$y' = 12xy.$$

3. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти його загальний розв’язок:

$$y' = \frac{4x^3}{2 + y}.$$

4. Розв’язати задачу Коші, тобто знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє задану початкову умову:

$$y' = 2x^2y,\ y(0) = 6.$$

5. Визначити тип і розв’язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Записати загальний розв’язок та виконати його перевірку підстановкою у початкове рівняння:

$$y' + 5y = 30.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Визначення типу та знаходження загального розв’язку найпростішого диференціального рівняння першого порядку	0,25
2	Розв’язування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними	0,25
3	Відокремлення змінних, інтегрування та знаходження загального розв’язку	0,50
4	Розв’язування задачі Коші та знаходження частинного розв’язку	0,50
5	Розв’язування лінійного диференціального рівняння першого порядку та перевірка	0,50
Разом		**2,00**

2,00 бали

Усі п’ять завдань виконано правильно і повністю. Здобувач освіти правильно визначає тип диференціального рівняння, обґрунтовано вибирає метод розв’язування, правильно відокремлює змінні, інтегрує обидві частини, записує довільну сталу, знаходить загальний розв’язок, правильно використовує початкову умову, знаходить частинний розв’язок та виконує перевірку. Лінійне диференціальне рівняння розв’язано послідовно і математично правильно.

1,50–1,75 бала

Основні методи розв’язування засвоєно правильно. Здобувач освіти правильно визначає тип більшості рівнянь та правильно обирає спосіб розв’язування, але допускає окремі незначні арифметичні, алгебраїчні або інтеграційні помилки. Загальний хід розв’язування правильний.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання базового рівня та частину складніших завдань. Здобувач освіти розуміє принцип відокремлення змінних і знаходження загального розв’язку, але допускає помилки під час інтегрування, використання початкової умови або розв’язування лінійного рівняння.

0,50–0,75 бала

Правильно виконано лише окремі прості етапи. Здобувач освіти частково визначає тип рівняння, але має суттєві труднощі з відокремленням змінних, інтегруванням, визначенням довільної сталої або знаходженням частинного розв’язку.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння поняття диференціального рівняння першого порядку та алгоритмів його розв’язування.

Література

1. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. У посібнику окремо розглянуто загальні поняття та задачу Коші, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
2. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок. У першому розділі посібника розглянуто диференціальні рівняння першого порядку, зокрема основні поняття, рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні й лінійні рівняння першого порядку.
3. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
4. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
5. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум* : навчальний посібник для здобувачів ступеня

бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.

6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 19 — **«Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку»**.

Практичне заняття № 20

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема: Розв’язування диференціальних рівнянь другого порядку. Моделювання коливальних процесів

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Тривалість: 2 години

Вид заняття: практичне заняття з професійним спрямуванням

Мета заняття

Закріпити знання про диференціальні рівняння другого порядку та сформувати практичні вміння знаходити їх загальні й частинні розв’язки; навчити застосовувати початкові умови для розв’язування задачі Коші; сформувати розуміння можливостей використання диференціальних рівнянь другого порядку для побудови найпростіших математичних моделей коливальних процесів.

Сформувати вміння застосовувати математичний апарат диференціальних рівнянь до навчальних професійно орієнтованих задач спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія», пов’язаних із вільними коливаннями конструктивних елементів і спрощених пружних систем.

Здобувач освіти повинен знати

Поняття диференціального рівняння другого порядку; поняття загального та частинного розв’язку; характеристичне рівняння; залежність вигляду загального розв’язку від коренів характеристичного рівняння; поняття задачі Коші; математичну модель найпростішого вільного коливального процесу; зміст початкового зміщення та початкової швидкості.

Здобувач освіти повинен уміти

Визначати порядок диференціального рівняння; складати характеристичне рівняння; знаходити його корені; записувати загальний розв’язок диференціального рівняння; використовувати початкові умови; знаходити частинний розв’язок; розв’язувати найпростіші задачі на вільні коливання; пояснювати фізичний зміст отриманого результату.

Оснащення

Конспект лекцій, матеріали самостійної роботи з диференціальних рівнянь другого порядку, навчальні посібники з вищої математики, картки професійно орієнтованих завдань, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення алгоритму розв’язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
5. Розв’язування рівнянь із двома різними дійсними коренями характеристичного рівняння.
6. Розв’язування рівнянь із кратним дійсним коренем.
7. Розв’язування рівнянь із комплексно спряженими коренями.
8. Розв’язування задачі Коші.
9. Математичне моделювання вільних коливань.
10. Розв’язування професійно орієнтованих задач будівельного спрямування.
11. Самостійне виконання завдань.
12. Аналіз типових помилок.
13. Підведення підсумків.
14. Видача індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням другого порядку?
4. Що називають загальним розв’язком диференціального рівняння?
5. Що називають частинним розв’язком?
6. Що називають задачею Коші?

7. Скільки початкових умов необхідно задати для диференціального рівняння другого порядку?
8. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
9. Як складається характеристичне рівняння?
10. Який вигляд має загальний розв'язок за наявності двох різних дійсних коренів?
11. Який вигляд має загальний розв'язок за наявності кратного кореня?
12. Який вигляд має загальний розв'язок за наявності комплексно спряжених коренів?
13. Яке диференціальне рівняння описує найпростішу модель вільних гармонічних коливань?
14. Що характеризує функція $y(t)$у задачі про коливання?
15. Який фізичний зміст має похідна $y'(t)$?
16. Як за початковими умовами визначають сталі інтегрування?
17. Як диференціальні рівняння можуть використовуватися під час математичного моделювання процесів у будівництві?

Короткі теоретичні відомості

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$ay'' + by' + cy = 0,\ a \neq 0.$$

Для знаходження його загального розв'язку складають характеристичне рівняння

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Вигляд загального розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння.

Якщо r_1та r_2— різні дійсні корені, то

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь r, то

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}.$$

Якщо корені комплексно спряжені

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta\, x + C_2 \sin \beta\, x).$$

Для найпростішої навчальної моделі вільних незатухаючих коливань використовуємо рівняння

$$my'' + ky = 0,$$

де m— параметр маси системи, k— параметр жорсткості, $y(t)$— переміщення від положення рівноваги.

Після ділення на m:

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Якщо

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

то розв'язок має вигляд

$$y(t) = C_1 \cos \omega\, t + C_2 \sin \omega\, t.$$

У цьому занятті така модель використовується **як спрощена навчальна математична модель**, а не як повний нормативний розрахунок будівельної конструкції.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Диференціальне рівняння з двома різними дійсними коренями

У спрощеній математичній моделі зміна параметра y, що характеризує стан конструктивної системи, описується рівнянням

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Знайти загальний розв'язок.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Розкладемо ліву частину на множники:

$$(r - 2)(r - 3) = 0.$$

Отже,

$$r_1 = 2,\ r_2 = 3.$$

Оскільки отримали два різні дійсні корені, загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. У спрощеній математичній моделі параметр конструктивної системи описується рівнянням $y'' - 7y' + 12y = 0$. Скласти характеристичне рівняння та знайти загальний розв’язок.

