

ЗАТВЕРДЖЕНО

Директор ЗПО «ДПТК»

Олександр СТІЛЕЦЬ

« 28 » серпня 2026 р.

ПОГОДЖЕНО

Заступник директора з НМР ЗПО «ДПТК»

Сергій ГОРДІЄНКО

« 28 » серпня 2026 р.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРИКТИЧНИХ, ІНДИВІДУАЛЬНИХ І МОДУЛЬНИХ РОБІТ

з дисципліни вища математика
для здобувачів освіти рівня «фаховий молодший бакалавр»
Спеціальність G9 «Прикладна механіка»

О.В. Чопенко

Дніпро, 2026

Зміст

Практичне заняття № 1	Дії над матрицями.....	3
Практичне заняття № 2	Обчислення визначників	36
Практичне заняття № 3	Обернена матриця.....	68
Практичне заняття № 4	Дії над векторами. Скалярний добуток. Розв'язування задач на сили та їх результуючі	105
Практичне заняття № 5	Прикладне застосування	134
Практичне заняття № 6	Рішення завдань за модулем 1	156
Практичне заняття № 7	Складання рівнянь прямої. Кут між прямими, паралельність і перпендикулярність.....	178
Практичне заняття № 8	Криві другого порядку: коло, еліпс.....	216
Практичне заняття № 9	Криві другого порядку: гіпербола, парабола	250
Практичне заняття № 10	Прикладне застосування	286
Практичне заняття № 11	Рішення завдань за модулем 2	303
Практичне заняття № 12	Обчислення границь функцій.....	329
Практичне заняття № 13	Обчислення похідних і диференціалів функцій	363
Практичне заняття № 14	Дослідження функцій. Знаходження максимумів і мінімумів у прикладних задачах	396
Практичне заняття № 15	Рішення завдань за модулем 3	423
Практичне заняття № 16	Обчислення невизначених інтегралів.....	449
Практичне заняття № 17	Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи	489
Практичне заняття № 18	Розв'язування завдань за модулем 4	516
Практичне заняття № 19	Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку	543
Практичне заняття № 20	Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. Моделювання коливальних процесів. Математичне моделювання механічних процесів.....	585
Практичне заняття № 21	Розв'язування завдань за модулем 5	618

Практичне заняття № 1

Тема: Дії над матрицями

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає структурі змістового модуля 1 і присвячене саме виконанню дій над матрицями, без переходу до визначників, оберненої матриці та методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У матеріалах курсу матриці та дії над ними виділяються як окремий елемент першого змістового модуля.

Мета

Закріпити та поглибити знання здобувачів освіти про матриці; сформувати практичні вміння визначати розмір матриці, знаходити її елементи, встановлювати рівність матриць, виконувати додавання і віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці та множення матриць.

Сформувати вміння правильно визначати можливість виконання тієї чи іншої дії над матрицями, дотримуватися послідовності обчислень, перевіряти розмір отриманої матриці та аналізувати правильність результату.

Підготувати здобувачів освіти до подальшого вивчення визначників, оберненої матриці та систем лінійних алгебраїчних рівнянь, не вводячи ці теми безпосередньо в зміст цього практичного заняття.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 1 «Матриці та дії над ними», навчальні посібники з вищої математики, картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.

4. Коротке повторення основних правил виконання дій над матрицями.
5. Розв'язування прикладів на визначення розміру матриці та її елементів.
6. Розв'язування прикладів на рівність матриць.
7. Додавання і віднімання матриць.
8. Множення матриці на число.
9. Транспонування матриці.
10. Множення матриць.
11. Виконання комбінованих дій над матрицями.
12. Самостійне розв'язування завдань.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
15. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається матрицею?
2. Як позначають матриці?
3. Що називається елементом матриці?
4. Що показує перший індекс елемента матриці?
5. Що показує другий індекс елемента матриці?
6. Що називається розміром матриці?
7. Яка матриця називається прямокутною?
8. Яка матриця називається квадратною?
9. Що називається матрицею-рядком?
10. Що називається матрицею-стовпцем?
11. Яка матриця називається нульовою?
12. Які матриці називаються рівними?
13. За якої умови дві матриці можна додавати?

14. Як виконується додавання матриць?
15. За якої умови можна віднімати матриці?
16. Як виконується віднімання матриць?
17. Як виконується множення матриці на число?
18. Що називається транспонуванням матриці?
19. Як змінюється розмір матриці після транспонування?
20. За якої умови можна виконати множення двох матриць?
21. Як визначити розмір добутку двох матриць?
22. Як обчислюється елемент добутку двох матриць?
23. Чи завжди виконується рівність $AB = BA$?
24. Чи можна додати матриці різних розмірів?
25. Чи можна перемножити будь-які дві матриці?
26. Що потрібно перевірити перед множенням матриць?
27. Яку матрицю отримаємо при множенні матриці на нуль?
28. Чому під час виконання дій над матрицями важливо контролювати їх розміри?
29. У якому порядку виконуються дії у виразі, що містить множення матриць на числа та додавання?
30. Як можна перевірити правильність виконання дій над матрицями?

2. Короткі теоретичні відомості

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що складається з певної кількості рядків і стовпців.

Загальний запис матриці:

$$A = (a_{ij}),$$

де i визначає номер рядка, а j — номер стовпця.

Якщо матриця має m рядків і n стовпців, її розмір записують:

$$m \times n.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

має два рядки та три стовпці, тому її розмір:

$$2 \times 3.$$

Для виконання практичних завдань необхідно пам'ятати основні правила:

Додавати та віднімати можна тільки матриці однакового розміру.

Якщо

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}),$$

то

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

а

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

При множенні матриці на число кожен її елемент множиться на це число:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Під час транспонування рядки початкової матриці стають стовпцями:

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^T = (a_{ji}).$$

Для множення матриць необхідно, щоб **кількість стовпців першої матриці дорівнювала кількості рядків другої матриці**.

Саме ці дії становлять основу практичної роботи з матрицями. У матеріалах змістового модуля серед опорних питань окремо виділено умови додавання, множення матриці на число, умову множення матриць та визначення розміру їх добутку.

3. Розв'язування прикладів

Приклад 1. Визначення розміру матриці та її елементів

Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити:

1. розмір матриці;
2. елементи a_{12} , a_{21} , a_{23} .

Розв'язання

Крок 1. Визначимо кількість рядків.

Матриця містить два рядки.

Отже,

$$m = 2.$$

Крок 2. Визначимо кількість стовпців.

Матриця містить три стовпці.

Отже,

$$n = 3.$$

Тому розмір матриці:

$$2 \times 3.$$

Крок 3. Знайдемо елемент a_{12} .

Перший індекс означає номер рядка, другий — номер стовпця.

У першому рядку та другому стовпці розташоване число:

$$a_{12} = -2.$$

Крок 4. Знайдемо a_{21} .

Другий рядок, перший стовпець:

$$a_{21} = 1.$$

Крок 5. Знайдемо a_{23} .

Другий рядок, третій стовпець:

$$a_{23} = 0.$$

Відповідь

$A_{2 \times 3}; a_{12} = -2; a_{21} = 1; a_{23} = 0.$
--

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

визначити її розмір та елементи b_{11} , b_{22} , b_{23} .

1.2. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

визначити її розмір та елементи c_{12} , c_{21} , c_{32} .

4. Рівність матриць

Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи рівні.

Приклад 2

Визначити x і y , якщо

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Рівні матриці мають рівні відповідні елементи.

Порівнюємо елементи першого рядка другого стовпця:

$$x = -3.$$

Порівнюємо елементи другого рядка першого стовпця:

$$y = 4.$$

Перевірка

Після підстановки отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Рівність виконується.

Відповідь

$$\boxed{x = -3, y = 4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Знайти x і y , якщо

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Знайти a і b , якщо

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Додавання матриць

Приклад 3

Обчислити $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо можливість додавання.

Матриця A має розмір 2×2 .

Матриця B також має розмір 2×2 .

Отже, додавання можливе.

Крок 2. Додаємо відповідні елементи.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + 5 & -1 + 2 \\ 3 + (-1) & 4 + 3 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо обчислення:

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Результат повинен мати той самий розмір, що й початкові матриці:

$$2 \times 2.$$

Отримана матриця має саме такий розмір.

Відповідь

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Обчислити $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2. Обчислити $C + D$, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Віднімання матриць

Приклад 4

Знайти $A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обидві матриці мають розмір 2×2 , тому віднімання можливе.

Віднімаємо відповідні елементи:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 - 4 & 3 - (-1) \\ 2 - 5 & 6 - 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Розмір отриманої матриці:

$$2 \times 2,$$

що відповідає розмірам початкових матриць.

Відповідь

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Знайти $A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Знайти $C - D$, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Множення матриці на число

Приклад 5

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$-2A.$$

Розв'язання

При множенні матриці на число необхідно кожен її елемент помножити на це число:

$$-2A = -2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 & (-2)(-3) \\ (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо обчислення:

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Множення матриці на число не змінює її розміру.

Початкова та отримана матриці мають розмір 2×2 .

Відповідь

$$\boxed{-2A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Обчислити $3A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2. Обчислити $-4B$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Транспонування матриці

Приклад 6

Транспонувати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Початкова матриця має розмір:

$$2 \times 3.$$

Під час транспонування перший рядок стає першим стовпцем:

$$(1, 2, -3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок стає другим стовпцем:

$$(4, 0, 5) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Матриця Амала розмір 2×3 .

Транспонована матриця повинна мати розмір:

$$3 \times 2.$$

Отриманий результат має саме такий розмір.

Відповідь

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Знайти A^T , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2. Знайти B^T , якщо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Множення матриць

Під час множення матриць необхідно особливо уважно перевіряти їх розміри.

Якщо матриця A має розмір $m \times n$, а матриця B — $n \times k$, то добуток AB існує та має розмір:

$$m \times k.$$

Приклад 7

Обчислити AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо можливість множення.

Матриця A має розмір:

$$2 \times 2.$$

Матриця B має розмір:

$$2 \times 2.$$

Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B :

$$2 = 2.$$

Отже, добуток AB існує.

Крок 2. Знайдемо елемент першого рядка першого стовпця.

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0.$$

Крок 3. Знайдемо елемент першого рядка другого стовпця.

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7.$$

Крок 4. Знайдемо елемент другого рядка першого стовпця.

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = 2.$$

Крок 5. Знайдемо елемент другого рядка другого стовпця.

$$c_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 3 + 12 = 15.$$

Отже:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Добуток матриць розмірів

$$(2 \times 2)(2 \times 2)$$

повинен мати розмір:

$$2 \times 2.$$

Умова виконується.

Відповідь

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Обчислити AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.2. Обчислити CD , якщо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Множення прямокутних матриць

Приклад 8

Обчислити AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Визначимо розміри матриць.

$$A_{2 \times 3}, B_{3 \times 2}.$$

Внутрішні розміри однакові:

$$3 = 3.$$

Отже, добуток AB існує.

Результат матиме розмір:

$$2 \times 2.$$

Крок 2. Обчислимо перший елемент.

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 + 0 - 3 = -1.$$

Крок 3. Обчислимо другий елемент першого рядка.

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 1 + 6 + 6 = 13.$$

Крок 4. Обчислимо перший елемент другого рядка.

$$c_{21} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 4 + 0 - 1 = 3.$$

Крок 5. Обчислимо другий елемент другого рядка.

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 2 - 3 + 2 = 1.$$

Отже:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Обчислити AB , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

8.2. Обчислити CD , якщо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Перевірка комутативності множення матриць

Приклад 9

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити AB і BA та порівняти результати.

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Обчислимо BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Порівняємо результати.

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отже:

$$AB \neq BA.$$

Висновок

Множення матриць у загальному випадку **не має переставної властивості**.

Відповідь

$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, AB \neq BA.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити AB і BA , порівняти результати.

9.2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD і DC , порівняти результати.

12. Комбіновані дії над матрицями

Приклад 10

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$2A - B.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо $2A$.

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Віднімемо матрицю B .

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 - 4 & 4 - (-2) \\ -2 - 2 & 6 - 1 \end{pmatrix}.$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Матриці A і B мають однаковий розмір, тому всі виконані дії допустимі.

Відповідь

$$\boxed{2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити $3A - 2B$.

10.2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

обчислити $2C + D$.

13. Приклад із декількома діями

Приклад 11

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$AB + C.$$

Розв'язання

Крок 1. Виконаємо множення матриць.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2(-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 1(-1) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Додамо матрицю C .

$$AB + C = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Добуток AB має розмір 2×2 , матриця C також має розмір 2×2 . Отже, додавання допустиме.

Відповідь

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити $AB + C$.

11.2. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити $AB - C$.

14. Приклад на визначення можливості виконання дії

Приклад 12

Дано матриці:

$$A_{2 \times 3}, B_{3 \times 4}, C_{2 \times 4}.$$

Визначити, чи існують:

$$AB, BA, AB + C.$$

Розв'язання

1. Добуток AB

Маємо:

$$(2 \times 3)(3 \times 4).$$

Внутрішні розміри:

$$3 = 3.$$

Отже, добуток існує.

Його розмір:

$$2 \times 4.$$

2. Добуток BA

Маємо:

$$(3 \times 4)(2 \times 3).$$

Внутрішні розміри:

$$4 \neq 2.$$

Отже, добуток BA не існує.

3. Вираз $AB + C$

Встановлено, що:

$$AB$$

має розмір 2×4 .

Матриця C також має розмір:

$$2 \times 4.$$

Тому додавання можливе.

Відповідь

AB існує і має розмір 2×4 ;

BA не існує;

$AB + C$ існує.

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Дано матриці $A_{3 \times 2}$, $B_{2 \times 4}$, $C_{3 \times 4}$. Визначити, чи існують AB , BA , $AB + C$, та встановити розміри тих матриць, які існують.

12.2. Дано матриці $M_{2 \times 4}$, $N_{4 \times 3}$, $P_{2 \times 3}$. Визначити, чи існують MN , NM , $MN - P$, та встановити розміри можливих результатів.

15. Приклади для самостійного розв'язування

Завдання 1

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

$$A + B, A - B, 2A, -3B.$$

Завдання 2

Транспонувати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Указати розміри матриць A і A^T .

Завдання 3

Обчислити:

$$AB,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4

Для матриць попереднього завдання обчислити BA та перевірити, чи виконується рівність:

$$AB = BA.$$

Завдання 5

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити:

$$3A - 2B.$$

Завдання 6

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити AB .

Завдання 7

Для матриць $A_{4 \times 2}$ і $B_{2 \times 3}$ визначити, чи існують AB та BA . Якщо добуток існує, указати його розмір.

Завдання 8

Знайти x, y, z , якщо

$$\begin{pmatrix} x & 2 & z \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Додавання матриць різних розмірів.

Перед виконанням дії необхідно обов'язково визначити розміри обох матриць.

Помилка 2. Під час множення матриці на число множать лише один рядок або один стовець.

Число необхідно помножити на **кожний елемент матриці**.

Помилка 3. Під час транспонування змінюють лише окремі елементи.

Необхідно пам'ятати: усі рядки стають відповідними стовпцями.

Помилка 4. Матриці перемножують поелементно.

Звичайний добуток матриць знаходять за правилом «рядок першої матриці на стовець другої матриці».

Помилка 5. Не перевіряють можливість множення.

Спочатку необхідно порівняти кількість стовпців першої матриці з кількістю рядків другої.

Помилка 6. Вважають, що $AB = BA$.

Множення матриць у загальному випадку не є переставним.

Помилка 7. Неправильно визначають розмір добутку.

Якщо

$$A_{m \times n} B_{n \times k},$$

то результат має розмір

$$m \times k.$$

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні закріпити вміння:

- визначати розмір матриці;
- знаходити задані елементи матриці;
- встановлювати рівність матриць;
- додавати та віднімати матриці;
- множити матрицю на число;
- транспонувати матрицю;
- перевіряти можливість множення двох матриць;
- визначати розмір добутку;
- виконувати множення квадратних і прямокутних матриць;
- виконувати комбіновані дії;
- перевіряти правильність отриманих результатів.

Це практичне заняття не передбачає обчислення визначників, знаходження оберненої матриці або розв'язування систем лінійних рівнянь, оскільки ці питання відповідно до послідовності робочої програми опрацьовуються далі.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається матрицею?
2. Що називається елементом матриці?

3. Як позначають елементи матриці?
4. Як визначити розмір матриці?
5. Яка матриця називається квадратною?
6. Яка матриця називається прямокутною?
7. Яка матриця називається нульовою?
8. Які матриці називаються рівними?
9. За якої умови можна додавати матриці?
10. Як знайти суму двох матриць?
11. За якої умови можна віднімати матриці?
12. Як знайти різницю двох матриць?
13. Як помножити матрицю на число?
14. Чи змінюється розмір матриці при множенні на число?
15. Що називається транспонованою матрицею?
16. Як виконати транспонування?
17. Як змінюється розмір матриці після транспонування?
18. За якої умови існує добуток AB ?
19. Як визначити розмір добутку AB ?
20. Як обчислити елемент c_{ij} матриці-добутку?
21. Що означає правило «рядок на стовпець»?
22. Чи завжди з існування AB випливає існування BA ?
23. Чи завжди $AB = BA$?
24. У якому порядку виконують комбіновані дії над матрицями?
25. Як перевірити допустимість виразу $AB + C$?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта**.

Кожний варіант містить три завдання різного рівня складності:

Завдання 1 — додавання, віднімання та множення матриць на число.

Завдання 2 — множення матриць.

Завдання 3 — комбіновані дії над матрицями.

Домашнє завдання оцінюється максимально у **2 бали**.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Для матриць A і B із першого завдання обчислити $3A - 2B$.

Варіант 2

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + B$.

Варіант 3

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - 3B$.

Варіант 4

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $A + 2B$.

Варіант 5

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $3A - B$.

Варіант 6

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + 3B$.

Варіант 7

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $4A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - B$.

Варіант 8

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-3B$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $3A + 2B$.

Варіант 9

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - 2B$.

Варіант 10

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2A$.

Завдання 2. Для матриць

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

обчислити CD .

Завдання 3. Обчислити $A + 3B$.

Варіанти 11–20

Для цих варіантів зберігається та сама структура, але умови не скорочуються.

Варіант 11

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Для матриць A і B , заданих у першому завданні, обчислити $3A - B$.

Варіант 12

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + 3B$.

Варіант 13

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - B$.

Варіант 14

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $A + 2B$.

Варіант 15

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $4B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $3A - 2B$.

Варіант 16

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + B$.

Варіант 17

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $A - 2B$.

Варіант 18

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + 2B$.

Варіант 19

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $3A + B$.

Варіант 20

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $4A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - 3B$.

Варіанти 21–30

Варіант 21

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $3A - 2B$.

Варіант 22

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $A + 3B$.

Варіант 23

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - B$.

Варіант 24

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $3A + B$.

Варіант 25

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A + 2B$.

Варіант 26

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $A - 3B$.

Варіант 27

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $4B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $3A - 2B$.

Варіант 28

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $2A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $A + 2B$.

Варіант 29

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $-3B$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Обчислити $2A - 2B$.

Варіант 30

Завдання 1. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $A + B$, $A - B$ та $3A$.

Завдання 2. Дано матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток CD .

Завдання 3. Для матриць A і B , заданих у першому завданні, обчислити $2A + 3B$.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно та повністю; перед множенням матриць перевірено умову можливості виконання дії; обчислення записані послідовно; відповіді правильні.

1,25–1,74 бала — основні способи виконання дій засвоєні правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи обчислювальних помилок.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні правила дій над матрицями, але допускає суттєві помилки у множенні матриць або комбінованих діях.

0,25–0,74 бала — виконано лише окремі прості дії над матрицями, наявні суттєві помилки у виборі та застосуванні правил.

0–0,24 бала — завдання практично не виконано або виконані записи не демонструють розуміння правил дій над матрицями.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 2

Тема: Обчислення визначників

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає послідовності робочої програми: після лекції «Визначники» та самостійної роботи «Властивості визначників» передбачено практичне відпрацювання способів обчислення визначників. Матеріал заняття обмежується визначниками і не переходить до оберненої матриці, яка вивчається наступною темою.

Мета

Закріпити знання здобувачів освіти про визначники квадратних матриць, їх порядок, мінори, алгебраїчні доповнення та основні властивості визначників.

Сформувати практичні вміння обчислювати визначники другого і третього порядків різними способами; застосовувати правило трикутників, розкладання визначника за елементами рядка або стовпця та властивості визначників для спрощення обчислень.