2. Зміна параметра будівельної системи описується рівнянням $y'' - 6y' + 8y = 0$. Знайти корені характеристичного рівняння та записати загальний розв’язок.

Приклад 2. Рівняння з кратним коренем

У навчальній моделі зміна параметра конструктивного елемента описується диференціальним рівнянням

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Знайти загальний розв’язок.

Розв’язання

Характеристичне рівняння:

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

$$(r - 2)^2 = 0.$$

Отримуємо кратний корінь

$$r = 2.$$

Для кратного кореня загальний розв’язок записується:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Параметр конструктивного елемента описується рівнянням $y'' - 6y' + 9y = 0$. Знайти загальний розв'язок.

2. У математичній моделі будівельної системи задано рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$. Скласти характеристичне рівняння, визначити його корені та знайти загальний розв'язок.

Приклад 3. Рівняння з комплексними коренями

Коливальний процес спрощено описується рівнянням

$$y'' + 9y = 0.$$

Знайти загальний розв'язок.

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 9 = 0.$$

Звідси

$$r^2 = -9,$$

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

Маємо

$$\alpha = 0,\ \beta = 3.$$

Тому загальний розв'язок:

$$y = C_1 \cos 3\,x + C_2 \sin 3\,x.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = C_1 \cos 3\,x + C_2 \sin 3\,x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Вільний коливальний процес у спрощеній моделі конструктивного елемента описується рівнянням $y'' + 16y = 0$. Знайти загальний розв'язок.

2. Коливання умовної пружної системи описується рівнянням $y'' + 25y = 0$. Скласти характеристичне рівняння та знайти загальний розв'язок.

Приклад 4. Задача Коші

У навчальній моделі коливання конструктивного елемента описується рівнянням

$$y'' + 4y = 0.$$

У початковий момент часу

$$y(0) = 0{,}03,\ y'(0) = 0.$$

Знайти закон зміни переміщення $y(t)$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 + 4 = 0.$$

Його корені:

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Загальний розв'язок:

$$y(t) = C_1 \cos 2\,t + C_2 \sin 2\,t.$$

Знайдемо похідну:

$$y'(t) = -2C_1 \sin 2\,t + 2C_2 \cos 2\,t.$$

Використаємо першу початкову умову:

$$y(0) = C_1 = 0{,}03.$$

Отже,

$$C_1 = 0{,}03.$$

Використаємо другу початкову умову:

$$y'(0) = 2C_2 = 0.$$

Тому

$$C_2 = 0.$$

Отримуємо

$$y(t) = 0{,}03 \cos 2\,t.$$

Відповідь:

$$\boxed{y(t) = 0{,}03 \cos 2\,t}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Коливання конструктивного елемента описується рівнянням $y'' + 9y = 0$, причому $y(0) = 0{,}02$метра, $y'(0) = 0$. Знайти закон зміни переміщення.

2. Коливання спрощеної пружної системи описується рівнянням $y'' + 16y = 0$, причому $y(0) = 0{,}04$метра, $y'(0) = 0$. Знайти частинний розв'язок задачі Коші.

Приклад 5. Вільні коливання конструктивного елемента

У спрощеній навчальній моделі конструктивний елемент разом із приведеною масою характеризується параметром маси

$$m = 1000 \text{ кг}$$

та параметром жорсткості

$$k = 9000 \text{ Н/м}.$$

Початкове зміщення дорівнює $0{,}02$метра, а початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон вільних коливань.

Розв'язання

Для спрощеної моделі:

$$my'' + ky = 0.$$

Підставимо значення:

$$1000y'' + 9000y = 0.$$

Поділимо рівняння на 1000:

$$y'' + 9y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 9 = 0.$$

Корені:

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

Загальний розв'язок:

$$y(t) = C_1 \cos 3\,t + C_2 \sin 3\,t.$$

Початкові умови:

$$y(0) = 0{,}02,\ y'(0) = 0.$$

Із першої умови:

$$C_1 = 0{,}02.$$

Похідна:

$$y'(t) = -3C_1 \sin 3\,t + 3C_2 \cos 3\,t.$$

З другої умови:

$$3C_2 = 0,$$

отже,

$$C_2 = 0.$$

Тому

$$y(t) = 0{,}02 \cos 3\,t.$$

Відповідь: у межах прийнятої спрощеної математичної моделі закон вільних коливань:

$$\boxed{y(t) = 0{,}02 \cos 3\,t}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для спрощеної моделі конструктивного елемента $m = 500$кілограмів, $k = 8000$ньютонів на метр, $y(0) = 0{,}03$метра, $y'(0) = 0$. Скласти диференціальне рівняння та знайти закон вільних коливань.

2. Для умовної пружної системи будівельної конструкції $m = 400$кілограмів, $k = 3600$ньютонів на метр, $y(0) = 0{,}025$метра, $y'(0) = 0$. Визначити закон вільних коливань.

Приклад 6. Вільні коливання з ненульовою початковою швидкістю

Спрощена модель елемента перекриття описується рівнянням

$$y'' + 4y = 0.$$

Після початкового збурення

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0{,}06.$$

Знайти закон коливань.

Розв’язання

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 4 = 0.$$

Корені:

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Загальний розв’язок:

$$y(t) = C_1 \cos 2\,t + C_2 \sin 2\,t.$$

З першої початкової умови:

$$y(0) = C_1 = 0.$$

Похідна:

$$y'(t) = -2C_1 \sin 2\,t + 2C_2 \cos 2\,t.$$

При $t = 0$:

$$y'(0) = 2C_2 = 0{,}06.$$

Звідси

$$C_2 = 0{,}03.$$

Отже,

$$y(t) = 0{,}03 \sin 2\,t.$$

Відповідь:

$$\boxed{y(t) = 0{,}03 \sin 2\,t}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Коливання конструктивного елемента описується рівнянням $y'' + 9y = 0$. Початкові умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0{,}09$метра за секунду. Знайти закон коливань.

2. Коливання умовної пружної системи описується рівнянням $y'' + 16y = 0$. Початкові умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0{,}08$метра за секунду. Знайти частинний розв’язок.

Приклад 7. Коливання з початковим зміщенням і початковою швидкістю

У спрощеній математичній моделі коливання елемента будівельної конструкції описується рівнянням

$$y'' + 4y = 0,$$

причому

$$y(0) = 0{,}02,\ y'(0) = 0{,}04.$$

Визначити закон коливань.