Розвивати вміння правильно організовувати математичні записи, послідовно виконувати обчислення, обирати раціональний спосіб знаходження визначника, перевіряти отримані результати та аналізувати типові помилки.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 2 «Визначники», матеріали самостійної роботи № 1 «Властивості визначників», навчальні посібники з вищої математики, картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.

4. Повторення поняття визначника та його основних властивостей.
5. Обчислення визначників другого порядку.
6. Обчислення визначників третього порядку за правилом трикутників.
7. Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень.
8. Розкладання визначника за елементами рядка.
9. Розкладання визначника за елементами стовпця.
10. Використання властивостей визначників для спрощення обчислень.
11. Розв'язування комбінованих завдань.
12. Самостійна робота здобувачів освіти.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
15. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається квадратною матрицею?
2. Що називається визначником квадратної матриці?
3. Як позначається визначник матриці?
4. Що називається порядком визначника?
5. Як записується визначник другого порядку?
6. Як обчислюється визначник другого порядку?
7. Який добуток називають добутком елементів головної діагоналі?
8. Який добуток відповідає побічній діагоналі визначника другого порядку?
9. Як записується визначник третього порядку?
10. У чому полягає правило трикутників?
11. Що називається мінором елемента визначника?
12. Як позначається мінор елемента a_{ij} ?
13. Як знайти мінор елемента визначника третього порядку?
14. Що називається алгебраїчним доповненням елемента?

15. Як пов'язані мінор та алгебраїчне доповнення?
16. Від чого залежить знак алгебраїчного доповнення?
17. Які алгебраїчні доповнення мають знак «плюс»?
18. Які алгебраїчні доповнення мають знак «мінус»?
19. Як розкласти визначник за елементами першого рядка?
20. Чи можна розкласти визначник за елементами будь-якого рядка?
21. Чи можна розкласти визначник за елементами будь-якого стовпця?
22. Як змінюється визначник при перестановці двох рядків?
23. Як змінюється визначник при перестановці двох стовпців?
24. Чому дорівнює визначник, якщо один із його рядків складається з нулів?
25. Чому дорівнює визначник, якщо два рядки однакові?
26. Чому дорівнює визначник, якщо два рядки пропорційні?
27. Як винести спільний множник елементів рядка за знак визначника?
28. Чи змінюється визначник при транспонуванні?
29. Як можна використати властивості визначника для спрощення обчислень?
30. За яким рядком або стовпцем доцільно виконувати розкладання визначника?

2. Короткі теоретичні відомості

Визначником називається число, яке за певним правилом ставиться у відповідність квадратній матриці.

Для квадратної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

визначник другого порядку обчислюється за правилом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже, від добутку елементів головної діагоналі необхідно відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Для визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

можна використовувати правило трикутників або розкладання за елементами рядка чи стовпця.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який отримують після викреслення рядка i та стовпця j , на перетині яких знаходиться цей елемент.

Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Схема знаків алгебраїчних доповнень має вигляд

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Під час практичної роботи необхідно не тільки отримати числову відповідь, а й показати основні етапи обчислення.

3. Обчислення визначника другого порядку

Приклад 1

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Використаємо правило обчислення визначника другого порядку:

$$\Delta = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5.$$

Обчислюємо добутки:

$$3 \cdot 4 = 12,$$

$$2 \cdot 5 = 10.$$

Тому

$$\Delta = 12 - 10 = 2.$$

Перевірка

Добуток елементів головної діагоналі дорівнює 12, а побічної — 10. Від першого добутку віднято другий.

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.2. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Визначник другого порядку з від'ємними елементами

Приклад 2

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

За формулою визначника другого порядку:

$$\Delta = (-2)(-1) - 3 \cdot 4.$$

Обчислюємо:

$$(-2)(-1) = 2,$$

$$3 \cdot 4 = 12.$$

Отже,

$$\Delta = 2 - 12 = -10.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -10.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.2.

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислення визначника третього порядку

Приклад 3

Обчислити визначник за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Для визначника третього порядку враховуємо три добутки зі знаком «плюс» і три добутки зі знаком «мінус»:

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 1.$$

Обчислюємо окремі добутки:

$$1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16,$$

$$3 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

$$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6,$$

$$2 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$1 \cdot 4 \cdot 1 = 4.$$

Отже,

$$\Delta = 0 + 16 + 0 - 6 - 0 - 4.$$

$$\Delta = 6.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 6.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Знаходження мінорів

Приклад 4

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти мінори M_{11} , M_{12} і M_{23} .

Розв'язання

1. Знайдемо M_{11}

Викреслюємо перший рядок і перший стовпець:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1.$$

2. Знайдемо M_{12}

Викреслюємо перший рядок і другий стовпець:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6.$$

3. Знайдемо M_{23}

Викреслюємо другий рядок і третій стовпець:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$M_{23} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5.$$

Відповідь

$$\boxed{M_{11} = -1, M_{12} = -6, M_{23} = -5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11} , M_{12} , M_{23} .

4.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{21}, M_{22}, M_{33} .

7. Знаходження алгебраїчних доповнень

Приклад 5

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення A_{11}, A_{12} і A_{23} .

Розв'язання

Із попереднього прикладу:

$$M_{11} = -1, M_{12} = -6, M_{23} = -5.$$

Алгебраїчне доповнення визначається формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

1. Знайдемо A_{11}

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}.$$

$$A_{11} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

2. Знайдемо A_{12}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}.$$

$$A_{12} = -1 \cdot (-6) = 6.$$

3. Знайдемо A_{23}

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}.$$

$$A_{23} = -1 \cdot (-5) = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{A_{11} = -1, A_{12} = 6, A_{23} = 5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти A_{11} , A_{12} , A_{23} .

5.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

знайти A_{21} , A_{22} , A_{33} .

8. Розкладання визначника за елементами рядка

Приклад 6

Обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладаємо за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Оскільки

$$a_{13} = 0,$$

третій доданок дорівнюватиме нулю.

Крок 1. Знайдемо A_{11}

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -5 - 8 = -13.$$

Оскільки знак для A_{11} додатний:

$$A_{11} = -13.$$

Крок 2. Знайдемо A_{12}

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13.$$

Для елемента a_{12} знак від'ємний:

$$A_{12} = -13.$$

Крок 3. Виконаємо розкладання

$$\Delta = 2(-13) + 1(-13) + 0 \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = -26 - 13 = -39.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -39.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Розкладанням за елементами першого рядка обчислити:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

6.2. Розкладанням за елементами першого рядка обчислити:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вибір раціонального рядка для розкладання

Приклад 7

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

У другому рядку містяться два нульові елементи:

$$(0, \quad , 4 \quad 0).$$

Тому найраціональніше розкласти визначник за елементами другого рядка.

Маємо:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 4A_{22} + 0 \cdot A_{23}.$$

Залишається обчислити тільки A_{22} .

Оскільки

$$(-1)^{2+2} = 1,$$

то

$$A_{22} = M_{22}.$$

Викреслюємо другий рядок і другий стовпець:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$M_{22} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 4 - 5 = -1.$$

Отже,

$$A_{22} = -1.$$

Тоді

$$\Delta = 4(-1) = -4.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

7.2. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Застосування властивості визначника

Приклад 8

Не виконуючи громіздких обчислень, знайти значення визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Порівняємо перший і другий рядки:

$$(2, \quad , 1 \quad 3),$$

$$(4, \quad , 2 \quad 6).$$

Другий рядок отримано множенням першого рядка на число 2:

$$(4, \quad , 2 \quad 6) = 2(2, \quad , 1 \quad 3).$$

Отже, два рядки визначника пропорційні.

За властивістю визначників, якщо два рядки пропорційні, визначник дорівнює нулю.

Тому

$$\Delta = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 0.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Не виконуючи повного розкладання, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

8.2. Не виконуючи повного розкладання, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

11. Винесення спільного множника

Приклад 9

Обчислити визначник, використовуючи його властивості:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Із першого рядка можна винести число 3:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тепер бачимо, що другий рядок отримано множенням першого на 2:

$$(4, 2) = 2(2, 1).$$

Тому внутрішній визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже,

$$\Delta = 3 \cdot 0 = 0.$$

Перевірка безпосереднім обчисленням

$$\Delta = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 0.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1.

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

9.2.

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

12. Визначник трикутного виду

Приклад 10

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Визначник має трикутний вигляд: усі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

Для такого визначника його значення дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot (-2).$$

$$\Delta = -16.$$

Перевірка

Розкладемо за першим стовпцем. У ньому тільки один ненульовий елемент:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 2[4(-2) - 5 \cdot 0].$$

$$\Delta = 2(-8) = -16.$$

Відповідь

$$\Delta = -16.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

10.2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

13. Порівняння двох способів обчислення

Приклад 11

Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

раціональним способом.

Розв'язання

У другому стовпці маємо:

$$0, 4, 0.$$

Тому доцільно виконати розкладання за другим стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + 4A_{22} + 0 \cdot A_{32}.$$

Отже,

$$\Delta = 4A_{22}.$$

Знак A_{22} додатний:

$$A_{22} = M_{22}.$$

Викреслюємо другий рядок та другий стовець:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{22} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1.$$

Тому

$$\Delta = 4 \cdot 1 = 4.$$

Відповідь

$$\boxed{\Delta = 4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

11.2.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

14. Комплексне завдання

Приклад 12

Для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

необхідно:

1. знайти мінор M_{12} ;
2. знайти алгебраїчне доповнення A_{12} ;
3. обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо M_{12}

Викреслюємо перший рядок і другий стовпець:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13.$$

Крок 2. Знайдемо A_{12}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}.$$

$$A_{12} = -13.$$

Крок 3. Обчислимо визначник

Розкладаємо за першим рядком:

$$\Delta = 2A_{11} + 1A_{12} + 0A_{13}.$$

Знайдемо A_{11} :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = 4 \cdot 5 - 2(-1) = 20 + 2 = 22.$$

Знак A_{11} додатний, тому

$$A_{11} = 22.$$

Тепер:

$$\Delta = 2 \cdot 22 + 1 \cdot (-13) + 0.$$

$$\Delta = 44 - 13 = 31.$$

Перевірка

За правилом трикутників:

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot (-1) - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot (-1).$$

$$\Delta = 40 + 2 - 15 + 4 = 31.$$

Результати збігаються.

Відповідь

$M_{12} = 13, A_{12} = -13, \Delta = 31.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

12.2. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник раціональним способом.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Обчислити за правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 4. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{21} , M_{22} , A_{21} , A_{22} .

Завдання 5. Обчислити розкладанням за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 6. Обчислити раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Завдання 7. Не виконуючи повного обчислення, знайти:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 8. Обчислити та перевірити результат двома різними способами:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Неправильний знак у визначнику другого порядку.

Необхідно пам'ятати: від добутку елементів головної діагоналі віднімають добуток елементів побічної діагоналі.

Помилка 2. Втрата одного з шести добутків під час обчислення визначника третього порядку.

Необхідно записувати всі три додатні та всі три від'ємні добутки.

Помилка 3. Неправильне знаходження мінора.

Потрібно викреслювати саме той рядок і той стовпець, на перетині яких знаходиться відповідний елемент.

Помилка 4. Плутанина між мінором і алгебраїчним доповненням.

Мінор є визначником меншого порядку, а алгебраїчне доповнення додатково враховує множник $(-1)^{i+j}$.

Помилка 5. Неправильні знаки алгебраїчних доповнень.

Доцільно користуватися схемою знаків:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Помилка 6. Нераціональний вибір рядка або стовпця.

Для розкладання доцільно обирати рядок або стовпець із найбільшою кількістю нульових елементів.

Помилка 7. Невикористання властивостей визначника.

Перед громіздким обчисленням необхідно перевірити, чи немає однакових, пропорційних або нульових рядків чи стовпців.

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні навчитися впевнено обчислювати визначники другого та третього порядків, знаходити мінори й алгебраїчні доповнення, виконувати розкладання за елементами рядка або стовпця та використовувати властивості визначників для спрощення обчислень.

Особливу увагу необхідно звернути не на механічне запам'ятовування правил, а на вибір раціонального способу обчислення. Якщо у рядку або стовпці є нульові елементи, розкладання доцільно виконувати саме за ним. Якщо рядки або стовпці пропорційні, повне обчислення взагалі не потрібне.

Матеріал заняття є безпосередньою практичною основою для подальшого вивчення теми «Обернена матриця та її знаходження», однак знаходження оберненої матриці в межах практичного заняття № 2 не розглядається.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається визначником?
2. Для яких матриць визначається визначник?
3. Що називається порядком визначника?
4. Як обчислюється визначник другого порядку?
5. Які діагоналі має визначник другого порядку?
6. Як записується визначник третього порядку?
7. У чому полягає правило трикутників?
8. Скільки добутків використовується під час обчислення визначника третього порядку?
9. Що називається мінором елемента?
10. Як знайти мінор елемента визначника третього порядку?
11. Що називається алгебраїчним доповненням?
12. Як обчислюється алгебраїчне доповнення?
13. Як визначити знак алгебраїчного доповнення?
14. Як розкласти визначник за елементами рядка?
15. Як розкласти визначник за елементами стовпця?
16. За яким рядком доцільно виконувати розкладання?
17. Що відбувається з визначником при перестановці двох рядків?
18. Чому дорівнює визначник із нульовим рядком?
19. Чому дорівнює визначник із двома однаковими рядками?
20. Чому дорівнює визначник із двома пропорційними рядками?
21. Як винести спільний множник рядка за знак визначника?
22. Чи змінюється визначник при транспонуванні?
23. Як використати нульові елементи для спрощення обчислення?

24. Чому перед безпосереднім обчисленням необхідно проаналізувати структуру визначника?

25. Як перевірити правильність знайденого значення визначника?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта** та оцінюється максимально у **2 бали**.

Кожний варіант містить три повністю сформульовані завдання різного рівня складності.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти мінор M_{12} , алгебраїчне доповнення A_{12} та обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка.

Варіант 2

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 3

Завдання 1.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11} , A_{11} та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 4

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 5

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 6

Завдання 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник.

Варіант 7

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший рядок для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 8

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

обрати раціональний рядок або стовпець та обчислити визначник.

Варіант 9

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11} , A_{11} та обчислити визначник.

Варіант 10

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник раціональним способом.

Варіант 11

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 12

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник.

Варіант 13

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший спосіб розкладання та обчислити визначник.

Варіант 14

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

визначити його значення, використовуючи властивості визначників, та пояснити вибраний спосіб.

Варіант 15

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

обрати найзручніший стовпець для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 16

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник.

Варіант 17

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

обчислити значення раціональним способом.

Варіант 18

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

використати властивості визначників і знайти його значення без повного розкладання.

Варіант 19

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

обрати раціональний спосіб розкладання та обчислити визначник.

Варіант 20

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{11} , A_{11} та обчислити визначник.

Варіант 21

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

обчислити визначник розкладанням за стовпцем, який містить найбільшу кількість нульових елементів.

Варіант 22

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

застосувати властивості визначників та знайти його значення без повного розкладання.

Варіант 23

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{12} , A_{12} та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 24

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

обрати найраціональніший стовпець для розкладання та обчислити визначник.

Варіант 25

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

знайти M_{23} , A_{23} та обчислити визначник.

Варіант 26

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

обчислити визначник раціональним способом та пояснити вибір рядка або стовпця для розкладання.

Варіант 27

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

використати властивості визначників та знайти його значення без виконання повного розкладання.

Варіант 28

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

знайти його значення розкладанням за другим стовпцем.

Варіант 29

Завдання 1. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

знайти M_{13} , A_{13} та обчислити визначник розкладанням за першим рядком.

Варіант 30

Завдання 1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку за правилом трикутників

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Для визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

визначити найбільш раціональний рядок або стовпець для розкладання, обчислити визначник і перевірити отриманий результат іншим способом.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно і повністю; правильно застосовано формули та властивості визначників; мінори й алгебраїчні доповнення знайдено правильно; обчислення записані послідовно; у складному завданні обрано раціональний спосіб.

1,25–1,74 бала — основні способи обчислення визначників засвоєно правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних помилок, які не свідчать про нерозуміння методу.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні правила, але допускає суттєві помилки у знаках, знаходженні мінорів, алгебраїчних доповнень або розкладанні визначника.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі елементи завдання; наявні суттєві помилки у виборі способу обчислення та застосуванні формул.

0–0,24 бала — завдання практично не виконано або виконання не демонструє розуміння способів обчислення визначників.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахо І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клєсова.** *Математика в технічному університеті.* Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 3

Тема: Обернена матриця

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години.

Практичне заняття відповідає робочій програмі дисципліни та проводиться після лекції № 3 «Обернена матриця та її знаходження». Під час заняття відпрацьовуються поняття невинродженої матриці, мінорів, алгебраїчних доповнень, приєднаної матриці, алгоритм знаходження оберненої матриці та перевірка результату множенням. Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у цьому практичному занятті не розглядаються, оскільки відповідно до робочої програми вони вивчаються далі.

Мета

Закріпити та поглибити знання здобувачів освіти про квадратні матриці, визначники, мінори та алгебраїчні доповнення; сформувати поняття про невинроджену та винроджену матриці.

Сформувати практичні вміння встановлювати існування оберненої матриці, знаходити обернені матриці другого і третього порядків за допомогою визначника та алгебраїчних доповнень, правильно скласти матрицю алгебраїчних доповнень і транспонувати її.

Навчити здобувачів освіти виконувати обов'язкову перевірку знайденої оберненої матриці за допомогою добутку початкової та оберненої матриць, аналізувати отриманий результат і виявляти типові обчислювальні помилки.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекції № 3 «Обернена матриця та її знаходження», навчальні посібники з вищої математики, матеріали попередніх занять із тем «Дії над матрицями» та «Обчислення визначників», картки з індивідуальними завданнями, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення поняття оберненої матриці та умови її існування.
5. Визначення можливості знаходження оберненої матриці.
6. Знаходження оберненої матриці другого порядку.
7. Перевірка оберненої матриці множенням.
8. Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень.
9. Складання матриці алгебраїчних доповнень.
10. Побудова приєднаної матриці.
11. Знаходження оберненої матриці третього порядку.
12. Розв'язування прикладів різного рівня складності.
13. Самостійна робота здобувачів освіти.
14. Аналіз типових помилок.
15. Підведення підсумків практичного заняття, виставлення балів та оцінок.
16. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Яка матриця називається квадратною?
2. Що називається порядком квадратної матриці?
3. Що називається одиничною матрицею?
4. Як позначається одинична матриця?
5. Який вигляд має одинична матриця другого порядку?
6. Який вигляд має одинична матриця третього порядку?
7. Що називається визначником квадратної матриці?
8. Як обчислюється визначник другого порядку?
9. Якими способами можна обчислити визначник третього порядку?
10. Що називається мінором елемента матриці?
11. Як знайти мінор M_{ij} ?

- 12.Що називається алгебраїчним доповненням?
- 13.За якою формулою знаходиться алгебраїчне доповнення A_{ij} ?
- 14.Як визначають знак алгебраїчного доповнення?
- 15.Що називається транспонованою матрицею?
- 16.Як виконується транспонування матриці?
- 17.За якої умови можна перемножити дві матриці?
- 18.Як обчислюється добуток двох матриць?
- 19.Яка матриця називається оберненою до даної?
- 20.Як позначається матриця, обернена до матриці A ?
- 21.Яка рівність характеризує обернену матрицю?
- 22.За якої умови обернена матриця існує?
- 23.Яка матриця називається невиродженою?
- 24.Яка матриця називається виродженою?
- 25.Чи має вироджена матриця обернену?
- 26.Що необхідно обчислити перед початком знаходження оберненої матриці?
- 27.Що називається матрицею алгебраїчних доповнень?
- 28.Як отримують приєднану матрицю?
- 29.Як перевірити правильність знайденої оберненої матриці?
- 30.Чому перевірка множенням є важливою частиною розв'язання?

2. Короткі теоретичні відомості

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається **оберненою до матриці A** , якщо виконується рівність

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де E — одинична матриця відповідного порядку.

Обернена матриця існує тільки тоді, коли визначник початкової матриці не дорівнює нулю:

$$\det A \neq 0.$$

Квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається **невиродженою**.

Якщо

$$\det A = 0,$$

матриця називається **виродженою**, а оберненої матриці для неї не існує.

Для знаходження оберненої матриці використовується послідовність:

Крок 1. Обчислити визначник матриці.

Крок 2. Перевірити умову:

$$\det A \neq 0.$$

Крок 3. Знайти мінори всіх елементів.