Розв’язання

Загальний розв’язок рівняння:

$$y(t) = C_1 \cos 2\,t + C_2 \sin 2\,t.$$

З умови

$$y(0) = 0{,}02$$

отримуємо

$$C_1 = 0{,}02.$$

Похідна:

$$y'(t) = -2C_1 \sin 2\,t + 2C_2 \cos 2\,t.$$

При $t = 0$:

$$2C_2 = 0{,}04.$$

Тому

$$C_2 = 0{,}02.$$

Отже,

$$y(t) = 0{,}02 \cos 2\,t + 0{,}02 \sin 2\,t.$$

Відповідь:

$$\boxed{y(t) = 0{,}02 \cos 2\,t + 0{,}02 \sin 2\,t}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Коливання умовного елемента будівельної конструкції описується рівнянням $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0{,}03$метра, $y'(0) = 0{,}06$метра за секунду. Визначити закон коливань.

2. Для спрощеної моделі конструктивного елемента задано $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0{,}02$метра, $y'(0) = 0{,}08$метра за секунду. Знайти частинний розв’язок.

Завдання для самостійного розв’язування на занятті

Завдання 1. У спрощеній математичній моделі параметр конструктивної системи описується рівнянням $\boldsymbol{y'' - 5y' + 4y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння та знайти загальний розв'язок.

Завдання 2. Параметр конструктивного елемента описується рівнянням $\boldsymbol{y'' - 8y' + 16y = 0}$. Визначити тип коренів характеристичного рівняння та знайти загальний розв'язок.

Завдання 3. Вільні коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$. Знайти загальний розв'язок.

Завдання 4. Коливання елемента описується рівнянням $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, причому $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. У спрощеній моделі будівельної конструкції $\boldsymbol{m = 500}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 4500}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти диференціальне рівняння руху та знайти закон вільних коливань.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне професійно орієнтоване завдання

Кожен здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**.

Кожний варіант містить п'ять завдань:

1. розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку;
2. розв'язування рівняння другого порядку з іншим типом коренів характеристичного рівняння;
3. розв'язування задачі Коші;
4. визначення закону вільних коливань за заданим диференціальним рівнянням;
5. професійно орієнтована задача для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія» на спрощену модель вільних коливань.

30 ІНДИВІДУАЛЬНИХ ВАРІАНТІВ

Варіант 1

Завдання 1. Розв’язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені та записати загальний розв’язок.

Завдання 2. Розв’язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$. Визначити корені характеристичного рівняння та записати загальний розв’язок.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 4. Вільні коливання умовного конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, причому $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,08}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. У спрощеній моделі конструктивного елемента приведена маса становить 1000 кілограмів, а параметр жорсткості — 9000 ньютонів на метр. Початкове зміщення становить 0,02 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон вільних коливань.

Варіант 2

Завдання 1. Розв’язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 7y' + 12y = 0}$, склавши характеристичне рівняння та визначивши його корені.

Завдання 2. Розв’язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = 0}$та записати загальний розв’язок для випадку кратного кореня.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,10}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. Для спрощеної моделі елемента перекриття прийнято приведену масу 500 кілограмів і параметр жорсткості 8000 ньютонів на метр.

Початкове зміщення дорівнює 0,03 метра, початкова швидкість — нулю. Скласти диференціальне рівняння та знайти закон вільних коливань.

Варіант 3

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 6y' + 8y = 0}$. Знайти корені характеристичного рівняння та загальний розв'язок.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 6y' + 9y = 0}$. Визначити тип коренів та записати загальний розв'язок.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 16y = 0, y(0) = 0,02, y'(0) = 0}$.

Завдання 4. Вільні коливання конструктивної системи описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,06}$. Знайти закон коливань.

Завдання 5. У спрощеній моделі будівельної конструкції приведена маса становить 400 кілограмів, параметр жорсткості — 3600 ньютонів на метр. Початкове зміщення дорівнює 0,025 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Визначити диференціальне рівняння і закон коливань.

Варіант 4

Завдання 1. Розв'язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 8y' + 15y = 0}$, використовуючи характеристичне рівняння.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 8y' + 16y = 0}$та записати його загальний розв'язок.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 25y = 0, y(0) = 0,01, y'(0) = 0}$.

Завдання 4. Коливання елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,04}$. Знайти закон коливань.

Завдання 5. Для спрощеної моделі конструктивного елемента приведена маса дорівнює 250 кілограмів, параметр жорсткості — 4000 ньютонів на метр,

початкове зміщення — 0,02 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти рівняння та визначити закон вільних коливань.

Варіант 5

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 9y' + 20y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння та знайти загальний розв’язок.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 10y' + 25y = 0}$для випадку кратного кореня.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. Приведена маса спрощеної моделі елемента будівельної конструкції становить 500 кілограмів, параметр жорсткості — 4500 ньютонів на метр. Початкове зміщення становить 0,04 метра, а початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти рівняння руху та визначити закон вільних коливань.

Варіант 6

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 7y' + 10y = 0}$, визначивши корені характеристичного рівняння.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$та записати загальний розв’язок.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,04}$.

Завдання 4. Вільні коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. Для умовної пружної системи будівельної конструкції приведена маса становить 800 кілограмів, параметр жорсткості — 7200 ньютонів

на метр, початкове зміщення — 0,03 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти математичну модель та знайти закон коливань.

Варіант 7

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 10y' + 21y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = 0}$, врахувавши кратність кореня характеристичного рівняння.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,03}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. У спрощеній моделі елемента перекриття приведена маса дорівнює 200 кілограмів, параметр жорсткості — 1800 ньютонів на метр.

Початкове зміщення дорівнює 0,015 метра, початкова швидкість — нулю. Скласти диференціальне рівняння і знайти закон вільних коливань.

Варіант 8

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 9y' + 14y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,04}$.

Завдання 4. Визначити закон вільних коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 5. Для спрощеної пружної моделі конструктивного елемента $\boldsymbol{m = 600}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 9600}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон коливань.

Варіант 9

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 11y' + 30y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,01}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,06}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Знайти закон коливань.

Завдання 5. Приведена маса моделі конструктивного елемента становить 300 кілограмів, параметр жорсткості — 2700 ньютонів на метр. Початкове

зміщення — 0,025 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти диференціальне рівняння і визначити закон коливань.

Варіант 10

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 8y' + 12y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 10y' + 25y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,05}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 5. У спрощеній моделі елемента будівельної конструкції $\boldsymbol{m = 400}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 6400}$ньютонів на метр, початкове зміщення становить 0,03

метра, а початкова швидкість дорівнює нулю. Визначити рівняння та закон вільних коливань.

Варіант 11

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 12y' + 35y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,06}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,05}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. Для спрощеної моделі перекриття $\boldsymbol{m = 700}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 6300}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти диференціальне рівняння та знайти закон вільних коливань.

Варіант 12

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 13y' + 42y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 12y' + 36y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,01}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,08}$.

Завдання 4. Знайти закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Приведена маса конструктивної системи становить 900 кілограмів, параметр жорсткості — 8100 ньютонів на метр. Початкове зміщення

становить 0,035 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти рівняння і знайти закон коливань.

Варіант 13

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 6y' + 5y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 49y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,02}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,05}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Для навчальної моделі конструктивного елемента $\boldsymbol{m = 250}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 2250}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон вільних коливань.

Варіант 14

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 10y' + 16y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 8y' + 16y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,06}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,16}$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі будівельного елемента $\boldsymbol{m = 1000}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 16000}$ньютонів на метр, початкове зміщення дорівнює

0,025 метра, початкова швидкість — нулю. Скласти математичну модель і знайти закон коливань.

Варіант 15

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 14y' + 48y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 64y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,01}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,09}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Визначити закон коливань.

Завдання 5. У спрощеній моделі конструктивної системи $\boldsymbol{m = 500}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 12500}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти рівняння та визначити закон вільних коливань.

Варіант 16

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 9y' + 18y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 14y' + 49y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Для навчальної моделі елемента будівельної конструкції $\boldsymbol{m = 600}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 5400}$ньютонів на метр, початкове зміщення — 0,03 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти рівняння та знайти закон вільних коливань.

Варіант 17

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 11y' + 24y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 81y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,10}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,15}$.

Завдання 5. Приведена маса умовного конструктивного елемента становить 400 кілограмів, параметр жорсткості — 10000 ньютонів на метр, початкове зміщення — 0,02 метра, початкова швидкість — нуль. Визначити закон вільних коливань.

Варіант 18

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 15y' + 56y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 12y' + 36y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,08}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі будівельної конструкції $\boldsymbol{m = 800}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 12800}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,025}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти рівняння та знайти закон коливань.

Варіант 19

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 12y' + 27y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 100y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 4. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Знайти закон коливань.

Завдання 5. Для навчальної пружної моделі конструктивного елемента $\boldsymbol{m = 300}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 4800}$ньютонів на метр, початкове зміщення дорівнює 0,04

метра, початкова швидкість — нулю. Скласти рівняння та визначити закон вільних коливань.

Варіант 20

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 13y' + 36y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 16y' + 64y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,08}$.

Завдання 4. Знайти закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,20}$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі конструктивної системи $\boldsymbol{m = 900}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 22500}$ньютонів на метр, початкове зміщення — 0,02 метра, початкова швидкість — нуль. Визначити диференціальне рівняння і закон вільних коливань.

Варіант 21

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 16y' + 63y = 0}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 121y = 0}$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,15}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,05}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Приведена маса спрощеної моделі елемента перекриття становить 500 кілограмів, параметр жорсткості — 18000 ньютонів на метр,

початкове зміщення — 0,03 метра, початкова швидкість — нуль. Скласти рівняння та визначити закон коливань.

Варіант 22

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 14y' + 45y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 18y' + 81y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,01}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі будівельного елемента $\boldsymbol{m = 700}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 11200}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,025}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти диференціальне рівняння та знайти закон коливань.

Варіант 23

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 17y' + 72y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 144y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,10}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,16}$.

Завдання 5. Для навчальної моделі конструктивної системи $\boldsymbol{m = 400}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 14400}$ньютонів на метр, початкове зміщення — 0,02 метра, початкова швидкість — нуль. Визначити рівняння і закон вільних коливань.

Варіант 24

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 15y' + 50y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 20y' + 100y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 9y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,09}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $y'' + 25y = 0$, якщо $y(0) = 0,03$, $y'(0) = 0$.

Завдання 5. У спрощеній моделі конструктивного елемента $m = 600$кілограмів, $k = 21600$ньютонів на метр, $y(0) = 0,015$метра, $y'(0) = 0$. Скласти математичну модель та знайти закон коливань.

Варіант 25

Завдання 1. Розв'язати рівняння $y'' - 18y' + 77y = 0$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $y'' + 169y = 0$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0,02$, $y'(0) = 0,16$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $y'' + 36y = 0$, $y(0) = 0,04$, $y'(0) = 0$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі елемента будівельної конструкції $m = 800$кілограмів, $k = 28800$ньютонів на метр, початкове зміщення дорівнює 0,025 метра, початкова швидкість — нулю. Скласти рівняння та знайти закон вільних коливань.

Варіант 26

Завдання 1. Розв'язати рівняння $y'' - 19y' + 88y = 0$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $y'' - 22y' + 121y = 0$.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші $y'' + 25y = 0$, $y(0) = 0,01$, $y'(0) = 0,20$.

Завдання 4. Визначити закон коливань системи $y'' + 9y = 0$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 0,18$.

Завдання 5. Приведена маса навчальної моделі елемента перекриття становить 1000 кілограмів, параметр жорсткості — 36000 ньютонів на метр.

Початкове зміщення становить 0,02 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон коливань.

Варіант 27

Завдання 1. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' - 20y' + 91y = 0}$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{y'' + 196y = 0}$.

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0,05}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$.

Завдання 4. Визначити закон коливань за рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, якщо $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$.

Завдання 5. Для спрощеної моделі конструктивної системи $\boldsymbol{m = 300}$кілограмів, $\boldsymbol{k = 10800}$ньютонів на метр, $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Скласти рівняння і знайти закон вільних коливань.

Варіант 28

Завдання 1. Для параметра умовної будівельної системи задано диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 21y' + 110y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, визначити їх тип та записати загальний розв’язок диференціального рівняння.

Завдання 2. Розв’язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' - 24y' + 144y = 0}$. Показати, що характеристичне рівняння має кратний корінь, і записати відповідну форму загального розв’язку.

Завдання 3. Коливальний процес описується рівнянням $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$. Відомо, що $\boldsymbol{y(0) = 0,02}$метра, а $\boldsymbol{y'(0) = 0,18}$метра за секунду. Розв’язати задачу Коші та записати закон зміни переміщення залежно від часу.

Завдання 4. Вільні коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 25y = 0}$. У початковий момент елемент проходить через положення рівноваги, тобто $\boldsymbol{y(0) = 0}$, із початковою швидкістю $\boldsymbol{y'(0) = 0,25}$метра за секунду. Знайти закон вільних коливань.

Завдання 5. У спрощеній навчальній моделі елемента будівельної конструкції приведена маса становить 500 кілограмів, а параметр жорсткості — 18000 ньютонів на метр. Початкове зміщення елемента від положення рівноваги дорівнює 0,025 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти

диференціальне рівняння виду $\boldsymbol{my'' + ky = 0}$, привести його до стандартного вигляду, знайти загальний розв'язок та, використовуючи початкові умови, визначити закон вільних коливань.

Варіант 29

Завдання 1. У математичній моделі зміна параметра конструктивної системи описується диференціальним рівнянням $\boldsymbol{y'' - 22y' + 120y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння, визначити його корені та записати загальний розв'язок.

Завдання 2. Розв'язати диференціальне рівняння $\boldsymbol{y'' + 225y = 0}$. Скласти характеристичне рівняння, знайти комплексно спряжені корені та записати загальний розв'язок через тригонометричні функції.

Завдання 3. Коливання конструктивного елемента описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$, причому початкове зміщення становить $\boldsymbol{y(0) = 0,04}$метра, а початкова швидкість $\boldsymbol{y'(0) = 0,12}$метра за секунду. Розв'язати задачу Коші та визначити закон коливань.