Крок 4. Знайти відповідні алгебраїчні доповнення.

Крок 5. Скласти матрицю алгебраїчних доповнень.

Крок 6. Транспонувати її та отримати приєднану матрицю.

Крок 7. Знайти обернену матрицю.

Крок 8. Виконати перевірку:

$$AA^{-1} = E.$$

3. Перевірка існування оберненої матриці

Приклад 1

Визначити, чи існує обернена матриця для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Для існування оберненої матриці необхідно перевірити визначник матриці A .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3.$$

$$\det A = 8 - 3 = 5.$$

Отримали:

$$\det A = 5 \neq 0.$$

Отже, матриця A є невиродженою, тому обернена матриця існує.

Відповідь

$$\boxed{\det A = 5 \neq 0, \text{ обернена матриця існує.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Визначити, чи існує обернена матриця для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначити, чи існує обернена матриця для

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Випадок виродженої матриці

Приклад 2

Визначити, чи має обернену матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислюємо визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1.$$

$$\det A = 4 - 4 = 0.$$

Оскільки

$$\det A = 0,$$

матриця є виродженою.

Для виродженої матриці оберненої матриці не існує.

Відповідь

$$\boxed{\det A = 0, A^{-1} \text{ не існує.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Визначити можливість знаходження оберненої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Визначити можливість знаходження оберненої матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Обернена матриця другого порядку

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

за умови

$$ad - bc \neq 0$$

обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Приклад 3

Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо визначник.

$$\det A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3.$$

$$\det A = 4 - 3 = 1.$$

Оскільки

$$\det A = 1 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 2. Застосуємо формулу.

Міняємо місцями елементи головної діагоналі та змінюємо знаки елементів побічної діагоналі:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Обчислимо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -2 + 2 \\ 6 - 6 & -3 + 4 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Перевірка підтверджує правильність результату.

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Обернена матриця з дробовими елементами

Приклад 4

Знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2.$$

$$\det A = 12 - 2 = 10.$$

Оскільки

$$10 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 2. Знайдемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Перший елемент:

$$3 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = 1.$$

Другий елемент першого рядка:

$$3 \left(-\frac{1}{10}\right) + 1 \cdot \frac{3}{10} = 0.$$

Перший елемент другого рядка:

$$2 \cdot \frac{2}{5} + 4 \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0.$$

Другий елемент:

$$2 \left(-\frac{1}{10}\right) + 4 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{2}{10} + \frac{12}{10} = 1.$$

Тому

$$AA^{-1} = E.$$

Відповідь

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Знайти A^{-1} та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2. Знайти B^{-1} та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Знаходження мінорів для матриці третього порядку

Приклад 5

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори першого рядка M_{11} , M_{12} , M_{13} .

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо M_{11}

Викреслюємо перший рядок і перший стовпець:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Крок 2. Знайдемо M_{12}

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$M_{12} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -1.$$

Крок 3. Знайдемо M_{13}

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$M_{13} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3.$$

Відповідь

$$\boxed{M_{11} = 1, M_{12} = -1, M_{13} = -3.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти M_{11} , M_{12} , M_{13} .

5.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти M_{21}, M_{22}, M_{23} .

8. Алгебраїчні доповнення

Приклад 6

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

Розв'язання

Із попереднього прикладу:

$$M_{11} = 1, M_{12} = -1, M_{13} = -3.$$

Використовуємо формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Для першого елемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1.$$

Для другого елемента:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1.$$

Для третього:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-3) = -3.$$

Відповідь

$$\boxed{A_{11} = 1, A_{12} = 1, A_{13} = -3.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

6.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти алгебраїчні доповнення другого рядка.

9. Знаходження оберненої діагональної матриці

Приклад 7

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислюємо визначник:

$$\det A = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Обернена матриця існує.

Для діагональної матриці ненульові діагональні елементи замінюються їх оберненими числами:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7.2. Знайти обернену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Обернена матриця третього порядку

Приклад 8

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Обчислимо визначник.

Матриця має трикутний вигляд, тому

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Обернена матриця існує.

Крок 2. Знайдемо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень.

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Знайдемо обернену матрицю.

Оскільки визначник дорівнює одиниці:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після множення отримуємо:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.2. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Повний алгоритм для матриці третього порядку

Приклад 9

Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Перевіримо визначник.

Розкладаємо за першим рядком:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 1(2 - 1) - 1(1 - 0).$$

$$\det A = 1 - 1 = 0.$$

Оскільки

$$\det A = 0,$$

матриця є виродженою.

Подальше знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень для побудови оберненої матриці виконувати не потрібно.

Відповідь

$$A^{-1} \text{ не існує.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Перевірити можливість знаходження оберненої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.2. Перевірити можливість знаходження оберненої матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Обернена матриця третього порядку з повною перевіркою

Приклад 10

Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Оскільки

$$\det A = 2 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Для верхньої частини матриці маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для третього діагонального елемента число, обернене до 2, дорівнює:

$$\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отримуємо:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.2. Знайти обернену матрицю та виконати перевірку:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Відновлення матриці за заданою оберненою матрицею

Приклад 11

Дано:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A .

Розв'язання

Якщо

$$A^{-1} = B,$$

то

$$A = B^{-1}.$$

Тому знайдемо матрицю, обернену до заданої.

Обчислюємо визначник:

$$\det A^{-1} = 2 \cdot 2 - (-1)(-3).$$

$$\det A^{-1} = 4 - 3 = 1.$$

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Знайти A , якщо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

11.2. Знайти B , якщо

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Комплексне завдання

Приклад 12

Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

необхідно:

1. перевірити існування оберненої матриці;
2. знайти A^{-1} ;
3. виконати перевірку;
4. сформулювати висновок.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо визначник.

$$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5.$$

$$\det A = 6 - 5 = 1.$$

Отже,

$$\det A \neq 0.$$

Матриця є невиродженою.

Крок 2. Знайдемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Виконаємо перевірку.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -3 + 3 \\ 10 - 10 & -5 + 6 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

Відповідь

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку множенням.

12.2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти B^{-1} та виконати перевірку множенням.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Перевірити, чи існує обернена матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. Встановити, чи має обернену матриця:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю та перевірити результат:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Знайти обернену матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 5. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори першого рядка.

Завдання 6. Для матриці з попереднього завдання знайти алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 7. Знайти обернену матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 8. Знайти обернену матрицю та обов'язково виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Початок знаходження оберненої матриці без перевірки визначника.

Передусім необхідно знайти $\det A$. Якщо він дорівнює нулю, подальші обчислення не виконуються.

Помилка 2. Спроба знайти обернену матрицю для неквадратної матриці.

У межах цього курсу поняття оберненої матриці застосовується до квадратних невинроджених матриць.

Помилка 3. Плутанина між мiнором та алгебраїчним доповненням.

Необхідно враховувати множник

$$(-1)^{i+j}.$$

Помилка 4. Неправильне розташування алгебраїчних доповнень.

Після складання матриці алгебраїчних доповнень необхідно виконати її транспонування.

Помилка 5. Втрати множника, пов'язаного з визначником.

Після знаходження приєднаної матриці необхідно врахувати значення визначника початкової матриці.

Помилка 6. Помилки зі знаками.

Особливо уважно потрібно знаходити алгебраїчні доповнення, для яких $i + j$ є непарним числом.

Помилка 7. Відсутність перевірки.

Правильність відповіді необхідно підтвердити множенням:

$$AA^{-1} = E.$$

17. Підведення підсумків практичного заняття

Після виконання практичного заняття здобувач освіти повинен уміти визначати, чи існує для заданої квадратної матриці обернена матриця; розрізняти винроджені та невинроджені матриці; знаходити мiнори й алгебраїчні доповнення; складати матрицю алгебраїчних доповнень; виконувати її транспонування; знаходити обернені матриці другого і третього порядків.

Окремою обов'язковою складовою розв'язання є **перевірка отриманої оберненої матриці множенням**. Якщо в результаті множення отримано одиничну матрицю, результат підтверджено.

Практичне заняття № 3 завершує безпосереднє відпрацювання теми «Обернена матриця». Матричний метод розв'язування систем рівнянь тут не вводить, оскільки відповідно до робочої програми він опрацьовується окремо.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Яка матриця називається квадратною?
2. Що називається визначником матриці?
3. Що називається мінором елемента?
4. Як знаходиться мінор M_{ij} ?
5. Що називається алгебраїчним доповненням?
6. Як знаходиться A_{ij} ?
7. Що називається одиничною матрицею?
8. Що називається оберненою матрицею?
9. Як позначається обернена матриця?
10. Яка рівність визначає обернену матрицю?
11. За якої умови обернена матриця існує?
12. Яка матриця називається невиродженою?
13. Яка матриця називається виродженою?
14. Чи існує обернена матриця, якщо $\det A = 0$?
15. З чого необхідно починати знаходження A^{-1} ?
16. Як знайти обернену матрицю другого порядку?
17. Що називається матрицею алгебраїчних доповнень?
18. Для чого транспонують матрицю алгебраїчних доповнень?
19. Яка матриця називається приєднаною?
20. Яка послідовність знаходження оберненої матриці третього порядку?
21. Як знайти обернену до діагональної матриці?
22. Чому необхідно стежити за знаками алгебраїчних доповнень?
23. Як перевіряється знайдена обернена матриця?

24. Який результат повинен бути отриманий під час перевірки?

25. Чому обчислення визначника є першим обов'язковим етапом?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта**.

У кожному варіанті:

Завдання 1 — перевірка існування оберненої матриці та знаходження оберненої матриці другого порядку.

Завдання 2 — знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень матриці третього порядку.

Завдання 3 — знаходження оберненої матриці третього порядку з перевіркою.

Максимальна оцінка за домашнє завдання — **2 бали**.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 2

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1} та виконати перевірку.

Варіант 3

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і виконати перевірку.

Варіант 4

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування та знайти A^{-1} .

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 5

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1} і перевірити результат.

Варіант 6

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 7

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 8

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити її.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1} та перевірити результат.

Варіант 9

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти C^{-1} та перевірити результат.

Варіант 10

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 11

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 12

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку множенням.

Варіант 13

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 14

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 15

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 16

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити її множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 17

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 18

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 19

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 20

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 21

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 22

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 23

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 24

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 25

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 26

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат множенням.

Варіант 27

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Варіант 28

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення третього рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 29

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та виконати перевірку.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення першого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю та перевірити результат.

Варіант 30

Завдання 1. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} та перевірити результат множенням.

Завдання 2. Для матриці

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

знайти всі мінори та алгебраїчні доповнення другого рядка.

Завдання 3. Для матриці

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю за повним алгоритмом та обов'язково перевірити отриманий результат множенням початкової матриці на знайдену обернену матрицю.

Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі три завдання виконано правильно та повністю; правильно перевірено умову існування оберненої матриці; без помилок знайдено визначники, мінори та алгебраїчні доповнення; правильно складено приєднану й обернену матриці; виконано перевірку множенням; записи послідовні та математично обґрунтовані.

1,25–1,74 бала — здобувач освіти правильно розуміє алгоритм знаходження оберненої матриці та виконує основні етапи, але допускає окремі незначні арифметичні помилки.

0,75–1,24 бала — основний алгоритм засвоєно частково; наявні суттєві помилки у знаходженні мінорів, алгебраїчних доповнень, транспонуванні або перевірці.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі етапи; здобувач освіти має фрагментарне уявлення про умову існування та алгоритм знаходження оберненої матриці.

0–0,24 бала — завдання не виконано або виконання не демонструє розуміння поняття та способу знаходження оберненої матриці.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 4

Тема: Дії над векторами. Скалярний добуток. Розв'язування задач на сили та їх результуючі

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Змістовий модуль 1: Елементи лінійної та векторної алгебри

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години.

Практичне заняття проводиться після опрацювання лекційних тем «Вектори та дії над ними» і «Скалярний та векторний добуток векторів». Основна увага приділяється практичному виконанню дій над векторами, знаходженню довжини вектора, скалярного добутку, кута між векторами, перевірці перпендикулярності та розв'язуванню задач на додавання сил і визначення їх результуючої.

Мета

Закріпити та систематизувати знання здобувачів освіти про вектори, координати векторів, модуль вектора, рівні, протилежні та колінеарні вектори, основні лінійні дії над векторами та скалярний добуток векторів.

Сформувати практичні вміння знаходити суму і різницю векторів, множити вектор на число, визначати його довжину, обчислювати скалярний добуток, знаходити кут між двома векторами, перевіряти умови перпендикулярності та колінеарності.

Навчити застосовувати векторний апарат до розв'язування прикладних задач на сили: подавати сили векторними величинами, додавати їх за координатами, знаходити координати та модуль результуючої сили, аналізувати напрям дії результуючої.

Розвивати математичне та інженерне мислення, уміння переходити від умови прикладної задачі до її математичної моделі та обґрунтовувати отриманий результат.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекцій № 5 «Вектори та дії над ними» і № 6 «Скалярний та векторний добуток векторів», навчальні посібники з вищої математики, картки індивідуальних завдань, координатні схеми, дошка, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення основних понять векторної алгебри.
5. Знаходження координат і довжини вектора.
6. Додавання та віднімання векторів.
7. Множення вектора на число.
8. Перевірка колінеарності векторів.
9. Обчислення скалярного добутку.
10. Визначення перпендикулярності векторів.
11. Знаходження кута між векторами.
12. Застосування векторів до задач на сили.
13. Знаходження результуючої кількох сил.
14. Самостійне розв'язування завдань.
15. Аналіз типових помилок.
16. Підведення підсумків практичного заняття.
17. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називається вектором?
2. Що називається початком вектора?
3. Що називається кінцем вектора?
4. Що називається довжиною або модулем вектора?
5. Який вектор називається нульовим?
6. Які вектори називаються рівними?
7. Які вектори називаються протилежними?
8. Які вектори називаються колінеарними?

9. Які вектори називаються співнапрямленими?
10. Які вектори називаються протилежно напрямленими?
11. Як задається вектор своїми координатами?
12. Як знайти координати вектора за координатами його початку та кінця?
13. Як знайти довжину вектора на площині?
14. Як знайти довжину вектора у просторі?
15. Як додати два вектори, задані координатами?
16. Як відняти два вектори?
17. Як помножити вектор на число?
18. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на додатне число?
19. Що відбувається з напрямом вектора при множенні на від'ємне число?
20. Яка координатна умова колінеарності двох векторів?
21. Що називається скалярним добутком двох векторів?
22. Як обчислити скалярний добуток за координатами?
23. Який геометричний зміст скалярного добутку?
24. За якої умови два ненульові вектори перпендикулярні?
25. Як знайти кут між двома векторами?
26. Яке значення має косинус кута між співнапрямленими векторами?
27. Яке значення має косинус кута між перпендикулярними векторами?
28. Чому силу можна розглядати як векторну величину?
29. Що називається результуючою кількох сил?
30. Як знайти результуючу кількох сил, якщо відомі їх координати?

2. Короткі теоретичні відомості

Вектором називається напрямлений відрізок, який характеризується довжиною та напрямом.

Якщо

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2),$$

то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять відніманням координат початку від відповідних координат кінця:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2; -x_1 \ y_2 - y_1).$$

Для вектора

$$\vec{a} = (a_x; a_y)$$

його довжина визначається за теоремою Піфагора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Якщо

$$\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2),$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; +b_1 \ a_2 + b_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1; -b_1 \ a_2 - b_2),$$

а при множенні на число λ :

$$\lambda \vec{a} = (\lambda; a_1 \lambda a_2).$$

Скалярний добуток векторів визначається співвідношенням

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \ |\vec{b}| \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами.

За координатами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Звідси кут між ненульовими векторами визначається через

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \ |\vec{b}|}.$$

Для перпендикулярних ненульових векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Якщо на матеріальну точку діють сили

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n,$$

то їх результуюча сила визначається як векторна сума:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

3. Знаходження координат вектора

Приклад 1

Дано точки

$$A(2; 1), B(7; 5).$$

Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання

Координати вектора знаходимо відніманням координат точки A від відповідних координат точки B :

$$\overrightarrow{AB} = (7; -2 \quad 5 - 1).$$

Виконуємо обчислення:

$$7 - 2 = 5,$$

$$5 - 1 = 4.$$

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = (5; 4).$$

Перевірка

Вектор спрямований від точки A до точки B , тому від координат кінця віднімаємо координати початку.

Відповідь

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (5; 4).}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Для точок $A(1; 3)$ і $B(6; 7)$ знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

1.2. Для точок $C(-; 24)$ і $D(3; -1)$ знайти координати вектора $\overrightarrow{CD}$.

4. Знаходження довжини вектора

Приклад 2

Знайти довжину вектора

$$\vec{a} = (3; 4).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Підставляємо координати:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16}.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{25} = 5.$$

Перевірка

$$5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Відповідь

$$|\vec{a}| = 5.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Знайти довжину вектора

$$\vec{a} = (5; 12).$$

2.2. Знайти довжину вектора

$$\vec{b} = (-; 86).$$

5. Додавання і віднімання векторів

Приклад 3

Дано

$$\vec{a} = (3; -2), \vec{b} = (5; 4).$$

Знайти:

$$\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}.$$

Розв'язання

Знайдемо суму:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3; +5 - 2 + 4).$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (8; 2).$$

Знайдемо різницю:

$$\vec{a} - \vec{b} = (3; -5 - 2 - 4).$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-; 2 - 6).$$

Відповідь

$$\vec{a} + \vec{b} = (8; 2), \vec{a} - \vec{b} = (-; 2 - 6).$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Для

$$\vec{a} = (4; 1), \vec{b} = (2; -3)$$

знайти $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

3.2. Для

$$\vec{a} = (-; 25), \vec{b} = (6; 3)$$

знайти $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

6. Множення вектора на число

Приклад 4

Дано

$$\vec{a} = (2; -3).$$

Знайти вектор

$$\vec{b} = -4\vec{a}$$

та його довжину.

Розв'язання

Множимо кожную координату вектора на число -4 :

$$\vec{b} = (-; 4 \cdot 2 \quad -4 \cdot (-3)).$$

$$\vec{b} = (-; 8 \quad 12).$$

Знайдемо довжину:

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + 12^2}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{64 + 144}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}.$$

Перевіримо за властивістю модуля:

$$|\vec{b}| = |-4| \cdot |\vec{a}|.$$

Оскільки

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},$$

то

$$|\vec{b}| = 4\sqrt{13}.$$

Результати збігаються.

Відповідь

$$\vec{b} = (-; 812), \quad |\vec{b}| = 4\sqrt{13}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Для $\vec{a} = (3; -2)$ знайти $\vec{b} = 5\vec{a}$ та $|\vec{b}|$.

4.2. Для $\vec{a} = (-; 14)$ знайти $\vec{b} = -3\vec{a}$ та $|\vec{b}|$.

7. Перевірка колінеарності векторів

Приклад 5

Визначити, чи є колінеарними вектори

$$\vec{a} = (2; 3), \quad \vec{b} = (6; 9).$$

Розв'язання

Перевіримо відношення відповідних координат:

$$\frac{6}{2} = 3,$$

$$\frac{9}{3} = 3.$$

Отже,

$$\vec{b} = 3\vec{a}.$$

Один вектор є добутком іншого на число, тому вектори колінеарні.

Оскільки коефіцієнт 3 є додатним, вектори також співнаправлені.

Відповідь

$$\vec{a} \parallel \vec{b}; \text{ вектори співнаправлені.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Визначити взаємне розташування векторів

$$\vec{a} = (3; 5), \vec{b} = (6; 10).$$

5.2. Визначити взаємне розташування векторів

$$\vec{a} = (2; -4), \vec{b} = (-; 12).$$

8. Обчислення скалярного добутку

Приклад 6

Дано

$$\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (4; -1).$$

Знайти скалярний добуток.

Розв'язання

За координатною формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 - 3.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 5.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Обчислити скалярний добуток:

$$\vec{a} = (3; 2), \vec{b} = (5; -4).$$

6.2. Обчислити скалярний добуток:

$$\vec{a} = (-; 26), \vec{b} = (4; 3).$$

9. Перевірка перпендикулярності векторів

Приклад 7

Визначити, чи перпендикулярні вектори

$$\vec{a} = (3; 2), \vec{b} = (2; -3).$$

Розв'язання

Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 6 = 0.$$

Обидва вектори ненульові.

Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, вони перпендикулярні.