Завдання 4. Спрощена пружна система будівельної конструкції здійснює вільні коливання, які описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 36y = 0}$. У початковий момент $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$метра, $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Визначити закон зміни переміщення системи.

Завдання 5. Для навчальної моделі конструктивного елемента прийнято приведену масу 700 кілограмів та параметр жорсткості 25200 ньютонів на метр. Початкове зміщення становить 0,02 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння руху, визначити параметр $\boldsymbol{\omega}$та знайти закон вільних коливань конструктивного елемента.

Варіант 30

Завдання 1. У спрощеній математичній моделі параметр конструктивної системи описується диференціальним рівнянням $\boldsymbol{y'' - 23y' + 132y = 0}$. Необхідно скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, визначити їх тип та записати повний загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Завдання 2. Параметр умовної будівельної системи описується диференціальним рівнянням $\boldsymbol{y'' - 26y' + 169y = 0}$. Скласти характеристичне

рівняння, встановити кратність його кореня та записати загальний розв’язок, що відповідає отриманому типу коренів.

Завдання 3. Вільний коливальний процес описується диференціальним рівнянням $\boldsymbol{y'' + 49y = 0}$. Початкове зміщення дорівнює $\boldsymbol{y(0) = 0,03}$метра, а початкова швидкість — $\boldsymbol{y'(0) = 0,14}$метра за секунду. Розв’язати задачу Коші, визначити сталі інтегрування та записати закон зміни переміщення залежно від часу.

Завдання 4. У спрощеній моделі конструктивний елемент здійснює вільні коливання, які описуються рівнянням $\boldsymbol{y'' + 64y = 0}$. У початковий момент елемент проходить через положення рівноваги, тобто $\boldsymbol{y(0) = 0}$, а його початкова швидкість становить $\boldsymbol{y'(0) = 0,24}$метра за секунду. Знайти закон вільних коливань та пояснити фізичний зміст початкових умов.

Завдання 5. У спрощеній навчальній моделі елемента будівельної конструкції приведена маса становить 800 кілограмів, а параметр жорсткості — 51200 ньютонів на метр. Початкове зміщення елемента від положення рівноваги дорівнює 0,02 метра, а початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань, привести його до стандартного вигляду, скласти характеристичне рівняння, знайти загальний розв’язок та за початковими умовами визначити закон зміни переміщення елемента з часом.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Максимальна кількість балів — 5 балів.

Завдання	**Зміст уміння, яке оцінюється**	**Максимальна кількість балів**
1	Складання характеристичного рівняння, визначення його коренів і знаходження загального розв’язку	**0,75**
2	Правильне врахування типу коренів характеристичного рівняння та знаходження загального розв’язку	**0,75**
3	Розв’язування задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку	**1,00**

Завдання	Зміст уміння, яке оцінюється	Максимальна кількість балів
4	Визначення закону вільних коливань за заданим диференціальним рівнянням і початковими умовами	**1,00**
5	Побудова та розв’язування професійно орієнтованої математичної моделі коливального процесу	**1,50**
Разом		**5,00 балів**

Деталізація оцінювання професійного завдання

За завдання 5 здобувач освіти може отримати максимально 1,50 бала:

правильне складання диференціального рівняння за умовою задачі — **0,30 бала**; приведення рівняння до стандартного вигляду — **0,20 бала**; правильне складання та розв’язування характеристичного рівняння — **0,25 бала**; запис загального розв’язку — **0,25 бала**; правильне використання початкових умов — **0,25 бала**; правильна відповідь та пояснення фізичного змісту отриманого закону — **0,25 бала**.

Типові помилки

Найчастіше здобувачі освіти плутають диференціальне рівняння з відповідним характеристичним рівнянням. У характеристичному рівнянні похідні замінюються відповідними степенями параметра r.

Необхідно правильно визначати тип коренів характеристичного рівняння. Для двох різних дійсних коренів, кратного дійсного кореня та комплексно спряжених коренів використовуються різні форми загального розв’язку.

Під час розв’язування задачі Коші необхідно спочатку знайти **загальний розв’язок**, потім його продиференціювати і лише після цього послідовно використати умови $y(0)$та $y'(0)$.

У професійно орієнтованій задачі необхідно розрізняти початкове переміщення та початкову швидкість. Перша величина визначає положення системи в початковий момент, друга — швидкість зміни цього положення.

Модель

$$my'' + ky = 0$$

є спрощеною моделлю вільних незатухаючих коливань. У реальних будівельних конструкціях можуть враховуватися демпфування, зовнішні впливи,

розподілені параметри та інші чинники, які в межах цього практичного заняття не розглядаються.

Підведення підсумків

Практичне заняття № 20 завершує практичне опрацювання диференціальних рівнянь другого порядку перед підсумковим розв'язуванням завдань змістового модуля 5. У робочій програмі його тема сформульована як **«Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. Моделювання коливальних процесів»**.

Професійне спрямування для спеціальності **G19 «Будівництво та цивільна інженерія»** реалізовано через спрощені навчальні моделі коливань конструктивних елементів і пружних систем. Основне завдання полягає не у виконанні повного інженерного динамічного розрахунку споруди, а у формуванні вміння **перейти від професійної умови до диференціального рівняння, розв'язати його та інтерпретувати отриманий результат**.

Питання для підготовки

1. Що називають диференціальним рівнянням другого порядку?
2. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Як складають характеристичне рівняння?
4. Як записується загальний розв'язок за двох різних дійсних коренів?
5. Як записується загальний розв'язок за кратного кореня?
6. Як записується загальний розв'язок за комплексно спряжених коренів?
7. Що називають задачею Коші?
8. Чому для диференціального рівняння другого порядку необхідні дві початкові умови?
9. Який фізичний зміст має $y(t)$у задачі про коливання?
10. Який фізичний зміст має $y'(t)$?
11. Який вигляд має найпростіша модель вільних незатухаючих коливань?
12. Що характеризує параметр mу моделі $my'' + ky = 0$?
13. Що характеризує параметр k?
14. Як визначається параметр ω?

15. Як початкове зміщення впливає на частинний розв’язок?
16. Як початкова швидкість впливає на частинний розв’язок?
17. Чому математична модель вільних незатухаючих коливань є лише спрощенням реального процесу?
18. Яке значення мають диференціальні рівняння для математичного моделювання процесів у будівництві та цивільній інженерії?

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: збірник індивідуальних завдань*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: практикум*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння : навчальний посібник*. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
6. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
7. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.

Практичне заняття № 21

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 5

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема: Рішення завдань за модулем 5

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Форма контролю: письмова комплексна індивідуальна робота із захистом отриманих результатів

Максимальна кількість балів: 8 балів

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань та практичних умінь з теми «Диференціальні рівняння»; уміння визначати тип диференціального рівняння, розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, використовувати початкові умови для знаходження частинного розв’язку, розв’язувати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Перевірити вміння складати характеристичне рівняння, визначати його корені, записувати загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку та застосовувати диференціальні рівняння до спрощеного математичного моделювання процесів, пов’язаних із будівельними конструкціями.

Робоча програма модуля 5 охоплює диференціальні рівняння першого порядку, рівняння з відокремлюваними змінними, лінійні диференціальні рівняння першого порядку, диференціальні рівняння другого порядку та математичні моделі механічних процесів.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

Структура індивідуального варіанта

Кожний із **30 варіантів** містить шість повністю сформульованих завдань:

1. диференціальне рівняння першого порядку;
2. задача Коші з початковою умовою;
3. диференціальне рівняння другого порядку;
4. складання та розв’язування характеристичного рівняння;
5. визначення загального розв’язку диференціального рівняння другого порядку;
6. професійно орієнтована задача для спеціальності G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

Саме ці складові встановлено робочою програмою для практичного заняття № 21.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Диференціальне рівняння першого порядку.

Визначити тип диференціального рівняння та знайти його загальний розв’язок:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Відокремити змінні, проінтегрувати обидві частини та записати загальний розв’язок.

Завдання 2. Задача Коші.

Розв’язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 3xy,$$

якщо задано початкову умову $y(0) = 2$. Знайти частинний розв’язок і виконати перевірку.

Завдання 3. Диференціальне рівняння другого порядку.

Визначити порядок і вид рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Пояснити, чому воно належить до лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Завдання 4. Характеристичне рівняння.

Для рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти його корені.

Завдання 5. Загальний розв'язок.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 8y' + 15y = 0.$$

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Вільні коливання спрощеної моделі конструктивного елемента будівлі описуються рівнянням

$$y'' + 9y = 0,$$

де $y(t)$— відхилення елемента від положення рівноваги в момент часу t. Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, записати загальний закон коливань та пояснити фізичний зміст функції $y(t)$, першої і другої похідних.

Варіант 2

Завдання 1. Визначити тип і знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 3xy.$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,\ y(0) = 3.$$

Знайти частинний розв'язок та перевірити його.

Завдання 3. Визначити порядок і вид рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 9y' + 20y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 10y' + 21y = 0.$$

Завдання 6. Коливання конструктивного елемента споруди описуються рівнянням

$$y'' + 16y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, записати загальний розв'язок та пояснити, які величини характеризують $y(t)$, $y'(t)$і $y''(t)$.

Варіант 3

Завдання 1. Визначити тип та розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 4xy.$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = xy,\ y(0) = 4.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид диференціального рівняння

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' - 11y' + 30y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 9y' + 14y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання спрощеної розрахункової моделі балки описуються рівнянням

$$y'' + 25y = 0.$$

Визначити характеристичне рівняння, його корені, записати загальний закон коливань та пояснити зміст отриманого розв'язку.

Варіант 4

Завдання 1. Визначити тип і знайти загальний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = 5xy.$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,\ y(1) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид рівняння

$$y'' - 8y' + 12y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 10y' + 24y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Завдання 6. Коливання елемента каркаса в спрощеній математичній моделі описуються рівнянням

$$y'' + 36y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань та пояснити фізичний зміст параметрів математичної моделі.

Варіант 5

Завдання 1. Визначити тип і розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 6xy.$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 3xy,\ y(0) = 5.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 9y' + 18y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння та знайти його корені для

$$y'' - 12y' + 35y = 0.$$

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 11y' + 28y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання елемента будівельної конструкції описуються рівнянням

$$y'' + 49y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти корені, записати загальний розв'язок і визначити кутову частоту коливань.

Варіант 6

Завдання 1. Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y+1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид рівняння

$$y'' - 10y' + 16y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' - 13y' + 40y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' - 12y' + 32y = 0.$$

Завдання 6. Коливальний процес конструктивного елемента описується рівнянням

$$y'' + 4y = 0.$$

Знайти загальний закон вільних коливань і пояснити фізичний зміст похідних $y'(t)$та $y''(t)$.

Варіант 7

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 3x(y+2).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y+2),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 11y' + 24y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння та знайти корені:

$$y'' - 14y' + 45y = 0.$$

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 13y' + 36y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель вільних коливань перекриття описується рівнянням

$$y'' + 64y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, записати закон коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 8

Завдання 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 4x(y + 1).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(y + 3),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 12y' + 20y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння:

$$y'' - 15y' + 54y = 0.$$

Знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 14y' + 40y = 0.$$

Завдання 6. Коливання конструктивного елемента споруди описуються рівнянням

$$y'' + 81y = 0.$$

Знайти загальний розв'язок, визначити кутову частоту та пояснити фізичний зміст отриманої функції.

Варіант 9

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 5x(y + 2).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y+1),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити вид рівняння

$$y'' - 13y' + 30y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' - 16y' + 63y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 15y' + 44y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання спрощеної моделі балки описуються рівнянням

$$y'' + 100y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань, кутову частоту та пояснити значення $y(t)$, $y'(t)$і $y''(t)$.

Варіант 10

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 6x(y+1).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 3x(y+2),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 14y' + 33y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' - 17y' + 72y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 16y' + 48y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання елемента будівельної конструкції задані рівнянням

$$y'' + 121y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 11

Завдання 1. Визначити тип і розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та визначити його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель коливань конструктивного елемента описується рівнянням

$$y'' + 144y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань, кутову частоту та пояснити фізичний зміст розв’язку.

Варіант 12

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 3x(y-2).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y-1),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити вид рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння та знайти корені:

$$y'' - 12y' + 36y = 0.$$

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' - 14y' + 49y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання елемента перекриття описуються рівнянням

$$y'' + 169y = 0.$$

Визначити характеристичне рівняння, корені, загальний розв’язок і кутову частоту.

Варіант 13

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 4x(y - 1).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв’язок

$$\frac{dy}{dx} = x(y - 2),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння:

$$y'' - 16y' + 64y = 0.$$

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' - 18y' + 81y = 0.$$

Завдання 6. Коливання конструктивного елемента будівлі описуються рівнянням

$$y'' + 196y = 0.$$

Знайти закон вільних коливань і кутову частоту системи.

Варіант 14

Завдання 1. Розв’язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 5x(y - 3).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 2),\ y(0) = 4.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' - 12y' + 36y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' - 20y' + 100y = 0.$$

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 22y' + 121y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель коливань балки описується рівнянням

$$y'' + 225y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань, визначити кутову частоту та пояснити фізичний зміст розв'язку.

Варіант 15

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 6x(y - 2).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 3x(y - 1),\ y(0) = 4.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' + 7y' + 12y = 0$$

та знайти корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 8y' + 15y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання елемента конструкції описуються рівнянням

$$y'' + 256y = 0.$$

Знайти характеристичне рівняння, корені, загальний закон коливань та кутову частоту.