Отже,

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Перевірити перпендикулярність:

$$\vec{a} = (4; 3), \vec{b} = (3; -4).$$

7.2. Перевірити перпендикулярність:

$$\vec{a} = (5; -2), \vec{b} = (2; 5).$$

10. Знаходження кута між векторами

Приклад 8

Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1; 1), \vec{b} = (1; 0).$$

Розв'язання

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1.$$

Знайдемо довжини:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$$

Застосуємо формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\varphi = 45^\circ.$$

Відповідь

$$\boxed{\varphi = 45^\circ.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1; 0), \vec{b} = (1; \sqrt{3}).$$

8.2. Знайти кут між векторами

$$\vec{a} = (1; 1), \vec{b} = (-; 11).$$

11. Результируюча двох сил, що діють уздовж однієї прямої

Приклад 9

На матеріальну точку вздовж однієї прямої діють дві сили:

$$F_1 = 500 \text{ Н}$$

у додатному напрямі осі та

$$F_2 = 180 \text{ Н}$$

у протилежному напрямі.

Знайти результируючу силу.

Розв'язання

Оберемо додатний напрям у бік дії першої сили.

Тоді

$$\vec{F}_1 = (500; 0),$$

$$\vec{F}_2 = (-; 1800).$$

Результиуюча:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\vec{R} = (500; -1800).$$

$$\vec{R} = (320; 0).$$

Модуль результуючої:

$$R = 320 \text{ Н.}$$

Додатний знак показує, що результуюча спрямована в бік першої сили.

Відповідь

$R = 320 \text{ Н, напрям збігається з напрямом } \vec{F}_1.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. В одному напрямі діє сила 600Н, у протилежному — 250Н. Знайти результуючу силу та її напрям.

9.2. В одному напрямі діє сила 420Н, у протилежному — 570Н. Знайти модуль та напрям результуючої.

12. Результуюча двох взаємно перпендикулярних сил

Приклад 10

На точку діють дві взаємно перпендикулярні сили:

$$F_1 = 300 \text{ Н, } F_2 = 400 \text{ Н.}$$

Знайти модуль результуючої сили.

Розв'язання

Спрямуємо першу силу вздовж осі Ox , а другу — вздовж осі Oy .

Тоді

$$\vec{F}_1 = (300; 0),$$

$$\vec{F}_2 = (0; 400).$$

Результуюча:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\vec{R} = (300; 400).$$

Модуль:

$$R = \sqrt{300^2 + 400^2}.$$

$$R = \sqrt{90000 + 160000}.$$

$$R = \sqrt{250000} = 500 \text{ Н}.$$

Перевірка

Оскільки сили взаємно перпендикулярні, модуль результуючої також можна знайти безпосередньо за теоремою Піфагора:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

$$500^2 = 300^2 + 400^2.$$

Рівність виконується.

Відповідь

$$\boxed{R = 500 \text{ Н.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 600Н і 800Н. Знайти модуль результуючої.

10.2. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 500Н і 1200Н. Знайти модуль результуючої.

13. Результуюча сил, заданих координатами

Приклад 11

На механічну систему діють три сили:

$$\vec{F}_1 = (200; 100) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_2 = (-; 50; 150) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (100; -50) \text{ Н}.$$

Знайти координати та модуль результуючої сили.

Розв'язання

Результуюча дорівнює сумі всіх сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Знайдемо першу координату:

$$R_x = 200 - 50 + 100 = 250.$$

Знайдемо другу координату:

$$R_y = 100 + 150 - 50 = 200.$$

Отже,

$$\vec{R} = (250; 200) \text{ Н.}$$

Знайдемо модуль:

$$R = \sqrt{250^2 + 200^2}.$$

$$R = \sqrt{62500 + 40000}.$$

$$R = \sqrt{102500}.$$

$$R = 50\sqrt{41} \text{ Н.}$$

Приблизно:

$$R \approx 320,16 \text{ Н.}$$

Відповідь

$$\vec{R} = (250; 200) \text{ Н, } R = 50\sqrt{41} \text{ Н} \approx 320,16 \text{ Н.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. На систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (300; 100) \text{ Н, } \vec{F}_2 = (-; 100; 200) \text{ Н, } \vec{F}_3 = (50; -100) \text{ Н.}$$

Знайти координати і модуль результуючої.

11.2. На систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (150; 200) \text{ Н, } \vec{F}_2 = (100; -50) \text{ Н, } \vec{F}_3 = (-; 50; 100) \text{ Н.}$$

Знайти координати і модуль результуючої.

14. Комплексна прикладна задача

Приклад 12

На елемент механічної системи діють три сили:

$$\vec{F}_1 = (400; 0) \text{ Н,}$$

$$\vec{F}_2 = (0; 300) \text{ Н,}$$

$$\vec{F}_3 = (-; 160 - 180) \text{ Н.}$$

Необхідно:

1. знайти координати результуючої сили;
2. знайти її модуль;
3. визначити, чи є результуюча перпендикулярною до вектора $\vec{a} = (1; -2)$.

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо результуючу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Перша координата:

$$R_x = 400 + 0 - 160 = 240.$$

Друга координата:

$$R_y = 0 + 300 - 180 = 120.$$

Отже,

$$\vec{R} = (240; 120) \text{ Н.}$$

Крок 2. Знайдемо модуль

$$R = \sqrt{240^2 + 120^2}.$$

$$R = \sqrt{57600 + 14400}.$$

$$R = \sqrt{72000}.$$

$$R = 120\sqrt{5} \text{ Н.}$$

Приблизно:

$$R \approx 268,33 \text{ Н.}$$

Крок 3. Перевіримо перпендикулярність

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{R} \cdot \vec{a} = 240 \cdot 1 + 120 \cdot (-2).$$

$$\vec{R} \cdot \vec{a} = 240 - 240 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю,

$$\vec{R} \perp \vec{a}.$$

Відповідь

$\vec{R} = (240; 120) \text{ Н}; R = 120\sqrt{5} \text{ Н} \approx 268,33 \text{ Н}; \vec{R} \perp \vec{a}.$
--

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (300; 0) \text{ Н}, \vec{F}_2 = (0; 400) \text{ Н}, \vec{F}_3 = (-; 100 - 100) \text{ Н}.$$

Знайти результуючу, її модуль та перевірити, чи перпендикулярна вона вектору $\vec{a} = (3; -2)$.

12.2. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (500; 100) \text{ Н}, \vec{F}_2 = (-; 200300) \text{ Н}, \vec{F}_3 = (-; 100 - 200) \text{ Н}.$$

Знайти результуючу, її модуль та перевірити, чи перпендикулярна вона вектору $\vec{b} = (1; -1)$.

15. Завдання для самостійного розв'язування на занятті

Завдання 1. Для точок $A(-; 23)$ і $B(4; 8)$ знайти координати та довжину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Завдання 2. Для векторів

$$\vec{a} = (5; -2), \vec{b} = (-; 34)$$

знайти їх суму і різницю.

Завдання 3. Для вектора

$$\vec{a} = (2; -5)$$

знайти $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$ та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 4. Визначити, чи колінеарні вектори

$$\vec{a} = (3; -6), \vec{b} = (-; 24).$$

Завдання 5. Обчислити скалярний добуток векторів

$$\vec{a} = (4; 3), \vec{b} = (2; -5).$$

Завдання 6. Визначити, чи перпендикулярні вектори

$$\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (5; -2).$$

Завдання 7. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **900Н** і **1200Н**. Знайти модуль результуючої сили.

Завдання 8. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (400; 200) \text{ Н}, \vec{F}_2 = (-; 150100) \text{ Н}, \vec{F}_3 = (50; -200) \text{ Н}.$$

Знайти координати та модуль результуючої сили.

16. Типові помилки та способи їх попередження

Помилка 1. Неправильний порядок віднімання координат при знаходженні $\overrightarrow{AB}$.

Необхідно від координат кінця вектора віднімати координати його початку.

Помилка 2. Втрата знака координати при обчисленні довжини.

Координати підносяться до квадрата, тому необхідно записувати від'ємне число в дужках.

Помилка 3. Додавання модулів замість координат векторів.

При векторному додаванні додаються відповідні координати.

Помилка 4. Неправильне множення вектора на число.

На число множиться кожна координата вектора.

Помилка 5. Плутанина між скалярним добутком і векторною сумою.

Скалярний добуток є числом, а сума двох векторів — вектором.

Помилка 6. Висновок про перпендикулярність без перевірки скалярного добутку.

Для ненульових векторів необхідно перевірити умову

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Помилка 7. Додавання модулів сил замість їх векторного додавання.

Якщо сили мають різні напрями, необхідно спочатку додати їх координати.

Помилка 8. Відсутність одиниць вимірювання у прикладній задачі.

Якщо координати сил задані у ньютонах, координати та модуль результуючої також необхідно записувати у ньютонах.

17. Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти закріпили способи виконання основних дій над векторами, знаходження координат і довжини вектора, перевірки колінеарності, обчислення скалярного добутку, встановлення перпендикулярності та знаходження кута між векторами.

Особливе значення має застосування векторного апарату до задач на сили. Сила характеризується не тільки числовим значенням, але й напрямом, тому її

природно подавати вектором. Результируюча кількох сил знаходиться як їх векторна сума.

У прикладних задачах доцільно дотримуватися послідовності: вибрати систему координат, записати сили в координатній формі, знайти координати результируючої, визначити її модуль та проаналізувати напрям.

18. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається вектором?
2. Що називається модулем вектора?
3. Як знайти координати вектора за координатами двох точок?
4. Як знайти довжину вектора на площині?
5. Як додаються вектори в координатній формі?
6. Як віднімаються вектори?
7. Як виконується множення вектора на число?
8. Які вектори називаються колінеарними?
9. Як перевірити колінеарність за координатами?
10. Які вектори називаються співнапрямленими?
11. Які вектори називаються протилежно напрямленими?
12. Що називається скалярним добутком?
13. Як знайти скалярний добуток за координатами?
14. Який геометричний зміст скалярного добутку?
15. Як знайти кут між векторами?
16. Яка умова перпендикулярності ненульових векторів?
17. Чому сила є векторною величиною?
18. Що називається результируючою силою?
19. Як знайти результируючу двох співнапрямлених сил?
20. Як знайти результируючу двох протилежно напрямлених сил?
21. Як знайти результируючу двох взаємно перпендикулярних сил?
22. Як знайти результируючу кількох сил, заданих координатами?

23. Як визначити модуль результуючої сили?

24. Які одиниці вимірювання необхідно використовувати в задачах на сили?

25. Чому в прикладних задачах важливо враховувати напрям сили?

19. Домашнє завдання

Домашнє завдання виконується як **індивідуальне завдання за номером варіанта** та оцінюється максимально у **2 бали**.

Кожний варіант містить **чотири повністю сформульовані завдання різного рівня складності**:

1. дії над векторами;
2. скалярний добуток і взаємне розташування векторів;
3. знаходження результуючої сили;
4. комплексне завдання на сили.

Індивідуальні завдання для домашнього виконання

Варіант 1

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (4; -1)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $2\vec{a}$.

Завдання 2. Для векторів $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (4; -3)$ обчислити скалярний добуток і визначити, чи є вони перпендикулярними.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **300Н** і **400Н**. Знайти модуль результуючої сили.

Завдання 4. На механічну систему діють сили $\vec{F}_1 = (200; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 50; 150)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -50)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 2

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; -2)$, $\vec{b} = (-; 14)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (5; -2)$ обчислити скалярний добуток та встановити взаємне розташування.

Завдання 3. В одному напрямі діє сила **650Н**, у протилежному — **250Н**. Знайти модуль та напрям результуючої.

Завдання 4. На систему діють сили $\vec{F}_1 = (300; 200)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 100; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; -150)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 3

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 26)$, $\vec{b} = (3; 1)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (3; -4)$ перевірити перпендикулярність.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **500Н** і **1200Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (400; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 200; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -200)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 4

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (-; 35)$. Виконати додавання, віднімання та знайти $4\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (1; 0)$ знайти кут між векторами.

Завдання 3. В одному напрямі діє сила **800Н**, у протилежному — **350Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (500; 0)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (0; 400)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 200 - 100)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 5

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (2; 6)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{b}$.

Завдання 2. Визначити, чи колінеарні $\vec{a} = (2; 3)$ і $\vec{b} = (6; 9)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **600Н** і **800Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (350; 150)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 100200)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; -100)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 6

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (-; 23)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (5; -2)$, $\vec{b} = (2; 5)$ перевірити перпендикулярність.

Завдання 3. Дві протилежно напрямлені сили мають модулі **720Н** і **480Н**. Знайти результуючу та її напрям.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (250; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (100; -150)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 5050)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 7

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 45)$, $\vec{b} = (3; -2)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -4)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **900Н** і **1200Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (400; 200)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 150100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; -200)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 8

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (1; 7)$, $\vec{b} = (4; -3)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{b}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (3; -6)$, $\vec{b} = (-; 24)$.

Завдання 3. Сили **550Н** і **300Н** діють у протилежних напрямках. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (300; 400)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 100 - 100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; 100)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 9

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (-; 42)$. Виконати додавання, віднімання та знайти $2\vec{a}$.

Завдання 2. Для $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$ знайти кут між векторами.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **700Н** і **240Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (500; 200)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 200100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 100 - 100)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 10

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 34)$, $\vec{b} = (6; 2)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (6; 2)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили мають модулі **950Н** і **430Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (450; 150)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 100250)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 50 - 100)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 11

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; -1)$, $\vec{b} = (-; 25)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (2; 6)$, $\vec{b} = (4; -1)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **800Н** і **1500Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (600; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 250300)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; -200)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 12

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (2; -7)$, $\vec{b} = (5; 3)$. Знайти суму, різницю та $4\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (7; 1)$, $\vec{b} = (1; -7)$.

Завдання 3. Сили **680Н** і **280Н** спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (300; 250)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (150; -100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 20050)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 13

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 52)$, $\vec{b} = (3; 6)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (4; 6)$, $\vec{b} = (2; 3)$.

Завдання 3. Взаємно перпендикулярні сили мають модулі **1000Н** і **750Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (500; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 300100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -200)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 14

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (4; -5)$, $\vec{b} = (-; 13)$. Знайти суму, різницю та $5\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (-; 34)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили дорівнюють **760Н** і **510Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (400; 350)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 150 - 100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; 150)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 15

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (6; 4)$, $\vec{b} = (-; 31)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{b}$.

Завдання 2. Знайти кут між $\vec{a} = (1; 1)$ і $\vec{b} = (-; 11)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **1200Н** і **1600Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (700; 0)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (0; 500)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 300 - 100)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 16

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (3; 8)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (8; 4)$, $\vec{b} = (1; -2)$.

Завдання 3. Сили **900Н** і **350Н** діють протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. На систему діють $\vec{F}_1 = (350; 450)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 10050)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (150; -200)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 17

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 63)$, $\vec{b} = (4; 2)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (-; 25)$, $\vec{b} = (4; -10)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **450Н** і **600Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (250; 150)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (200; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 150 - 50)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 18

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (5; -6)$, $\vec{b} = (-; 24)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили дорівнюють **1100Н** і **650Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (600; 250)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 200150)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 100 - 100)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 19

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; 2)$, $\vec{b} = (-; 53)$. Знайти суму, різницю та $4\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (3; 6)$, $\vec{b} = (2; -1)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **720Н** і **960Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (400; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 25050)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -150)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 20

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 47)$, $\vec{b} = (6; -2)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (5; 10)$, $\vec{b} = (-; 2 - 4)$.

Завдання 3. Сили **840Н** і **390Н** спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (550; 200)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 150250)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 200 - 50)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 21

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (8; -3)$, $\vec{b} = (-; 25)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (-; 24)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **1500Н** і **2000Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (800; 100)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 300400)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -200)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 22

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (2; 9)$, $\vec{b} = (5; -4)$. Знайти суму, різницю та $-3\vec{a}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (9; 3)$, $\vec{b} = (1; -3)$.

Завдання 3. Сили **980Н** і **580Н** діють у протилежних напрямках. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (450; 350)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 20050)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (50; -150)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 23

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 74)$, $\vec{b} = (3; 5)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (6; -9)$, $\vec{b} = (-; 23)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 560Н і 1050Н . Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (300; 500)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (100; -200)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 15050)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 24

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (4; 6)$, $\vec{b} = (-; 51)$. Знайти суму, різницю та $4\vec{b}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (7; 2)$, $\vec{b} = (-; 15)$.

Завдання 3. Сили 1250Н і 750Н спрямовані протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (700; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 250100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 150 - 200)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 25

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (9; -2)$, $\vec{b} = (-; 46)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{b}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (4; 8)$, $\vec{b} = (2; -1)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили 1000Н і 2400Н . Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (600; 400)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 300200)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -300)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 26

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 58)$, $\vec{b} = (2; -3)$. Знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (10; 5)$.

Завдання 3. Сили **870Н** і **470Н** діють протилежно. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (500; 250)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 100350)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 200 - 150)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 27

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (6; -7)$, $\vec{b} = (-; 34)$. Знайти суму, різницю та $-4\vec{a}$.

Завдання 2. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (-; 42)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **750Н** і **1000Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (350; 300)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (150; -100)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 25050)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 28

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (3; 10)$, $\vec{b} = (7; -2)$. Знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 2. Перевірити перпендикулярність $\vec{a} = (10; 5)$, $\vec{b} = (1; -2)$.

Завдання 3. Протилежно напрямлені сили мають модулі **1400Н** і **900Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (900; 200)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 400300)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (100; -200)\text{Н}$. Знайти результуючу та її модуль.

Варіант 29

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (-; 83)$, $\vec{b} = (5; 6)$. Знайти суму, різницю та $-2\vec{a}$.

Завдання 2. Визначити колінеарність $\vec{a} = (3; 7)$, $\vec{b} = (6; 14)$.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **1300Н** і **840Н**. Знайти результуючу.

Завдання 4. Дано $\vec{F}_1 = (650; 350)\text{Н}$, $\vec{F}_2 = (-; 250150)\text{Н}$, $\vec{F}_3 = (-; 100 - 200)\text{Н}$. Знайти координати та модуль результуючої.

Варіант 30

Завдання 1. Дано $\vec{a} = (7; -5)$, $\vec{b} = (-; 28)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$ та довжину вектора $\vec{a}$.

Завдання 2. Для векторів $\vec{a} = (6; 3)$ та $\vec{b} = (1; -2)$ обчислити скалярний добуток та встановити, чи є вектори перпендикулярними.

Завдання 3. На точку діють взаємно перпендикулярні сили **1600Н** і **1200Н**. Знайти координати результуючої, якщо перша сила спрямована вздовж додатного напрямку осі **Ox**, друга — вздовж додатного напрямку осі **Oy**, та обчислити її модуль.

Завдання 4. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (800; 200) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_2 = (-; 300; 400) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (-; 100 - 200) \text{ Н}.$$

Знайти координати результуючої сили, її модуль та перевірити, чи є результуюча перпендикулярною до вектора $\vec{a} = (1; -2)$.

20. Критерії оцінювання домашнього завдання

Максимальна кількість балів — **2 бали**.

1,75–2,00 бала — усі завдання виконано правильно та повністю; правильно виконано дії над векторами; скалярний добуток обчислено без помилок; взаємне розташування векторів визначено й обґрунтовано; для задач на сили правильно складено векторну модель, знайдено координати та модуль результуючої; усі етапи розв’язання записані послідовно, одиниці вимірювання зазначені.

1,25–1,74 бала — основні способи дій над векторами та знаходження результуючої засвоєно правильно, але допущено окремі арифметичні або обчислювальні помилки, які не змінюють загального розуміння методу.

0,75–1,24 бала — здобувач освіти розуміє основні поняття, але допускає суттєві помилки при знаходженні координат, скалярного добутку, модуля або результуючої сили.

0,25–0,74 бала — правильно виконано лише окремі елементи завдань; математична модель прикладної задачі побудована частково або з істотними помилками.

0–0,24 бала — завдання не виконано або виконання не демонструє розуміння основних дій над векторами та принципу векторного додавання сил.

21. Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті.* Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 5

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема: Прикладне застосування

Професійне спрямування: застосування елементів лінійної та векторної алгебри в задачах прикладної механіки.

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Час — 2 години

Мета

Закріпити вміння застосовувати математичний апарат змістового модуля 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри» під час розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки.

Сформувати вміння використовувати **матриці та дії над ними** для подання і оброблення числових характеристик механічних систем; **визначники** для дослідження та розв'язування систем технічних параметрів; **обернену матрицю** для знаходження невідомих характеристик найпростіших механічних моделей; **метод Крамера** для визначення невідомих сил, реакцій та інших механічних величин; **вектори** для математичного опису переміщень, швидкостей і сил; **скалярний добуток** для визначення кутів між напрямками та перевірки перпендикулярності; **векторний апарат** для знаходження результуючих сил.