Варіант 16

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2y + 1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(2y + 1),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' + 6y' + 8y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння:

$$y'' + 9y' + 20y = 0.$$

Знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' + 10y' + 21y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель коливань елемента каркаса описується рівнянням

$$y'' + 289y = 0.$$

Знайти закон вільних коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 17

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 3x(2y + 1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2y + 1),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити вид рівняння

$$y'' + 7y' + 10y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння

$$y'' + 11y' + 30y = 0$$

та знайти корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 9y' + 14y = 0.$$

Завдання 6. Коливання спрощеної моделі конструктивного елемента описуються рівнянням

$$y'' + 324y = 0.$$

Знайти загальний розв'язок та визначити кутову частоту коливань.

Варіант 18

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 4x(2y + 3).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = x(2y + 3),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' + 8y' + 12y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' + 10y' + 24y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 7y' + 10y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання елемента перекриття описуються рівнянням

$$y'' + 361y = 0.$$

Знайти характеристичне рівняння, корені, загальний закон коливань і кутову частоту.

Варіант 19

Завдання 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 5x(2y + 1).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2y + 3),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' + 9y' + 18y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' + 12y' + 35y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 11y' + 28y = 0.$$

Завдання 6. Коливання елемента будівельної конструкції описуються рівнянням

$$y'' + 400y = 0.$$

Знайти загальний закон вільних коливань, кутову частоту та пояснити фізичний зміст $y(t)$.

Варіант 20

Завдання 1. Визначити тип і розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 6x(2y + 1).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 3x(2y + 1),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' + 10y' + 16y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння

$$y'' + 13y' + 40y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 12y' + 32y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання спрощеної моделі балки описуються рівнянням

$$y'' + 441y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, записати закон коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 21

Завдання 1. Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = 2x(3y + 1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(3y + 1),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

скласти характеристичне рівняння, знайти дискримінант і корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання конструктивного елемента описуються рівнянням

$$y'' + 484y = 0.$$

Визначити характеристичне рівняння, його корені, загальний закон коливань і кутову частоту.

Варіант 22

Завдання 1. Розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 3x(3y + 2).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв’язок

$$\frac{dy}{dx} = 2x(3y + 1),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння для

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

та знайти його комплексні корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель коливань конструктивного елемента будівлі описується рівнянням

$$y'' + 529y = 0.$$

Знайти закон вільних коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 23

Завдання 1. Визначити тип і розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 4x(3y + 1).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(3y + 2),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 6y' + 18y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 8y' + 20y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання спрощеної моделі елемента каркаса описуються рівнянням

$$y'' + 576y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти корені, записати загальний закон коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 24

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 5x(3y + 2).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(3y + 1),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' + 6y' + 18y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння

$$y'' + 8y' + 20y = 0$$

та знайти комплексні корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 4y' + 8y = 0.$$

Завдання 6. Коливання елемента будівельної конструкції описуються рівнянням

$$y'' + 625y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань, визначити кутову частоту та пояснити фізичний зміст першої і другої похідних.

Варіант 25

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 6x(3y + 1).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = 3x(3y + 2),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' - 8y' + 25y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 10y' + 29y = 0$$

скласти характеристичне рівняння і знайти корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель вільних коливань елемента перекриття описується рівнянням

$$y'' + 676y = 0.$$

Знайти характеристичне рівняння, його корені, загальний закон коливань і кутову частоту.

Варіант 26

Завдання 1. Розв’язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2x(4y + 1).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = x(4y + 1),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' + 8y' + 25y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння

$$y'' + 10y' + 29y = 0$$

та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання конструктивного елемента описуються рівнянням

$$y'' + 729y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань та визначити кутову частоту.

Варіант 27

Завдання 1. Визначити тип і розв’язати

$$\frac{dy}{dx} = 3x(4y + 2).$$

Завдання 2. Розв’язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(4y + 1),\ y(0) = 1.$$

Завдання 3. Визначити порядок та вид

$$y'' - 10y' + 34y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 12y' + 40y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти комплексні корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 8y' + 20y = 0.$$

Завдання 6. Спрощена модель коливань балки описується рівнянням

$$y'' + 784y = 0.$$

Скласти характеристичне рівняння, знайти корені, записати закон коливань і визначити кутову частоту.

Варіант 28

Завдання 1. Розв'язати

$$\frac{dy}{dx} = 4x(4y + 1).$$

Завдання 2. Знайти частинний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = x(4y + 2),\ y(0) = 2.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' + 10y' + 34y = 0.$$

Завдання 4. Скласти характеристичне рівняння

$$y'' + 12y' + 40y = 0$$

та знайти комплексні корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 8y' + 20y = 0.$$

Завдання 6. Коливання елемента каркаса будівлі описуються рівнянням

$$y'' + 841y = 0.$$

Знайти характеристичне рівняння, корені, загальний закон коливань і кутову частоту.

Варіант 29

Завдання 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 5x(4y + 2).$$

Завдання 2. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = 2x(4y + 1),\ y(0) = 3.$$

Завдання 3. Визначити порядок і вид

$$y'' - 12y' + 45y = 0.$$

Завдання 4. Для рівняння

$$y'' - 14y' + 53y = 0$$

скласти характеристичне рівняння та знайти його корені.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок

$$y'' - 10y' + 29y = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання конструктивного елемента споруди описуються рівнянням

$$y'' + 900y = 0.$$

Знайти загальний закон коливань, кутову частоту та пояснити практичний зміст отриманої математичної моделі.

Варіант 30

Завдання 1. Диференціальне рівняння першого порядку.

Визначити тип і знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 6x(4y + 1).$$

Необхідно відокремити змінні, проінтегрувати обидві частини та записати загальний розв'язок.

Завдання 2. Задача Коші.

Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 3x(4y + 2)$$

за початкової умови

$$y(0) = 1.$$

Знайти частинний розв'язок і перевірити його підстановкою у вихідне рівняння.

Завдання 3. Диференціальне рівняння другого порядку.

Розглянути рівняння

$$y'' + 12y' + 45y = 0.$$

Визначити його порядок, установити, чи є воно лінійним, однорідним і чи має сталі коефіцієнти.

Завдання 4. Характеристичне рівняння.

Для диференціального рівняння

$$y'' + 14y' + 53y = 0$$

скласти характеристичне рівняння, обчислити дискримінант, знайти його корені та визначити їх вид.

Завдання 5. Загальний розв'язок.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 10y' + 29y = 0.$$

Показати складання характеристичного рівняння, визначення його коренів та запис загального розв'язку відповідно до виду отриманих коренів.

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

У спрощеній математичній моделі вільні коливання конструктивного елемента будівлі описуються диференціальним рівнянням

$$y'' + 961y = 0,$$

де $y(t)$характеризує відхилення елемента від положення рівноваги.