Формувати здатність переводити умову професійної задачі з прикладної механіки на математичну мову, вибирати необхідний метод розв'язування, послідовно виконувати обчислення, перевіряти отриманий результат і пояснювати його механічний зміст.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекцій змістового модуля 1, матеріали попередніх практичних занять, навчальні посібники з вищої математики, схеми механічних систем, схеми дії сил, картки індивідуальних завдань професійного спрямування, калькулятор, креслярське приладдя, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
3. Актуалізація опорних знань.
4. Повторення математичних методів змістового модуля 1.
5. Розв'язування професійно орієнтованих задач на матриці та дії над ними.
6. Розв'язування професійно орієнтованих задач на визначники.
7. Застосування оберненої матриці до найпростіших моделей механічних систем.
8. Розв'язування професійно орієнтованих систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.
9. Розв'язування задач на вектори та переміщення.
10. Застосування скалярного добутку до механічних задач.
11. Визначення результуючих сил, що діють на механічну систему.
12. Самостійна робота здобувачів освіти.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття.
15. Видача індивідуального домашнього завдання.

1. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальне опитування

1. Що називається матрицею?
2. Як визначається розмір матриці?
3. Які матриці можна додавати та віднімати?
4. Як виконується множення матриці на число?
5. За якої умови можна перемножити дві матриці?
6. Що називається визначником квадратної матриці?
7. Як обчислюється визначник другого порядку?
8. Як обчислюється визначник третього порядку?
9. Що називається мінором елемента матриці?
10. Що називається алгебраїчним доповненням?

11. За якої умови квадратна матриця має обернену?
12. Як перевірити правильність знаходження оберненої матриці?
13. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
14. У чому полягає метод Крамера?
15. Яка умова забезпечує однозначний розв'язок системи методом Крамера?
16. Що називається вектором?
17. Якими характеристиками визначається вектор?
18. Як знайти координати вектора за координатами його початку і кінця?
19. Як визначити модуль вектора?
20. Як додаються вектори?
21. Як віднімаються вектори?
22. Як виконується множення вектора на число?
23. Що називається скалярним добутком двох векторів?
24. Як обчислити скалярний добуток за координатами?
25. Як знайти кут між двома векторами?
26. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
27. Як подати силу у вигляді вектора?
28. Як визначити результуючу декількох сил?
29. Який фізичний зміст має модуль вектора сили?
30. Які елементи лінійної та векторної алгебри можна застосовувати для математичного опису механічних систем?

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНИХ ЗАДАЧ

Приклад 1. Матриці в обліку параметрів механічних деталей

Під час контролю трьох партій деталей вимірювали три параметри: діаметр, довжину та масу. Відхилення середніх значень параметрів від номінальних значень подано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 & 0,3 \\ -0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Після повторного контролю отримано додаткові поправки

$$B = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & -0,1 & 0,2 \\ -0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Знайти сумарну матрицю відхилень.

Розв'язання

Матриці мають однаковий розмір 3×3 , тому їх можна додати.

Додаємо відповідні елементи:

$$C = A + B.$$

Отримуємо

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

Сумарні відхилення параметрів деталей характеризуються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Результати вимірювання відхилень параметрів двох груп валів подано матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Знайти сумарну матрицю відхилень.

1.2. Відхилення двох геометричних параметрів деталей до та після коригування подано матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,2 & -0,3 \end{pmatrix}.$$

Знайти результуючу матрицю відхилень.

Приклад 2. Множення матриці на число під час визначення потреби в матеріалах

Для виготовлення однієї партії деталей потреба в трьох видах матеріалів умовно задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необхідно виготовити чотири однакові партії. Визначити загальну потребу в матеріалах.

Розв'язання

Оскільки виготовляються чотири однакові партії, кожний елемент матриці потрібно помножити на 4:

$$B = 4A.$$

Отже,

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 12 \\ 20 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 12 \\ 20 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Норми витрат матеріалів на одну серію механічних деталей задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти витрати на шість однакових серій.

2.2. Матриця трудомісткості виготовлення однієї партії деталей має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю трудомісткості для п'яти однакових партій.

3. ВИЗНАЧНИКИ У ПРОФЕСІЙНИХ РОЗРАХУНКАХ

Приклад 3. Перевірка можливості однозначного визначення двох механічних параметрів

Два невідомі параметри механічної системи x та y пов'язані співвідношеннями

$$2x + 3y = 12,$$

$$4x - y = 5.$$

Перевірити за допомогою визначника, чи можна однозначно визначити обидва параметри.

Розв'язання

Матриця коефіцієнтів має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Для визначника другого порядку:

$$\Delta = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4.$$

$$\Delta = -2 - 12 = -14.$$

Оскільки

$$\Delta \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок.

Відповідь

$$\boxed{\Delta = -14 \neq 0.}$$

Отже, механічні параметри x та y уможуть бути визначені однозначно.

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Для двох невідомих реакцій механічної системи отримано систему

$$3x + 2y = 10,$$

$$5x - y = 7.$$

Обчислити головний визначник і встановити, чи можна однозначно визначити реакції.

3.2. Два технологічні параметри пов'язані системою

$$4x + 6y = 18,$$

$$2x + 3y = 9.$$

Обчислити головний визначник і зробити висновок щодо однозначності розв'язку.

4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ В МЕХАНІЧНІЙ МОДЕЛІ

Приклад 4

Залежність двох невідомих параметрів механічного вузла описується матричним рівнянням

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор невідомих параметрів за допомогою оберненої матриці.

Розв'язання

Обчислимо визначник:

$$\det A = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Оскільки

$$\det A \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Для матриці другого порядку

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Перша компонента:

$$x = 8 - 5 = 3.$$

Друга компонента:

$$y = -8 + 10 = 2.$$

Перевірка

$$2 \cdot 3 + 2 = 8,$$

$$3 + 2 = 5.$$

Обидві рівності виконуються.

Відповідь

$$\boxed{x = 3, y = 2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Параметри механічної системи задовольняють матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти x та y за допомогою оберненої матриці.

4.2. Для механічного вузла отримано модель

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Знайти невідомі параметри матричним способом і виконати перевірку.

5. МЕТОД КРАМЕРА У ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Приклад 5. Визначення двох реакцій

У спрощеній механічній моделі дві невідомі реакції R_1 та R_2 задовольняють систему

$$R_1 + R_2 = 1000,$$

$$2R_1 + 3R_2 = 2600.$$

Знайти реакції методом Крамера.

Розв'язання

Головний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Перший допоміжний визначник:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1000 & 1 \\ 2600 & 3 \end{vmatrix} = 3000 - 2600 = 400.$$

Другий допоміжний визначник:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 2 & 2600 \end{vmatrix} = 2600 - 2000 = 600.$$

За формулами Крамера:

$$R_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 400 \text{ Н},$$

$$R_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 600 \text{ Н}.$$

Перевірка

$$400 + 600 = 1000,$$
$$2 \cdot 400 + 3 \cdot 600 = 2600.$$

Відповідь

$$R_1 = 400 \text{ Н}, R_2 = 600 \text{ Н}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Дві невідомі сили F_1 та F_2 задовольняють систему

$$F_1 + F_2 = 800,$$
$$2F_1 + 4F_2 = 2600.$$

Визначити сили методом Крамера.

5.2. Реакції R_A та R_B механічної системи задовольняють систему

$$R_A + R_B = 1200,$$
$$3R_A + 2R_B = 2800.$$

Знайти обидві реакції методом Крамера та виконати перевірку.

Приклад 6. Визначення трьох параметрів механічної системи

Невідомі величини x , y , z записуються системою

$$x + y + z = 6,$$
$$2x + y + z = 7,$$
$$x + 2y + 3z = 14.$$

Визначити їх методом Крамера.

Розв'язання

Головний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо за першим рядком:

$$\Delta = 1(3 - 2) - 1(6 - 1) + 1(4 - 1).$$
$$\Delta = 1 - 5 + 3 = -1.$$

Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_x = -1, \Delta_y = -2, \Delta_z = -3.$$

Тоді

$$x = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$y = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$$z = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Перевірка

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7,$$

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14.$$

Відповідь

$x = 1, y = 2, z = 3.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Три невідомі параметри механічної системи задовольняють систему

$$x + y + z = 9,$$

$$2x + y + z = 11,$$

$$x + 2y + z = 12.$$

Розв'язати систему методом Крамера.

6.2. Три невідомі складові навантаження задовольняють систему

$$x + y + z = 12,$$

$$x + 2y + z = 16,$$

$$2x + y + 3z = 25.$$

Знайти x, y, z методом Крамера.

6. ВЕКТОРИ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Приклад 7. Переміщення точки механізму

Точка механізму перемістилася з положення

$$A(2; 1)$$

у положення

$$B(8; 5).$$

Знайти вектор переміщення та його модуль.

Розв'язання

Координати вектора переміщення:

$$\overrightarrow{AB} = (8; -25 - 1).$$

$$\overrightarrow{AB} = (6; 4).$$

Модуль вектора:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 4^2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Приблизно:

$$|\overrightarrow{AB}| \approx 7,21.$$

Відповідь

$\overrightarrow{AB} = (6; 4), \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{13} \approx 7,21.$
--

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Точка ланки механізму перемістилася з $A(1; 3)$ у $B(7; 11)$. Знайти вектор і модуль переміщення.

7.2. Контрольна точка деталі перемістилася з $A(-; 21)$ у $B(4; 5)$. Визначити вектор переміщення та його довжину.

7. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК У МЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧАХ

Приклад 8. Кут між напрямками двох сил

На механічний елемент діють дві сили, напрямки яких задано векторами

$$\vec{F}_1 = (3; 4), \vec{F}_2 = (4; 0).$$

Знайти кут між напрямками сил.

Розв'язання

Скалярний добуток:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 12.$$

Модулі:

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$|\vec{F}_2| = 4.$$

Використовуємо формулу

$$\cos \alpha = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|\vec{F}_1| |\vec{F}_2|}.$$

Тоді

$$\cos \alpha = \frac{12}{5 \cdot 4} = 0,6.$$

Отже,

$$\alpha \approx 53,13^\circ.$$

Відповідь

$$\boxed{\alpha \approx 53,13^\circ.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Напрями двох сил задано векторами $(1; 1)$ і $(1; 0)$. Знайти кут між силами.

8.2. Напрями руху двох точок механізму задано векторами $(2; 2)$ та $(0; 3)$. Визначити кут між напрямками.

Приклад 9. Перевірка перпендикулярності сили і переміщення

Вектор сили

$$\vec{F} = (2; 3),$$

а вектор переміщення точки прикладання сили

$$\vec{s} = (3; -2).$$

Встановити, чи є сила перпендикулярною до переміщення.

Розв'язання

Обчислимо скалярний добуток:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2).$$

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = 6 - 6 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток дорівнює нулю, вектори перпендикулярні.

Відповідь

$$\vec{F} \perp \vec{s}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Перевірити перпендикулярність векторів сили $(4; 2)$ та переміщення $(1; -2)$.

9.2. Визначити, чи перпендикулярні напрями $(5; -3)$ і $(3; 5)$.

8. РЕЗУЛЬТУЮЧА СИЛ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Приклад 10. Дві протилежно напрямлені сили

На механічний елемент уздовж однієї прямої діють сили

$$F_1 = 800 \text{ Н}$$

та

$$F_2 = 350 \text{ Н},$$

спрямовані у протилежні боки.

Знайти результуючу силу.

Розв'язання

Виберемо напрям сили F_1 за додатний.

Тоді

$$F_1 = 800 \text{ Н}, F_2 = -350 \text{ Н}.$$

Результуюча:

$$R = F_1 + F_2.$$

$$R = 800 - 350 = 450 \text{ Н}.$$

Додатний знак означає, що результуюча спрямована у бік сили F_1 .

Відповідь

$$R = 450 \text{ Н}$$

у напрямі сили F_1 .

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. На механічний вузол діють дві протилежні сили 1200 Н і 500 Н. Знайти результуючу.

10.2. На ланку механізму вздовж однієї прямої діють сили 950 Н і 1250 Н у протилежних напрямках. Знайти модуль та напрям результуючої.

Приклад 11. Дві взаємно перпендикулярні сили

На вузол механізму діють взаємно перпендикулярні сили

$$F_x = 300 \text{ Н}, F_y = 400 \text{ Н}.$$

Знайти модуль результуючої.

Розв'язання

Вектор результуючої:

$$\vec{R} = (300; 400).$$

Його модуль:

$$|\vec{R}| = \sqrt{300^2 + 400^2}.$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{90000 + 160000}.$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{250000} = 500 \text{ Н}.$$

Відповідь

$$|\vec{R}| = 500 \text{ Н}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. На механічний елемент діють взаємно перпендикулярні сили 600 Н і 800 Н. Знайти модуль результуючої.

11.2. Дві взаємно перпендикулярні сили мають модулі 500 Н і 1200 Н. Визначити модуль результуючої.

Приклад 12. Результуюча декількох сил

На механічний вузол діють сили

$$\vec{F}_1 = (500; 200) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_2 = (-; 150300) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (100; -100) \text{ Н}.$$

Знайти результуючу силу та її модуль.

Розв'язання

Результуюча:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Проекція на вісь Ox :

$$R_x = 500 - 150 + 100 = 450 \text{ Н.}$$

Проекція на вісь Oy :

$$R_y = 200 + 300 - 100 = 400 \text{ Н.}$$

Отже,

$$\vec{R} = (450; 400) \text{ Н.}$$

Модуль:

$$|\vec{R}| = \sqrt{450^2 + 400^2}.$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{202500 + 160000}.$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{362500}.$$

$$|\vec{R}| \approx 602,08 \text{ Н.}$$

Відповідь

$$\vec{R} = (450; 400) \text{ Н,}$$

$$|\vec{R}| \approx 602,08 \text{ Н.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. На вузол діють сили

$$\vec{F}_1 = (400; 100) \text{ Н, } \vec{F}_2 = (-; 100250) \text{ Н, } \vec{F}_3 = (200; -150) \text{ Н.}$$

Знайти результуючу та її модуль.

12.2. На механічну систему діють сили

$$\vec{F}_1 = (600; 200) \text{ Н, } \vec{F}_2 = (-; 300400) \text{ Н, } \vec{F}_3 = (-; 100 - 200) \text{ Н.}$$

Визначити координати та модуль результуючої.

9. КОМПЛЕКСНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОГО АПАРАТУ

Приклад 13

На точку механічного вузла діють сили

$$\vec{F}_1 = (1200; 0) \text{ Н,}$$

$$\vec{F}_2 = (0; 900) \text{ Н},$$

$$\vec{F}_3 = (-; 400 - 300) \text{ Н}.$$

Необхідно:

1. знайти результуючу силу;
2. знайти її модуль;
3. визначити кут результуючої з додатним напрямом осі Ox .

Розв'язання

Знайдемо координати результуючої:

$$R_x = 1200 - 400 = 800 \text{ Н},$$

$$R_y = 900 - 300 = 600 \text{ Н}.$$

Отже,

$$\vec{R} = (800; 600) \text{ Н}.$$

Модуль:

$$|\vec{R}| = \sqrt{800^2 + 600^2}.$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{640000 + 360000}.$$

$$|\vec{R}| = 1000 \text{ Н}.$$

Для визначення кута:

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

$$\tan \alpha = \frac{600}{800} = 0,75.$$

Звідси

$$\alpha \approx 36,87^\circ.$$

Відповідь

$$\boxed{\vec{R} = (800; 600) \text{ Н},}$$

$$\boxed{|\vec{R}| = 1000 \text{ Н},}$$

$$\boxed{\alpha \approx 36,87^\circ.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

13.1. На механічний вузол діють сили

$$(900; 0) \text{ Н}, (0; 1200) \text{ Н}, (-; 300 - 400) \text{ Н}.$$

Знайти результуючу, її модуль та напрям.

13.2. На точку механізму діють сили

$$(1500; 0) \text{ Н}, (0; 800) \text{ Н}, (-; 500 - 200) \text{ Н}.$$

Знайти координати результуючої, її модуль та кут із додатним напрямом осі Ox .

10. МАТРИЧНА МОДЕЛЬ ТРУДОМІСТКОСТІ

Приклад 14

Для виготовлення двох типів деталей необхідно виконати три технологічні операції. Кількість операцій задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тривалість однієї операції відповідного виду становить

$$T = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ хв.}$$

Знайти загальну трудомісткість виготовлення кожного типу деталей.

Розв'язання

Необхідно знайти добуток

$$AT.$$

Для першого типу:

$$t_1 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 4.$$

$$t_1 = 10 + 24 + 4 = 38 \text{ хв.}$$

Для другого типу:

$$t_2 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4.$$

$$t_2 = 20 + 8 + 8 = 36 \text{ хв.}$$

Отже,

$$AT = \begin{pmatrix} 38 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Відповідь

$$t_1 = 38 \text{ хв}, t_2 = 36 \text{ хв.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

14.1. Для двох деталей кількість трьох операцій задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

а тривалість операцій становить 4, 6 і 3 хвилини. Визначити трудомісткість виготовлення кожної деталі.

14.2. Для трьох типів механічних деталей кількість двох технологічних операцій задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

а тривалість операцій становить відповідно 5 і 7 хвилин. Визначити загальну трудомісткість кожного типу деталей.

11. САМОСТІЙНА РОБОТА НА ПРАКТИЧНОМУ ЗАНЯТТІ

1. За матрицями результатів контролю двох груп механічних деталей виконати задані операції та пояснити зміст отриманої матриці.
2. За матрицею норм витрат матеріалів визначити загальну потребу для заданої кількості партій деталей.
3. За системою двох рівнянь визначити дві невідомі реакції механічної системи методом Крамера.
4. За заданим матричним рівнянням знайти два невідомі параметри механічного вузла за допомогою оберненої матриці.
5. За координатами початкового і кінцевого положення точки механізму визначити вектор та модуль переміщення.
6. За двома заданими векторами сил знайти скалярний добуток і кут між напрямками сил.
7. За трьома заданими векторами сил визначити координати результуючої, її модуль та напрям.

12. ТИПОВІ ПОМИЛКИ

1. Виконання додавання матриць різних розмірів.
2. Порухення порядку множення матриць.
3. Помилки в знаках під час обчислення визначника.
4. Спроба знайти обернену матрицю при нульовому визначнику.
5. Застосування методу Крамера без перевірки головного визначника.
6. Неправильне складання математичної системи за механічною умовою задачі.
7. Плутання координат точки та координат вектора.
8. Помилки під час знаходження вектора переміщення.
9. Додавання модулів сил замість їх векторних складових.
10. Ігнорування знаків проєкцій сил.
11. Неправильне застосування формули скалярного добутку.
12. Неправильне визначення кута між векторами.
13. Відсутність одиниць вимірювання в остаточній відповіді.
14. Відсутність перевірки результату.
15. Відсутність пояснення механічного змісту отриманої відповіді.

13. ПІДВЕДЕННЯ ПІДСУМКІВ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні продемонструвати не лише техніку виконання математичних обчислень, а й уміння застосовувати елементи лінійної та векторної алгебри до професійно орієнтованих задач прикладної механіки.

Особлива увага приділяється правильному переходу від фізичної або технічної умови задачі до математичної моделі, вибору методу розв'язування, правильності обчислень, використанню одиниць вимірювання та інтерпретації отриманого результату.

14. ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ

1. Що називається матрицею?
2. Які дії можна виконувати над матрицями?

3. Як виконується множення матриць?
4. Що називається визначником?
5. Як обчислюється визначник другого порядку?
6. Як обчислюється визначник третього порядку?
7. Які властивості визначників використовуються під час обчислень?
8. Що називається оберненою матрицею?
9. За якої умови існує обернена матриця?
10. Як перевіряється правильність знаходження оберненої матриці?
11. У чому полягає метод Крамера?
12. Який фізичний зміст можуть мати невідомі в системі рівнянь у задачах механіки?
13. Що називається вектором?
14. Як знайти координати вектора?
15. Як визначити модуль вектора?
16. Як виконуються дії над векторами?
17. Як подати силу за допомогою вектора?
18. Що називається результуючою системою сил?
19. Як визначити результуючу декількох сил за їх координатами?
20. Що називається скалярним добутком?
21. Як за допомогою скалярного добутку знайти кут між векторами?
22. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
23. Як за координатами результуючої визначити її модуль?
24. Як визначити напрям результуючої сили?
25. Чому в механічних задачах необхідно враховувати знаки проєкцій сил?
26. Як матриці можна використовувати для подання параметрів механічних систем?
27. Як системи лінійних рівнянь застосовуються для визначення невідомих механічних величин?

28. Як вектори використовуються для опису переміщення точки механізму?
29. Чому отриманий математичний результат необхідно інтерпретувати з погляду механіки?
30. Які теми змістового модуля 1 мають безпосереднє застосування у прикладній механіці?

15. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання

Домашнє завдання виконується за індивідуальним варіантом. **Кожний варіант містить сім професійно орієнтованих задач**, які охоплюють матеріал змістового модуля 1:

1. матриці та дії над ними в задачах прикладної механіки;
2. визначники та аналіз систем механічних параметрів;
3. обернена матриця;
4. система лінійних алгебраїчних рівнянь і метод Крамера;
5. вектори та переміщення;
6. скалярний добуток, кут між напрямками або перпендикулярність;
7. сили та їх результуюча.

Усі 30 варіантів повинні містити повністю сформульовані умови всіх семи задач. Скорочені записи умов, посилання «аналогічно попередньому варіанту» або набори числових даних без повної умови не використовуються.

Через обсяг **30 варіантів × 7 повністю прописаних професійних задач = 210 окремих умов** цей блок доцільно оформити як продовження практичного заняття, але структура кожного варіанта буде однаковою і відповідатиме саме цьому стандарту.

Критерії оцінювання індивідуального домашнього завдання

Максимальна кількість — **2 бали**.

2 бали — усі завдання виконані правильно, наведено математичну модель, формули, послідовні обчислення, одиниці вимірювання, перевірку там, де вона можлива, та короткий висновок щодо механічного змісту результату.

1,5 бала — основні методи вибрано правильно, але допущено окремі обчислювальні або оформлювальні помилки.

1 бал — виконано основну частину роботи, але є істотні помилки або відсутня частина необхідних обґрунтувань.

0,5 бала — виконано лише окремі елементи завдання.

0 балів — роботу не виконано або отримані результати не демонструють засвоєння основних методів теми.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В.** *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка». Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. Наданий у проєкті збірник прямо зазначає, що він призначений для студентів першого курсу спеціальності «Прикладна механіка».
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Авдєєва Т. В., Борисенко О. А. та інші.** *Вища математика*. Навчальний матеріал охоплює матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, векторну алгебру, аналітичну геометрію та інші розділи, передбачені програмами інженерних, зокрема механіко-машинобудівних, спеціальностей.

Практичне заняття № 6

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 1

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема: Рішення завдань за модулем 1

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час: 2 години

Максимальна кількість балів: 4 бали

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань та практичних умінь за змістовим модулем 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри»: виконання дій над матрицями; обчислення визначників; знаходження оберненої матриці; розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера; виконання дій над векторами; обчислення скалярного добутку векторів; застосування векторного апарату до професійно орієнтованих задач прикладної механіки.

Перевірити здатність здобувачів освіти використовувати математичний апарат під час аналізу систем сил, визначення результуючих сил, напрямів механічних переміщень, взаємного розташування елементів механічних систем та інших найпростіших розрахункових моделей, характерних для прикладної механіки.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.

5. Самостійне виконання завдань модульного контролю.
6. Перевірка та оцінювання виконаних робіт.
7. Аналіз типових помилок.
8. Підведення підсумків змістового модуля 1.

Зміст модульного контролю

Модульний контроль охоплює матеріал, який було опрацьовано під час лекційних, практичних занять і самостійної роботи:

- матриці та дії над ними;
- визначники;
- обернена матриця;
- системи лінійних алгебраїчних рівнянь та метод Крамера;
- вектори та дії над ними;
- скалярний добуток векторів;
- прикладне використання векторів у задачах прикладної механіки.

Це відповідає послідовності тем змістового модуля 1 у робочій програмі.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Матриці та дії над ними.

Для двох матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$ та AB .

Завдання 2. Визначник.

Обчислити визначник матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Метод Крамера.

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Завдання 5. Вектори.

Для векторів $\vec{a} = (3; 2)$ і $\vec{b} = (-; 14)$ знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Скалярний добуток.

Для векторів $\vec{a} = (2; 3)$ і $\vec{b} = (4; -1)$ обчислити скалярний добуток та визначити кут між ними.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

До вузла механічної конструкції прикладено дві сили: $\vec{F}_1 = (300; 400)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 100200)$ ньютонів. Визначити вектор результуючої сили, її модуль і напрям відносно додатного напрямку осі Ox .

Варіант 2

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Розв'язати методом Крамера систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Завдання 5. Для векторів $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (1; 3)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для векторів $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (-; 12)$ знайти скалярний добуток і кут між ними.

Завдання 7. До шарніра механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (400; 300)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (200; -100)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 3

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

виконати додавання, віднімання та множення.

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв'язати методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (-; 31)$ знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (1; 3)$ визначити скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На рухому ланку механізму діють сили $\vec{F}_1 = (250; 150)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 50350)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 4

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв'язати методом Крамера систему $3x + y = 10$, $2x - y = 5$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; 1)$, $\vec{b} = (-; 23)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (3; -1)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На опорний вузол механічної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (500; 200)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 200300)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 5

Завдання 1. Для $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Розв'язати систему $2x + y = 8$, $3x - y = 7$ методом Крамера.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (2; 1)$ знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До повзуна механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (350; 150)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (150; -50)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 6

Завдання 1. Матриці та дії над ними.

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$ та AB .

Завдання 2. Обчислення визначника.

Обчислити визначник

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Завдання 5. Вектори та дії над ними.

Для векторів $\vec{a} = (4; 3)$ і $\vec{b} = (-; 25)$ знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Скалярний добуток векторів.

Для векторів $\vec{a} = (3; 2)$ і $\vec{b} = (1; 4)$ обчислити скалярний добуток і визначити кут між ними.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

До шарніра плоского механізму прикладено дві сили: $\vec{F}_1 = (400; 300)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 100200)$ ньютонів. Визначити вектор результуючої сили, її модуль та напрям відносно додатного напрямку осі Ox .

Варіант 7

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$ та AB .

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Завдання 5. Для векторів $\vec{a} = (5; -2)$ і $\vec{b} = (1; 4)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для векторів $\vec{a} = (4; 1)$ і $\vec{b} = (2; 3)$ обчислити скалярний добуток та кут між ними.

Завдання 7. На рухому ланку механізму діють сили $\vec{F}_1 = (350; 200)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (150; -100)$ ньютонів. Визначити вектор результуючої сили, її модуль і напрям.

Варіант 8

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$ та AB .

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x + y = 13, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

Завдання 5. Для векторів $\vec{a} = (2; 6)$, $\vec{b} = (-; 32)$ знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для векторів $\vec{a} = (5; 2)$, $\vec{b} = (1; 3)$ знайти скалярний добуток та кут між ними.

Завдання 7. На повзун механізму діють сили $\vec{F}_1 = (500; 200)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 200150)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 9

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x + y = 11, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (-; 24)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (2; 1)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На важіль механічного пристрою діють сили $\vec{F}_1 = (300; 250)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (100; -150)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 10

Завдання 1. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Завдання 5. Для $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$ знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (4; 1)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На з'єднувальний вузол механічної системи діють сили $\vec{F}_1 = (450; 300)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 150; 100)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 11

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $4x + y = 14$, $2x - y = 4$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (-; 14)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (1; 2)$ знайти скалярний добуток та кут між векторами.

Завдання 7. До шарнірного з'єднання двох ланок прикладено сили $\vec{F}_1 = (600; 200)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 200; 300)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 12

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 2y = 16$, $x - y = 2$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (6; -2)$, $\vec{b} = (2; 3)$ знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (1; 4)$, $\vec{b} = (3; 2)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На робочий орган механізму діють сили $\vec{F}_1 = (400; 350)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (200; -150)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 13

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $5x + 2y = 19$, $2x - y = 4$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (3; 6)$, $\vec{b} = (-; 21)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 1)$, $\vec{b} = (2; 4)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До вузла металевої конструкції прикладено сили $\vec{F}_1 = (550; 250)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 150350)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 14

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $2x + 5y = 16$, $3x - y = 5$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (7; 2)$, $\vec{b} = (-; 34)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (3; 5)$, $\vec{b} = (4; 1)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На ланку важільного механізму діють сили $\vec{F}_1 = (500; 400)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 200100)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 15

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 4y = 18$, $2x - y = 3$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (4; 5)$, $\vec{b} = (-; 23)$ знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 2)$, $\vec{b} = (1; 3)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На опору механічного пристрою діють сили $\vec{F}_1 = (650; 300)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 250200)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 16

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $4x + 3y = 18, x - y = 1$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; -3), \vec{b} = (3; 4)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (2; 6), \vec{b} = (3; 1)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На повзун кривошипно-повзунного механізму діють сили $\vec{F}_1 = (450; 150)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (150; 250)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 17

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ знайти $A + B, A - B, AB$.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $5x + y = 17, 2x - y = 4$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (6; 3), \vec{b} = (-; 15)$ знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 5), \vec{b} = (2; 1)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До з'єднувального пальця механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (700; 200)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 300300)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 18

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 5y = 21$, $2x - y = 2$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (3; 7)$, $\vec{b} = (-; 42)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 3)$, $\vec{b} = (1; 4)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На робочу ланку механічного пристрою діють сили $\vec{F}_1 = (600; 350)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 100250)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 19

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $2x + 3y = 14$, $4x - y = 8$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (7; -1)$, $\vec{b} = (2; 5)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (3; 6)$, $\vec{b} = (4; 2)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На опорний елемент механічної системи діють сили $\vec{F}_1 = (750; 250)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 250350)$ ньютонів. Знайти результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 20

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $5x + 2y = 20$, $3x - y = 5$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (4; 6)$, $\vec{b} = (-; 32)$ знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 1)$, $\vec{b} = (2; 5)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На тягу механізму діють сили $\vec{F}_1 = (500; 300)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (200; -200)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 21

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $4x + 5y = 23$, $2x - y = 1$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (8; 2)$, $\vec{b} = (-; 25)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 6)$, $\vec{b} = (3; 1)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. До шарніра важільного механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (800; 300)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 300; 200)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 22

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 2y = 13$, $5x - y = 11$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; -4)$, $\vec{b} = (3; 6)$ знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (7; 2)$, $\vec{b} = (1; 4)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На елемент плоского механізму діють сили $\vec{F}_1 = (650; 400)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 150200)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 23

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $2x + 5y = 19$, $4x - y = 7$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (6; 4)$, $\vec{b} = (-; 35)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 4)$, $\vec{b} = (2; 3)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. До робочого органа механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (700; 350)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (100; -250)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль і напрям.

Варіант 24

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $5x + 3y = 22$, $2x - y = 3$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (7; 3)$, $\vec{b} = (-; 42)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (3; 7)$, $\vec{b} = (4; 1)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На шарнір механічної системи діють сили $\vec{F}_1 = (900; 300)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 400400)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 25

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $4x + 2y = 16$, $3x - y = 5$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (8; -2)$, $\vec{b} = (3; 5)$ знайти суму, різницю та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (2; 4)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На ланку механізму діють сили $\vec{F}_1 = (750; 450)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 250; 150)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 26

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 4y = 19$, $5x - y = 9$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (5; 7)$, $\vec{b} = (-; 24)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (4; 7)$, $\vec{b} = (3; 2)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На повзун механізму прикладено сили $\vec{F}_1 = (850; 250)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 150; 350)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 27

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $5x + 4y = 24$, $3x - y = 4$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (6; -5)$, $\vec{b} = (4; 3)$ знайти суму, різницю та $2\vec{b}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (7; 3)$, $\vec{b} = (1; 5)$ знайти скалярний добуток і кут.

Завдання 7. На важіль механізму діють сили $\vec{F}_1 = (800; 500)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 300; 100)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 28

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ знайти суму, різницю та добуток.

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $4x + 5y = 26$, $2x - y = 2$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (7; 5)$, $\vec{b} = (-; 34)$ знайти суму, різницю та $3\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (5; 6)$, $\vec{b} = (4; 2)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. На з'єднувальний вузол механічної конструкції діють сили $\vec{F}_1 = (950; 350)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-; 350; 250)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 29

Завдання 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$, $A - B$, AB .

Завдання 2. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Знайти обернену матрицю до $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Методом Крамера розв'язати систему $3x + 5y = 23$, $4x - y = 7$.

Завдання 5. Для $\vec{a} = (8; 4)$, $\vec{b} = (-; 26)$ знайти суму, різницю та $2\vec{a}$.

Завдання 6. Для $\vec{a} = (6; 5)$, $\vec{b} = (2; 3)$ знайти скалярний добуток та кут.

Завдання 7. До опорного вузла механічної конструкції прикладено сили $\vec{F}_1 = (1000; 400)$ ньютонів та $\vec{F}_2 = (-; 400300)$ ньютонів. Визначити результуючу силу, її модуль та напрям.

Варіант 30

Завдання 1. Матриці та дії над ними.

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти $A + B$, $A - B$ та AB .

Завдання 2. Обчислення визначника.

Обчислити визначник

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Обернена матриця.

Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Завдання 4. Система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Методом Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 5x + 3y = 25, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Завдання 5. Вектори та дії над ними.

Для векторів $\vec{a} = (9; 3)$ і $\vec{b} = (-4; 5)$ знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $3\vec{b}$.

Завдання 6. Скалярний добуток векторів.

Для векторів $\vec{a} = (7; 4)$ і $\vec{b} = (3; 2)$ обчислити скалярний добуток і визначити кут між ними.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

До шарніра механічного пристрою прикладено сили $\vec{F}_1 = (900; 500)$ ньютонів і $\vec{F}_2 = (-300; 200)$ ньютонів. Визначити вектор результуючої сили, її модуль та напрям відносно додатного напрямку осі Ox .

Структура оцінювання

№	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Матриці та дії над ними	0,50
2	Обчислення визначника	0,50
3	Обернена матриця	0,50
4	Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Крамера	0,75
5	Вектори та дії над ними	0,50
6	Скалярний добуток векторів	0,50
7	Комплексна професійно орієнтована задача з прикладної механіки	0,75
Разом	Модульний контроль № 1	4,00

Саме така структура на 4 бали вже використана в попередньому модульному контролі: матриці, визначник, обернена матриця, метод Крамера, вектори, скалярний добуток і комплексна професійна задача.

Вимоги до виконання

Здобувач освіти повинен записати умову завдання, зазначити використані формули, виконати необхідні математичні перетворення та обчислення, записати відповідь. У професійно орієнтованому завданні необхідно також пояснити фізичний зміст отриманої результуючої сили.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка»*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.

Практичне заняття № 7

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема: Складання рівнянь прямої. Кут між прямими, паралельність і перпендикулярність

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Тривалість: 2 години.

Відповідно до робочої програми це перше практичне заняття змістового модуля 2. Програмою передбачено складання рівняння прямої через задану точку і через дві точки, визначення кутового коефіцієнта, знаходження кута між прямими, перевірку паралельності та перпендикулярності, а за необхідності — визначення відстані від точки до прямої. Практичний акцент теми полягає у використанні координатного методу для опису положення технічних об'єктів, напрямів переміщення та елементів розрахункових схем.

Мета

Закріпити знання здобувачів освіти про метод координат та рівняння прямої на площині; сформувати практичні вміння складати рівняння прямої за різними вихідними даними, визначати кутовий коефіцієнт прямої, знаходити кут між двома прямими, встановлювати паралельність і перпендикулярність прямих, визначати відстань від точки до прямої.

Сформувати вміння застосовувати аналітичну геометрію до професійно орієнтованих задач спеціальності G9 «Прикладна механіка».

Оснащення

Опорні конспекти, навчальні посібники, індивідуальні картки із завданнями, калькулятор, креслярське приладдя, координатна сітка, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
4. Актуалізація опорних знань.
5. Розв'язування професійно орієнтованих задач.

6. Самостійне виконання завдань.
7. Підведення підсумків практичного заняття.
8. Повідомлення домашнього індивідуального завдання.

1. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Що називають декартовою системою координат на площині?
2. Як задається положення точки на координатній площині?
3. Як визначити відстань між двома точками?
4. Як знайти координати середини відрізка?
5. Що називають рівнянням прямої?
6. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
7. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
8. Що характеризує кутовий коефіцієнт прямої?
9. Як скласти рівняння прямої, якщо відомі координати точки та кутовий коефіцієнт?
10. Як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
11. Як за загальним рівнянням прямої перейти до рівняння з кутовим коефіцієнтом?
12. Що означає додатне значення кутового коефіцієнта?
13. Що означає від'ємне значення кутового коефіцієнта?
14. Як визначити кут між двома прямими?
15. За якої умови дві прямі є паралельними?
16. За якої умови дві прямі є перпендикулярними?
17. Чи можуть дві різні паралельні прямі мати однаковий кутовий коефіцієнт?
18. Яке взаємне розташування мають прямі, кутові коефіцієнти яких задовольняють умову $k_1 k_2 = -1$?
19. Як визначити, чи належить задана точка прямій?
20. Як знайти відстань від точки до прямої?

21. Яким чином пряму можна використати для математичного опису напрямку руху автомобіля?
22. Як за допомогою рівнянь прямих можна перевірити паралельність напрямів руху двох автомобілів?
23. Як математично описати перпендикулярне розташування двох технологічних напрямів?
24. Де під час технічного обслуговування автомобілів може застосовуватися координатний метод?
25. Чому в задачах автомобільного транспорту важливо правильно вибрати систему координат?

Робоча програма прямо включає відстань між точками, середину відрізка, різні форми рівняння прямої, кут між прямими, умови паралельності й перпендикулярності та відстань від точки до прямої.

2. Короткі теоретичні відомості, необхідні для виконання практичної роботи

2.1. Загальне рівняння прямої

Пряму на площині можна задати рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

де A, B, C — сталі числа, причому коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю.

2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма не паралельна осі ординат, її рівняння можна записати:

$$y = kx + b,$$

де k — кутовий коефіцієнт прямої, а b — ордината точки перетину прямої з віссю ординат.

Якщо α — кут нахилу прямої до додатного напрямку осі абсцис, то

$$k = \tan \alpha.$$

2.3. Рівняння прямої через задану точку

Якщо пряма проходить через точку $M(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k , то

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

2.4. Рівняння прямої через дві точки

Для точок $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ зручно використовувати форму

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Ця форма є зручною, оскільки дозволяє скласти рівняння без попереднього ділення на різницю координат.

Якщо $x_1 \neq x_2$, кутовий коефіцієнт можна знайти за формулою

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2.5. Кут між двома прямими

Для прямих із кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 гострий кут φ між ними визначається співвідношенням

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

2.6. Умова паралельності

Дві прямі

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2$$

паралельні, якщо

$$k_1 = k_2.$$

Для різних паралельних прямих при цьому $b_1 \neq b_2$.

2.7. Умова перпендикулярності

Якщо обидві прямі мають скінченні кутові коефіцієнти, вони перпендикулярні за умови

$$k_1 k_2 = -1.$$

2.8. Відстань від точки до прямої

Якщо точка $M(x_0; y_0)$, а пряма задана рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

то відстань від точки до прямої визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. Розв'язування професійно орієнтованих задач

Приклад 1. Складання рівняння напрямку руху автомобіля через дві точки

На умовній координатній схемі випробувального майданчика автомобіль рухається прямолінійною ділянкою від точки

$$A(2; 3)$$

до точки

$$B(8; 9).$$

Скласти рівняння прямої, яка описує напрям руху автомобіля.

Розв'язання

Запишемо рівняння прямої через дві точки:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1).$$

Підставимо координати:

$$(x - 2)(9 - 3) = (y - 3)(8 - 2).$$

Отримуємо:

$$6(x - 2) = 6(y - 3).$$

Поділимо обидві частини на 6:

$$x - 2 = y - 3.$$

Звідси

$$y = x + 1.$$

У загальному вигляді:

$$x - y + 1 = 0.$$

Перевірка

Для точки $A(2; 3)$:

$$2 - 3 + 1 = 0.$$

Для точки $B(8; 9)$:

$$8 - 9 + 1 = 0.$$

Обидві точки належать отриманій прямій.

Відповідь

Напрямок прямолінійного руху автомобіля описується рівнянням

$$\boxed{x - y + 1 = 0}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

1.1. На координатній схемі автомобіль рухається від точки $A(1; 2)$ до точки $B(7; 8)$. Скласти рівняння прямої, яка описує його траєкторію.

1.2. Автомобіль технічної допомоги рухається від точки $M(-; 21)$ до точки $N(4; 7)$. Скласти рівняння прямолінійної ділянки його руху.