Необхідно:

1. визначити порядок і вид диференціального рівняння;
2. скласти характеристичне рівняння;
3. знайти його корені;
4. записати загальний розв'язок;
5. визначити кутову частоту вільних коливань;
6. пояснити фізичний зміст $y(t)$;
7. пояснити фізичний зміст першої похідної $y'(t)$;
8. пояснити фізичний зміст другої похідної $y''(t)$;
9. сформулювати висновок про характер коливального процесу.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ

У завданнях на диференціальні рівняння першого порядку необхідно визначити тип рівняння, виконати відокремлення змінних, проінтегрувати обидві частини та записати загальний розв'язок. Саме така послідовність передбачена робочою програмою для практичного заняття № 19.

У задачі Коші після знаходження загального розв’язку необхідно використати початкову умову, визначити довільну сталу та записати частинний розв’язок. За можливості результат перевіряється підстановкою у вихідне рівняння.

Для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами необхідно скласти характеристичне рівняння, знайти його корені, визначити їх вид та відповідно записати загальний розв’язок. Робоча програма прямо передбачає вивчення характеристичного рівняння та основних видів його коренів.

У професійно орієнтованій задачі необхідно не тільки виконати математичні перетворення, але й пояснити зміст математичної моделі. У вихідній робочій програмі самостійна робота № 9 передбачає пояснення фізичного змісту змінної, її першої та другої похідних у математичній моделі механічного процесу.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 5

Максимальна кількість балів — 8 балів.

№	**Зміст завдання**	**Максимальна кількість балів**
1	Диференціальне рівняння першого порядку	**1,00**
2	Задача Коші з початковою умовою	**1,25**
3	Визначення виду диференціального рівняння другого порядку	**0,75**
4	Складання і розв’язування характеристичного рівняння	**1,25**
5	Знаходження загального розв’язку диференціального рівняння другого порядку	**1,50**
6	Професійно орієнтована задача	**2,25**
Разом		**8,00**

Деталізація оцінювання

Завдання 1 — 1,00 бал. Правильне визначення типу рівняння — 0,20 бала; правильне відокремлення змінних — 0,25 бала; інтегрування — 0,30 бала; правильний загальний розв’язок — 0,25 бала.

Завдання 2 — 1,25 бала. Правильний загальний розв’язок — 0,50 бала; використання початкової умови — 0,25 бала; визначення довільної сталої — 0,20 бала; правильний частинний розв’язок — 0,20 бала; перевірка — 0,10 бала.

Завдання 3 — 0,75 бала. Правильне визначення порядку рівняння — 0,20 бала; визначення лінійності — 0,20 бала; визначення однорідності — 0,20 бала; установлення характеру коефіцієнтів — 0,15 бала.

Завдання 4 — 1,25 бала. Правильне характеристичне рівняння — 0,40 бала; правильне знаходження дискримінанта або безпосереднє визначення коренів — 0,30 бала; правильні корені — 0,35 бала; визначення виду коренів — 0,20 бала.

Завдання 5 — 1,50 бала. Складання характеристичного рівняння — 0,30 бала; знаходження коренів — 0,40 бала; визначення їх виду — 0,20 бала; правильний запис загального розв’язку — 0,50 бала.

Завдання 6 — 2,25 бала. Аналіз математичної моделі — 0,25 бала; складання характеристичного рівняння — 0,30 бала; знаходження коренів — 0,30 бала; правильний загальний розв’язок — 0,50 бала; визначення кутової частоти — 0,25 бала; пояснення змісту $\boldsymbol{y(t)}$, $\boldsymbol{y'(t)}$, $\boldsymbol{y''(t)}$— 0,40 бала; професійно обґрунтований висновок — 0,25 бала.

ЗАГАЛЬНІ РІВНІ ОЦІНЮВАННЯ

7,20–8,00 балів — високий рівень. Здобувач освіти правильно визначає типи диференціальних рівнянь, самостійно обирає алгоритм розв’язування, правильно використовує початкові умови, складає характеристичні рівняння, правильно записує загальні розв’язки та змістовно пояснює професійну математичну модель.

6,00–7,19 бала — достатній рівень. Основні методи розв’язування диференціальних рівнянь засвоєно правильно. Допускаються окремі обчислювальні або алгебраїчні помилки, які не порушують основного алгоритму.

4,00–5,99 бала — середній рівень. Здобувач освіти володіє основними поняттями, але допускає суттєві помилки під час використання початкових умов, знаходження коренів характеристичного рівняння або запису загального розв’язку.

2,00–3,99 бала — початковий рівень. Правильно виконано лише окремі частини роботи; виникають значні труднощі з вибором алгоритму та математичним моделюванням.

0–1,99 бала — недостатній рівень. Більшість завдань не виконано або виконано неправильно; основні способи розв’язування диференціальних рівнянь не засвоєно.

ТИПОВІ ПОМИЛКИ

Під час розв’язування рівнянь з відокремлюваними змінними типовою помилкою є неправильне перенесення множників, що містять xі y, до різних частин рівняння.

Після інтегрування необхідно враховувати довільну сталу. У задачі Коші довільна стала визначається з початкової умови.

Під час роботи з рівняннями другого порядку необхідно правильно переходити від диференціального до характеристичного рівняння. Наприклад, похідній другого порядку відповідає r^2, похідній першого порядку — r, а функції y— стала складова характеристичного многочлена.

Особливу увагу необхідно звернути на вид коренів характеристичного рівняння. Для двох різних дійсних коренів, кратного дійсного кореня та комплексно спряжених коренів форми загального розв’язку відрізняються.

У професійній задачі необхідно відрізняти математичну модель від реальної конструкції. Рівняння виду $y'' + \omega^2 y = 0$у цьому модульному контролі використовується як **спрощена навчальна модель вільних незатухаючих коливань**, а не як повний інженерний розрахунок будівельної конструкції.

ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ

Модульний контроль № 5 завершує змістовий модуль **«Диференціальні рівняння»**. У робочій програмі цей модуль складається з лекції про диференціальні рівняння першого порядку та рівняння з відокремлюваними змінними, самостійної роботи з лінійних рівнянь першого порядку, практичного заняття № 19, самостійної роботи з рівнянь другого порядку та математичних моделей механічних процесів, практичного заняття № 20 з рівнянь другого порядку і коливальних процесів та практичного заняття № 21 «Рішення завдань за модулем 5».

Структура модульного контролю також безпосередньо спирається на вимогу робочої програми: комплексний варіант повинен містити рівняння першого порядку, задачу з початковою умовою, рівняння другого порядку,

характеристичне рівняння, визначення загального розв’язку та професійно орієнтовану задачу.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Оскільки практичне заняття № 21 є підсумковим модульним контролем, окреме домашнє завдання, що додатково оцінюється в балах, не встановлюється.

Після перевірки роботи здобувач освіти повинен проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні алгоритми та повторно розв’язати завдання, виконані неправильно.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: збірник індивідуальних завдань*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: практикум*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння : навчальний посібник*. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
6. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
7. **Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В.** *Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання* : підручник / за загальною

редакцією В. А. Баженова. Київ : Публічне акціонерне товариство «ВІПОЛ», 2013. 896 сторінок.