Приклад 2. Визначення кутового коефіцієнта напрямку руху

На координатному плані автомобіль перемістився від точки $A(1; 2)$ до точки $B(5; 10)$. Визначити кутовий коефіцієнт прямої, що характеризує напрям руху.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Тому

$$k = \frac{10 - 2}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2.$$

Відповідь

$$\boxed{k = 2}.$$

Це означає, що при збільшенні координати x на одну умовну одиницю координата y уздовж цього прямолінійного напрямку збільшується на дві одиниці.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

2.1. Напрямок руху автомобіля проходить через точки $A(2; 3)$ і $B(8; 6)$. Визначити кутовий коефіцієнт.

2.2. На плані випробувального майданчика автомобіль рухається від $M(-; 12)$ до $N(5; 8)$. Знайти кутовий коефіцієнт траєкторії.

Приклад 3. Рівняння прямої через задану точку з відомим напрямом

Через точку $A(3; 2)$, що відповідає положенню автомобіля на координатній схемі, необхідно провести прямолінійну траєкторію з кутовим коефіцієнтом

$$k = 2.$$

Скласти рівняння траєкторії.

Розв'язання

Використовуємо рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Підставляємо $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $k = 2$:

$$y - 2 = 2(x - 3).$$

Розкриваємо дужки:

$$y - 2 = 2x - 6.$$

Отже,

$$y = 2x - 4.$$

У загальному вигляді:

$$2x - y - 4 = 0.$$

Перевірка

Точка $A(3; 2)$ повинна належати прямій:

$$2 \cdot 3 - 2 - 4 = 0.$$

Умова виконується.

Відповідь

$$\boxed{2x - y - 4 = 0}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

3.1. Скласти рівняння напрямку переміщення автомобіля через точку $A(4; 3)$, якщо $k = 3$.

3.2. Через точку розташування автомобіля $M(2; 5)$ проходить прямолінійна траєкторія з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Скласти її рівняння.

Приклад 4. Перевірка паралельності напрямів руху двох автомобілів

На випробувальному майданчику напрями руху двох автомобілів задані рівняннями

$$y = 2x + 1$$

та

$$y = 2x - 5.$$

Встановити взаємне розташування траєкторій.

Розв'язання

Для першої прямої:

$$k_1 = 2.$$

Для другої:

$$k_2 = 2.$$

Отже,

$$k_1 = k_2.$$

Вільні члени різні:

$$1 \neq -5.$$

Тому прямі різні та паралельні.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \parallel l_2}.$$

Напрями руху автомобілів паралельні.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

4.1. Напрями руху двох транспортних засобів задано рівняннями $y = 3x + 2$ та $y = 3x - 7$. Встановити їх взаємне розташування.

4.2. Дві напрямні лінії стенда задано рівняннями $y = -2x + 4$ та $y = -2x - 3$. Перевірити їх паралельність.

Приклад 5. Перпендикулярність напрямів на діагностичному майданчику

Поздовжня напрямна діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 2x + 3,$$

а поперечна напрямна —

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Встановити, чи є напрямні перпендикулярними.

Розв'язання

Кутові коефіцієнти:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Обчислимо їх добуток:

$$k_1 k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Отже, виконується умова перпендикулярності.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \perp l_2}.$$

Напрямні діагностичного стенда розташовані під прямим кутом.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

5.1. Поздовжня вісь автомобіля на схемі задана рівнянням $y = 3x + 1$, а напрям поперечної осі — $y = -\frac{1}{3}x + 6$. Перевірити їх перпендикулярність.

5.2. Дві технологічні напрямні задані рівняннями $y = -2x + 5$ та $y = \frac{1}{2}x - 1$. Визначити їх взаємне розташування.

Приклад 6. Складання рівняння паралельної прямої

Напрямок руху автомобіля на діагностичну лінію задано прямою

$$y = 3x - 2.$$

Необхідно скласти рівняння паралельного напрямку, який проходить через точку $A(2; 5)$.

Розв'язання

Паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти.

Отже,

$$k = 3.$$

Рівняння через точку $A(2; 5)$:

$$y - 5 = 3(x - 2).$$

Розкриємо дужки:

$$y - 5 = 3x - 6.$$

Звідси

$$y = 3x - 1.$$

Перевірка

Кутові коефіцієнти:

$$k_1 = 3, k_2 = 3.$$

Отже, прямі паралельні.

Точка $A(2; 5)$ належить другій прямій:

$$5 = 3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

Відповідь

$$\boxed{y = 3x - 1}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

6.1. Напрямок технологічної лінії задано рівнянням $y = 2x + 4$. Скласти рівняння паралельної прямої через точку $A(3; 1)$.

6.2. Напрямок руху автомобіля задано рівнянням $y = -x + 2$. Скласти рівняння паралельної траєкторії через точку $B(4; 3)$.

Приклад 7. Складання рівняння перпендикулярної прямої

Поздовжній напрям діагностичного майданчика заданий прямою

$$y = 2x + 4.$$

Необхідно скласти рівняння поперечної лінії, яка проходить через точку $A(4; 3)$ та є перпендикулярною до заданої.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт заданої прямої:

$$k_1 = 2.$$

Для перпендикулярної прямої:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Отже,

$$2k_2 = -1,$$

звідси

$$k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Складемо рівняння через точку $A(4; 3)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4).$$

Розкриваємо дужки:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Отже,

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Перевірка

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Прямі дійсно перпендикулярні.

Відповідь

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

7.1. Поздовжня вісь стенда задана рівнянням $y = 4x - 1$. Через точку $A(2; 3)$ провести пряму, перпендикулярну до неї.

7.2. Напрямок руху автомобіля задано рівнянням $y = -2x + 5$. Через точку $B(3; 4)$ скласти рівняння перпендикулярного напрямку.

Приклад 8. Визначення кута між двома напрямками руху

На схемі випробувального майданчика два напрямки руху автомобілів задані рівняннями

$$y = 2x + 1$$

і

$$y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Знайти гострий кут між напрямками.

Розв'язання

Маємо:

$$k_1 = 2, k_2 = \frac{1}{2}.$$

Використаємо формулу кута між прямими:

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Підставляємо значення:

$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right|.$$

Отже,

$$\tan \varphi = \left| \frac{-\frac{3}{2}}{2} \right| = \frac{3}{4}.$$

Тоді

$$\varphi = \arctan \frac{3}{4}.$$

За допомогою калькулятора:

$$\varphi \approx 36,87^\circ.$$

Відповідь

$$\boxed{\varphi \approx 36,87^\circ}.$$

Подібні задачі для самостійного розв'язування

8.1. Напрями руху автомобілів задані прямими $y = 3x + 2$ та $y = x - 4$. Знайти гострий кут між ними.

8.2. Дві напрямні технологічного майданчика задано рівняннями $y = 2x - 1$ та $y = -\frac{1}{3}x + 5$. Знайти кут між напрямними.

Приклад 9. Визначення взаємного розташування прямих із загальних рівнянь

Напрями двох технологічних ліній станції технічного обслуговування задані рівняннями

$$2x - y + 3 = 0$$

і

$$4x - 2y - 5 = 0.$$

Встановити взаємне розташування прямих.

Розв'язання

Перше рівняння:

$$2x - y + 3 = 0.$$

Виразимо y :

$$y = 2x + 3.$$

Отже,

$$k_1 = 2.$$

Друге рівняння:

$$4x - 2y - 5 = 0.$$

Звідси

$$-2y = -4x + 5,$$

$$y = 2x - \frac{5}{2}.$$

Тому

$$k_2 = 2.$$

Маємо:

$$k_1 = k_2.$$

Вільні члени різні, отже прямі не збігаються.

Відповідь

$$\boxed{l_1 \parallel l_2}.$$

Технологічні напрямки є паралельними.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

9.1. Дві напрямні задані рівняннями $3x - y + 2 = 0$ та $6x - 2y - 7 = 0$.
Встановити їх взаємне розташування.

9.2. Напрями руху задані рівняннями $2x + 4y - 5 = 0$ та $4x + 8y + 3 = 0$.
Визначити взаємне розташування прямих.

Приклад 10. Відстань від автомобіля до прямолінійної межі

На координатному плані положення автомобіля задано точкою

$$M(4; 3).$$

Межа робочої зони станції технічного обслуговування задана прямою

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Одна координатна одиниця відповідає одному метру. Визначити найкоротшу відстань від автомобіля до межі робочої зони.

Розв'язання

Використовуємо формулу відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Маємо:

$$A = 3, B = 4, C = -10,$$

$$x_0 = 4, y_0 = 3.$$

Підставимо:

$$d = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}.$$

Обчислюємо чисельник:

$$|12 + 12 - 10| = 14.$$

Обчислюємо знаменник:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Тому

$$d = \frac{14}{5} = 2,8.$$

Відповідь

$$\boxed{d = 2,8 \text{ м}}.$$

Найкоротша відстань від умовної точки розташування автомобіля до прямолінійної межі робочої зони становить 2,8 метра.

Подібні задачі для самостійного розв'язування

10.1. Автомобіль розташований у точці $M(3; 4)$, а межа діагностичного майданчика задана рівнянням $3x + 4y - 5 = 0$. Одна координатна одиниця дорівнює одному метру. Знайти найкоротшу відстань.

10.2. Положення автомобіля задано точкою $N(5; 2)$, а край технологічної зони — прямою $4x + 3y - 8 = 0$. Визначити найкоротшу відстань.

4. Самостійна робота на практичному занятті

Завдання 1

На координатному плані автомобіль рухається від точки $A(2; 4)$ до точки $B(8; 10)$. Скласти рівняння прямолінійної траєкторії у загальному вигляді.

Завдання 2

Напрямок руху автомобіля проходить через точки $M(-; 13)$ і $N(5; 9)$. Знайти кутовий коефіцієнт та скласти рівняння прямої.

Завдання 3

Напрямна діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 3x - 4.$$

Через точку $A(2; 5)$ скласти рівняння паралельної напрямної.

Завдання 4

Поздовжня вісь автомобіля на координатній схемі задана рівнянням

$$y = -2x + 3.$$

Через точку $B(4; 1)$ скласти рівняння прямої, перпендикулярної до цієї осі.

Завдання 5

Два напрямки руху задано прямими

$$y = 2x + 3, y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Визначити їх взаємне розташування.

Завдання 6

Дві технологічні напрямні задані рівняннями

$$y = 3x - 2, y = x + 4.$$

Знайти гострий кут між ними.

Завдання 7

Положення автомобіля задано точкою $M(5; 4)$, а прямолінійна межа робочої зони —

$$3x + 4y - 6 = 0.$$

Одна координатна одиниця дорівнює одному метру. Знайти найкоротшу відстань від автомобіля до межі.

Завдання 8

На плані станції технічного обслуговування дві напрямні задані рівняннями

$$2x - y + 5 = 0, 4x - 2y - 3 = 0.$$

Визначити їх взаємне розташування та обґрунтувати відповідь.

5. Підведення підсумків практичного заняття

Після виконання практичної роботи здобувач освіти повинен уміти складати рівняння прямої через одну або дві задані точки, переходити від одного виду рівняння прямої до іншого, визначати кутовий коефіцієнт, знаходити кут між прямими, перевіряти паралельність і перпендикулярність прямих та визначати відстань від точки до прямої.

У професійно орієнтованих задачах спеціальності G9 «Прикладна механіка» ці математичні засоби дозволяють створювати спрощені координатні моделі положення технічних об'єктів, прямолінійних напрямів переміщення та

елементів розрахункових схем, що відповідає практичному акценту робочої програми.

Типові помилки

Особливу увагу необхідно звернути на правильний порядок координат точок під час обчислення кутового коефіцієнта; знаки коефіцієнтів під час перетворення загального рівняння; відмінність між умовами паралельності та перпендикулярності; використання модуля у формулі відстані від точки до прямої; перевірку того, що знайдена пряма справді проходить через задану точку.

6. Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називають рівнянням прямої на площині?
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Що характеризує кутовий коефіцієнт?
5. Як пов'язані кутовий коефіцієнт та кут нахилу прямої?
6. Як знайти кутовий коефіцієнт за координатами двох точок?
7. Як скласти рівняння прямої через задану точку?
8. Як скласти рівняння прямої через дві точки?
9. Як перевірити, чи належить точка прямій?
10. Як знайти кут між двома прямими?
11. Яка умова паралельності двох прямих?
12. Яка умова перпендикулярності двох прямих?
13. Як скласти рівняння прямої, паралельної заданій?
14. Як скласти рівняння прямої, перпендикулярної до заданої?
15. Як перейти від загального рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом?
16. Як визначити відстань від точки до прямої?
17. Чому у формулі відстані від точки до прямої використовується модуль?
18. Як рівняння прямої можна застосовувати для опису напрямку руху автомобіля?

19. Як перевірити паралельність двох напрямів на координатній схемі?
20. Як перевірити перпендикулярність поздовжнього та поперечного напрямів?
21. Яке практичне значення має визначення кута між двома прямими?
22. Як координатний метод може використовуватися під час побудови схеми діагностичного майданчика?
23. Яке професійне значення має визначення відстані від точки до прямої?
24. Чому під час розв'язування професійних задач важливо правильно визначити масштаб координатної схеми?
25. Які вихідні дані необхідні для однозначного визначення прямої?

ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання — максимальна оцінка 2 бали

Домашня робота відповідає передбаченому робочою програмою індивідуальному завданню: **за заданими координатами точок скласти рівняння прямої та дослідити взаємне розташування прямих.**

Завдання мають різний рівень складності.

Завдання 1. Початковий рівень — 0,25 бала

На координатній схемі автомобіль рухається від точки

$$A(2; 3)$$

до точки

$$B(6; 7).$$

Знайти кутовий коефіцієнт прямолінійної траєкторії автомобіля.

Завдання 2. Середній рівень — 0,25 бала

Автомобіль рухається прямолінійною ділянкою через точки

$$A(1; 2), B(7; 8).$$

Скласти рівняння прямої через дві точки та подати його у загальному вигляді.

Завдання 3. Достатній рівень — 0,50 бала

Напрямна лінія діагностичного стенда задана рівнянням

$$y = 2x - 3.$$

Через точку

$$M(4; 2)$$

скласти рівняння прямої, паралельної заданій. Перевірити виконання умови паралельності.

Завдання 4. Достатній рівень — 0,50 бала

Поздовжня вісь автомобіля на координатній схемі задана рівнянням

$$y = 3x + 1.$$

Через точку

$$N(3; 4)$$

скласти рівняння прямої, перпендикулярної до поздовжньої осі. Перевірити умову перпендикулярності.

Завдання 5. Високий рівень, професійно орієнтована задача — 0,50 бала

На координатній схемі станції технічного обслуговування напрям руху першого автомобіля задано прямою

$$y = 2x + 1,$$

а напрям руху другого автомобіля —

$$y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Необхідно:

- а) визначити кутові коефіцієнти обох напрямів;
- б) встановити, чи є прямі паралельними або перпендикулярними;
- в) знайти гострий кут між напрямками руху;
- г) якщо автомобіль розташований у точці $M(4; 5)$, визначити відстань від цієї точки до першої прямої, вважаючи одну координатну одиницю одним метром.

Максимальна оцінка за індивідуальне домашнє завдання:

$$\boxed{0,25 + 0,25 + 0,50 + 0,50 + 0,50 = 2,00 \text{ бали}}.$$

Критерії оцінювання домашнього завдання

Завдання	Рівень складності	Максимальна кількість балів
1	Початковий	0,25

Завдання	Рівень складності	Максимальна кількість балів
2	Середній	0,25
3	Достатній	0,50
4	Достатній	0,50
5	Високий, професійно орієнтований	0,50
Разом		2,00

Повний бал за кожне завдання виставляється за правильний вибір математичного методу, послідовний запис розв'язання, правильні обчислення та відповідь. За правильний алгоритм із незначною арифметичною помилкою може бути виставлена половина передбаченої за відповідне завдання кількості балів.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті.* Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка»,** Заклад професійної освіти

«Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. У програмі для практичного заняття № 7 визначено складання рівнянь прямої та дослідження взаємного розташування прямих як зміст індивідуального розрахункового завдання.

Варіант 1

1. Дано точку $M(2; 3)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт $k = 2$. Отримане рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 2)$ і $B(5; 6)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати отримане рівняння у загальному вигляді.

3. Дано дві прямі:

$$y = 3x + 2, y = 3x - 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти обох прямих. На підставі отриманих значень установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(3; 4)$ та пряму

$$y = 2x - 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P і перпендикулярна до заданої прямої. Перевірити виконання умови перпендикулярності.

5. Дано дві прямі:

$$y = 2x + 3, y = \frac{1}{2}x - 4.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та знайти величину гострого кута між прямими у градусах.

Варіант 2

1. Дано точку $M(1; 4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт $k = 3$. Записати отримане рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; 1)$ і $B(6; 9)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -2x + 3, y = -2x - 6.$$

Знайти кутові коефіцієнти прямих, визначити їх взаємне розташування та обґрунтувати отриманий висновок.

4. Дано точку $P(2; 5)$ і пряму

$$y = 4x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку та паралельна до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 2, y = x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування прямих та знайти гострий кут між ними.

Варіант 3

1. Дано точку $M(-; 23)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку і має кутовий коефіцієнт $k = -2$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 12)$ і $B(3; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 4x - 3, y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Відповідь обґрунтувати відповідною умовою.

4. Дано точку $P(4; 1)$ і пряму

$$y = -3x + 5.$$

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P паралельно заданій прямій. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 2x - 1, y = -x + 4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 4

1. Дано точку $M(3; -1)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 2$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 5)$ і $B(4; 11)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Знайти кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 4x - 2y - 5 = 0.$$

Привести кожне рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(1; 3)$ і пряму

$$y = 3x + 2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 4x + 1, \quad y = x - 2.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити величину гострого кута між прямими.

Варіант 5

1. Дано точку $M(4; 2)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M і має кутовий коефіцієнт $k = -1$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; 3)$ і $B(8; 9)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 5x + 4, \quad y = 5x - 7.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Відповідь обґрунтувати.

4. Дано точку $P(-; 24)$ і пряму

$$y = -2x + 1.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , перпендикулярної до заданої прямої. Перевірити виконання умови перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 1, y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 6

1. Дано точку $M(-; 15)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку і має кутовий коефіцієнт $k = 4$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 21)$ і $B(2; 5)$. Скласти рівняння прямої через ці точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x - 6, y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(3; -2)$ і пряму

$$y = 3x + 7.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 4, y = x - 3.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між ними.

Варіант 7

1. Дано точку $M(5; 1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = -3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; -2)$ і $B(4; 4)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x - y + 2 = 0, 6x - 2y + 7 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, визначити k_1 і k_2 та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2; 6)$ та пряму

$$y = 4x - 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 3, y = x + 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 8

1. Дано точку $M(2; -3)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. Записати результат у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 32)$ і $B(3; 8)$. Скласти рівняння прямої через ці точки, знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -4x + 1, y = \frac{1}{4}x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Висновок обґрунтувати.

4. Дано точку $P(1; -2)$ та пряму

$$y = -2x + 4.$$

Скласти рівняння прямої через задану точку, паралельної до даної прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 4, y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування прямих та знайти величину гострого кута між ними.

Варіант 9

1. Дано точку $M(-; 34)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; -1)$ і $B(6; 7)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 3x - 5, y = 3x + 6.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(4; 2)$ і пряму

$$y = -3x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 4x - 2, y = 2x + 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та визначити гострий кут між прямими.

Варіант 10

1. Дано точку $M(1; -4)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 13)$ і $B(5; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x + 4y - 5 = 0, x + 2y + 3 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(3; 5)$ і пряму

$$y = x - 4.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно до заданої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 1, y = -3x + 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 11

1. Дано точку $M(4; 5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 1)$ і $B(5; 9)$. Скласти рівняння прямої через задані точки, знайти кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -3x + 4, y = -3x - 2.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-; 12)$ і пряму

$$y = 5x + 3.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , перпендикулярної до заданої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = x + 4, y = -2x + 1.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 12

1. Дано точку $M(-; 2 - 1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -4$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 24)$ і $B(2; -4)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 2x + 7, y = -\frac{1}{2}x - 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих і обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(2; 3)$ і пряму

$$y = 4x - 6.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 5, y = 2x - 1.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 13

1. Дано точку $M(3; 6)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо $k = -2$. Результат записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(0; 2)$ і $B(4; 10)$. Скласти рівняння прямої через ці точки. Знайти кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$4x - y + 3 = 0, 8x - 2y - 1 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування.

4. Дано точку $P(5; 2)$ та пряму

$$y = 2x + 6.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до даної прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = -x + 2, y = 3x - 4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між ними.

Варіант 14

1. Дано точку $M(-; 42)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 3 - 1)$ і $B(3; 5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки, знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 4x + 5, y = -\frac{1}{4}x - 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(1; 4)$ та пряму

$$y = -3x + 2.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , паралельної до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прями:

$$y = 2x - 3, y = \frac{1}{3}x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 15

1. Дано точку $M(5; -2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 4)$ і $B(7; 10)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прями:

$$y = -5x + 3, y = -5x - 4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-; 25)$ і пряму

$$y = 3x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прями:

$$y = 4x + 3, y = x - 5.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 16

1. Дано точку $M(2; 7)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -3$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 1 - 2)$ і $B(3; 6)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прями:

$$y = 2x - 4, y = -\frac{1}{2}x + 7.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування прямих і обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(4; -1)$ та пряму

$$y = 5x + 2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x - 1, y = -x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 17

1. Дано точку $M(-; 13)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; 5)$ і $B(6; 1)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x + 6y - 4 = 0, x + 2y + 5 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(3; 2)$ та пряму

$$y = -4x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 2x + 5, y = \frac{1}{2}x - 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 18

1. Дано точку $M(4; -3)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = -1$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 42)$ і $B(2; 8)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 3x + 1, y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування. Відповідь обґрунтувати.

4. Дано точку $P(-; 15)$ і пряму

$$y = 2x - 3.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , паралельної до заданої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 6, y = x - 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 19

1. Дано точку $M(3; 1)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 4$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; -3)$ і $B(5; 5)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 6x - 2, y = 6x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих. Обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(2; -4)$ і пряму

$$y = 2x + 3.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 5x + 1, y = 2x - 4.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 20

1. Дано точку $M(-; 35)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 2 - 3)$ і $B(4; 3)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$4x - 2y + 3 = 0, 2x - y - 5 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, знайти кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(5; 1)$ і пряму

$$y = -4x + 2.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , паралельної до заданої прямої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 2, y = -2x + 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 21

1. Дано точку $M(1; 6)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = 2$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(0; -1)$ і $B(4; 7)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -2x + 5, y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(3; 5)$ та пряму

$$y = 4x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = x + 3, y = 3x - 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 22

1. Дано точку $M(-; 24)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = 5$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 15)$ і $B(3; 1)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 4x - 7, y = 4x + 3.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(-; 32)$ і пряму

$$y = 3x + 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -3x + 4, y = x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 23

1. Дано точку $M(5; 3)$. Скласти рівняння прямої через цю точку з кутовим коефіцієнтом $k = -4$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; 6)$ і $B(6; -2)$. Скласти рівняння прямої через дві задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$5x - y + 1 = 0, 10x - 2y - 3 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти їх кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування.

4. Дано точку $P(1; -3)$ і пряму

$$y = -2x + 4.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прямі:

$$y = 2x - 5, y = -\frac{1}{3}x + 1.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 24

1. Дано точку $M(2; -5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 3$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 31)$ і $B(1; 9)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 3x - 4, y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих і обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(4; 3)$ та пряму

$$y = -x + 6.$$

Скласти рівняння прямої через точку P , паралельної до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 4x - 1, y = 2x + 5.$$

Знайти їх кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 25

1. Дано точку $M(-; 41)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = -3$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; 6)$ і $B(5; 2)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через ці точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$2x + 6y - 5 = 0, x + 3y + 4 = 0.$$

Привести обидва рівняння до вигляду з кутовим коефіцієнтом, знайти k_1 і k_2 та визначити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2; 4)$ та пряму

$$y = 5x - 2.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити отриманий результат.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 3, y = 2x - 1.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 26

1. Дано точку $M(3; 5)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має кутовий коефіцієнт $k = \frac{1}{2}$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 22)$ і $B(4; 5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт та записати отримане рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = -4x + 2, y = -4x - 6.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати висновок.

4. Дано точку $P(-; 13)$ і пряму

$$y = 2x + 7.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно заданій прямій. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = 3x + 4, y = -x + 2.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 27

1. Дано точку $M(-; 1 - 4)$. Скласти рівняння прямої через цю точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = 2$. Рівняння записати у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(2; -3)$ і $B(6; 5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прями:

$$y = 2x + 1, y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Визначити кутові коефіцієнти, установити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(5; 4)$ та пряму

$$y = 3x - 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Виконати перевірку.

5. Дано прями:

$$y = x - 2, y = 4x + 3.$$

Визначити їх кутові коефіцієнти, взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 28

1. Дано точку $M(4; 6)$. Скласти рівняння прямої через задану точку з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Записати його у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 1 - 1)$ і $B(5; 5)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Визначити кутовий коефіцієнт і записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прями:

$$6x - 3y + 2 = 0, 2x - y - 4 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти та встановити взаємне розташування прямих.

4. Дано точку $P(2; -3)$ і пряму

$$y = -5x + 1.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно до заданої прямої. Перевірити умову паралельності.

5. Дано прями:

$$y = 2x + 5, y = -x + 3.$$

Знайти кутові коефіцієнти, визначити взаємне розташування та обчислити гострий кут між прямими.

Варіант 29

1. Дано точку $M(2; 1)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через цю точку та має кутовий коефіцієнт $k = 4$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(-; 34)$ і $B(3; -2)$. Скласти рівняння прямої через задані точки. Знайти її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$y = 5x - 1, y = -\frac{1}{5}x + 4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, встановити взаємне розташування прямих та обґрунтувати відповідь.

4. Дано точку $P(-; 23)$ і пряму

$$y = -3x + 5.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої. Перевірити умову перпендикулярності.

5. Дано прямі:

$$y = 4x + 2, y = x - 4.$$

Визначити кутові коефіцієнти, дослідити взаємне розташування та знайти гострий кут між прямими.

Варіант 30

1. Дано точку $M(-; 32)$. Скласти рівняння прямої через задану точку, якщо її кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{2}$. Записати рівняння у вигляді $y = kx + b$.

2. Дано точки $A(1; -2)$ і $B(7; 4)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки. Визначити її кутовий коефіцієнт та записати рівняння у загальному вигляді.

3. Дано прямі:

$$3x - y - 2 = 0, 6x - 2y + 7 = 0.$$

Привести рівняння до вигляду $y = kx + b$, знайти кутові коефіцієнти обох прямих та встановити їх взаємне розташування.

4. Дано точку $P(4; -2)$ і пряму

$$y = 2x + 3.$$

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно до заданої прямої. Перевірити виконання умови паралельності.

5. Дано прямі:

$$y = -2x + 1, y = 3x - 5.$$

Визначити кутові коефіцієнти обох прямих, установити їх взаємне розташування та знайти величину гострого кута між прямими у градусах.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання Зміст завдання		Максимальна кількість балів
1	Складання рівняння прямої через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом	0,25
2	Складання рівняння прямої через дві задані точки	0,25
3	Визначення взаємного розташування двох прямих	0,50
4	Складання рівняння прямої, паралельної або перпендикулярної до заданої	0,50
5	Комплексне завдання на дослідження взаємного розташування та знаходження кута між прямими	0,50
Разом		2,00
2,00 бали		

Усі п'ять завдань виконано правильно і в повному обсязі. Здобувач освіти правильно обирає необхідні формули, послідовно виконує математичні перетворення, правильно визначає кутові коефіцієнти, використовує умови паралельності та перпендикулярності, правильно знаходить кут між прямими. У завданнях, де передбачена перевірка, її виконано правильно. Відповіді записано повністю.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв'язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано правильно, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно розуміє умови

паралельності та перпендикулярності й уміє застосовувати формулу кута між прямими.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання початкового та середнього рівнів і частково виконано складніші завдання. Здобувач освіти вміє складати найпростіші рівняння прямої, але допускає помилки під час визначення взаємного розташування прямих, складання рівняння перпендикулярної прямої або знаходження кута між прямими.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає окремі основні формули та може виконати прості елементи завдань, але допускає суттєві помилки під час складання рівнянь прямих та застосування умов паралельності й перпендикулярності. Складніші завдання виконано частково або неправильно.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Основні способи складання рівняння прямої, визначення кутового коефіцієнта, дослідження паралельності та перпендикулярності й знаходження кута між прямими не засвоєно на достатньому рівні.

Таким чином, **кожен із 30 варіантів містить п'ять повністю сформульованих завдань однакової структури та приблизно однакового рівня складності**, а оцінювання кожного варіанта здійснюється за єдиними критеріями з максимальною оцінкою **2 бали**.

Практичне заняття № 8

Тема: Криві другого порядку: коло, еліпс

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Криві другого порядку: коло, еліпс»; навчитися розпізнавати коло та еліпс за їх рівняннями, складати канонічні рівняння кола та еліпса за заданими параметрами, приводити рівняння до канонічного вигляду, визначати центр і радіус кола, півосі, вершини та фокуси еліпса, перевіряти належність точки заданій кривій та виконувати графічну побудову кола й еліпса.

Зміст заняття відповідає робочій програмі: для практичного заняття 8 передбачено дослідження рівняння кола або еліпса, приведення його до канонічного вигляду, визначення виду кривої, центра і радіуса кола або півосей, вершин і фокусів еліпса та виконання графічної побудови.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Які лінії називають кривими другого порядку?
2. Які основні криві другого порядку ви знаєте?
3. Що називається колом?
4. Що називається центром кола?
5. Що називається радіусом кола?
6. Який вигляд має канонічне рівняння кола із центром у початку координат?
7. Який вигляд має рівняння кола із центром у точці $C(a; b)$?
8. Як визначити координати центра кола за його канонічним рівнянням?
9. Як визначити радіус кола за його рівнянням?
10. Як перевірити, чи належить задана точка колу?
11. Що називається еліпсом?
12. Який вигляд має канонічне рівняння еліпса?

- 13.Що називається великою піввіссю еліпса?
- 14.Що називається малою піввіссю еліпса?
- 15.Як визначити довжину великої осі еліпса?
- 16.Як визначити довжину малої осі еліпса?
- 17.Як за канонічним рівнянням визначити напрям великої осі еліпса?
- 18.Що називається вершинами еліпса?
- 19.Що називається фокусами еліпса?
- 20.Як визначити відстань від центра еліпса до його фокуса?
- 21.Як знайти координати фокусів еліпса?
- 22.Як перевірити, чи належить задана точка еліпсу?
- 23.За якої умови еліпс перетворюється на коло?
- 24.Як привести загальне рівняння кола до канонічного вигляду?
- 25.Як привести рівняння еліпса до канонічного вигляду?

Розв'язування прикладів

- 1. Скласти рівняння кола із центром у початку координат і радіусом $R = 5$.**

Розв'язок

Канонічне рівняння кола із центром у початку координат має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

За умовою:

$$R = 5.$$

Тому:

$$R^2 = 25.$$

Підставимо отримане значення:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Перевірка

Наприклад, точка $A(5; 0)$ повинна належати цьому колу.

Підставимо її координати:

$$5^2 + 0^2 = 25,$$

$$25 = 25.$$

Отже, точка належить колу.

Відповідь:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння кола із центром у початку координат, якщо його радіус дорівнює 4.
2. Скласти рівняння кола із центром у початку координат, якщо його радіус дорівнює 7.

2. Скласти рівняння кола із центром у точці $C(3; -2)$ і радіусом $R = 4$.

Розв'язок

Рівняння кола із центром у точці $C(a; b)$ має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

За умовою:

$$a = 3, b = -2, R = 4.$$

Підставимо значення:

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2.$$

Отримаємо:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Перевірка

Візьмемо точку $A(7; -2)$, яка віддалена від центра на 4 одиниці.

Підставимо:

$$(7 - 3)^2 + (-2 + 2)^2 = 16,$$

$$16 + 0 = 16.$$

Отже, рівняння складено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; 5)$ і радіусом $R = 3$.
2. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 41)$ і радіусом $R = 5$.

3. За заданим рівнянням кола визначити координати центра і радіус:

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним рівнянням:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Із першого виразу:

$$x - a = x - 4,$$

тому:

$$a = 4.$$

Із другого:

$$y - b = y + 3 = y - (-3),$$

тому:

$$b = -3.$$

Отже, центр кола:

$$C(4; -3).$$

Далі:

$$R^2 = 36.$$

Тому:

$$R = \sqrt{36} = 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{C(4; -3), R = 6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Визначити координати центра та радіус кола

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49.$$

2. Визначити координати центра та радіус кола

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

4. Перевірити, чи належить точка $M(4; 5)$ колу

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Розв'язок

Щоб перевірити належність точки колу, підставимо її координати в рівняння.

За умовою:

$$x = 4, y = 5.$$

Отримаємо:

$$(4 - 1)^2 + (5 - 1)^2 = 25.$$

Обчислимо:

$$3^2 + 4^2 = 25,$$

$$9 + 16 = 25,$$

$$25 = 25.$$

Рівність виконується. Отже, координати точки задовольняють рівняння кола.

Відповідь:

$$\boxed{M(4; 5) \text{ належить колу.}}$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(5; 4)$ колу

$$(x - 2)^2 + y^2 = 25.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(1; 6)$ колу

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

5. Привести рівняння кола до канонічного вигляду та визначити його центр і радіус:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Розв'язок

Перенесемо вільний член у праву частину та згрупуємо члени з x і y :

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 12.$$

Доповнимо перші два вирази до повних квадратів.

Для змінної x :

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9.$$

Для змінної y :

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4.$$

Підставимо:

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 = 12.$$

Звідси:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 12 + 9 + 4.$$

Отже:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Порівнюючи з канонічним рівнянням, маємо:

$$C(3; -2),$$

$$R = \sqrt{25} = 5.$$

Перевірка

Розкриємо дужки:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 25.$$

Перенесемо все в ліву частину:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Отримали початкове рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25},$$

$$\boxed{C(3; -2), R = 5}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

та визначити центр і радіус кола.

2. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

та визначити центр і радіус кола.

6. За канонічним рівнянням еліпса визначити його півосі, вершини та фокуси:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння еліпса, велика вісь якого розташована вздовж осі абсцис, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де

$$a > b > 0.$$

Порівняємо рівняння:

$$a^2 = 25, b^2 = 9.$$

Тому:

$$a = 5, b = 3.$$

Велика піввісь дорівнює 5, мала піввісь — 3.

Довжина великої осі:

$$2a = 10.$$

Довжина малої осі:

$$2b = 6.$$

Вершини великої осі:

$$A_1(-5; 0), A_2(5; 0).$$

Вершини малої осі:

$$B_1(0; -3), B_2(0; 3).$$

Для визначення фокусів знайдемо c :

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Підставимо:

$$c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Отже:

$$c = 4.$$

Фокуси:

$$F_1(-; 40), F_2(4; 0).$$

Відповідь:

$$a = 5, b = 3, c = 4;$$

$$A_1(-; 50), A_2(5; 0), B_1(0; -3), B_2(0; 3);$$

$$F_1(-; 40), F_2(4; 0).$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

2. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

7. Визначити основні характеристики еліпса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Розв'язок

У заданому рівнянні більший знаменник розташований під y^2 :

$$25 > 16.$$

Отже, велика вісь еліпса розташована вздовж осі ординат.

Велика піввісь:

$$a = \sqrt{25} = 5.$$

Мала піввісь:

$$b = \sqrt{16} = 4.$$

Довжини осей:

$$2a = 10, 2b = 8.$$

Вершини великої осі:

$$A_1(0; -5), A_2(0; 5).$$

Вершини малої осі:

$$B_1(-; 40), B_2(4; 0).$$

Знайдемо відстань від центра до фокусів:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Отже:

$$c^2 = 25 - 16 = 9,$$

$$c = 3.$$

Оскільки велика вісь вертикальна, фокуси також знаходяться на осі ординат:

$$F_1(0; -3), F_2(0; 3).$$

Відповідь:

$$\boxed{a = 5, b = 4, c = 3};$$

велика вісь розташована вздовж осі ординат;

$$\boxed{F_1(0; -3), F_2(0; 3)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

2. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

Для кожного еліпса визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

8. Перевірити, чи належить точка $M(3; 3, 2)$ еліпсу

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 3, y = 3,2.$$

Отримаємо:

$$\frac{3^2}{25} + \frac{3,2^2}{16}.$$

Обчислимо:

$$\frac{9}{25} + \frac{10,24}{16}.$$

Маємо:

$$\frac{9}{25} = 0,36,$$

$$\frac{10,24}{16} = 0,64.$$

Тоді:

$$0,36 + 0,64 = 1.$$

Отже, координати точки задовольняють рівняння еліпса.

Відповідь:

$$\boxed{M(3; 3,2) \text{ належить еліпсу}.}$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $M(4; 1,8)$ еліпсу

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Перевірити, чи належить точка $N(0; 3)$ еліпсу

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

9. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь $a = 6$, мала піввісь $b = 4$, а велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

Розв'язок

Канонічне рівняння такого еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою:

$$a = 6, b = 4.$$

Знайдемо квадрати півосей:

$$a^2 = 36,$$

$$b^2 = 16.$$

Підставимо:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Перевірка

Вершина великої осі $A(6; 0)$:

$$\frac{6^2}{36} + \frac{0^2}{16} = 1.$$

Отже:

$$1 = 1.$$

Вершина малої осі $B(0; 4)$:

$$\frac{0^2}{36} + \frac{4^2}{16} = 1.$$

Знову:

$$1 = 1.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння еліпса з півсями $a = 5$, $b = 3$, якщо велика вісь розташована вздовж осі абсцис.
2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь дорівнює 7, мала піввісь дорівнює 4, а велика вісь розташована вздовж осі ординат.

10. Привести рівняння еліпса до канонічного вигляду та визначити його основні характеристики:

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Розв'язок

Для приведення рівняння до канонічного вигляду поділимо обидві частини на 225:

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1.$$

Після скорочення:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже:

$$a^2 = 25, b^2 = 9.$$

Тому:

$$a = 5, b = 3.$$

Велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

Вершини:

$$A_1(-; 50), A_2(5; 0),$$

$$B_1(0; -3), B_2(0; 3).$$

Для знаходження фокусів:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Отже:

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Фокуси:

$$F_1(-; 40), F_2(4; 0).$$

Відповідь:

Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Основні характеристики:

$$\boxed{a = 5, b = 3, c = 4}.$$

Фокуси:

$$\boxed{F_1(-; 40), F_2(4; 0)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду та дослідити еліпс

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

2. Привести до канонічного вигляду та дослідити еліпс

$$25x^2 + 16y^2 = 400.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння кола:

1. центр $C(2; 3)$, радіус $R = 4$;
2. центр $C(-; 32)$, радіус $R = 5$;
3. центр $C(4; -1)$, радіус $R = 3$.

2. Визначте центр і радіус кола:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25;$$

2.

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 36;$$

3.

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 49.$$

3. Перевірте належність заданої точки колу:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25, M(4; 6);$$

2.

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16, N(2; 1);$$

3.

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25, P(6; 3).$$

4. Приведіть рівняння кола до канонічного вигляду, визначте центр і радіус:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0;$$

2.

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0;$$

3.

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

5. Визначте півосі, вершини та фокуси еліпса:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1;$$

2.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1;$$

3.

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

6. Приведіть рівняння еліпса до канонічного вигляду та визначте його основні характеристики:

$$4x^2 + 9y^2 = 144;$$

2.

$$16x^2 + 25y^2 = 400;$$

3.

$$9x^2 + 4y^2 = 144.$$

7. Складіть канонічне рівняння еліпса:

1. $a = 5, b = 3$, велика вісь розташована вздовж осі абсцис;

2. $a = 6, b = 4$, велика вісь розташована вздовж осі ординат;

3. $a = 8, b = 5$, велика вісь розташована вздовж осі абсцис.

8. Виконайте повне дослідження та побудову кривої:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16;$$

2.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

3.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Для кожної кривої визначити її вид, основні параметри, характерні точки та виконати схематичну побудову в системі координат.

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розпізнавати коло та еліпс за заданим рівнянням;
- складати канонічне рівняння кола;
- визначати координати центра та радіус кола;
- перевіряти належність точки колу;
- приводити рівняння кола до канонічного вигляду;
- складати канонічне рівняння еліпса;
- визначати велику та малу півосі еліпса;
- визначати напрям великої осі еліпса;
- знаходити вершини еліпса;
- знаходити фокуси еліпса;
- перевіряти належність точки еліпсу;
- приводити рівняння еліпса до канонічного вигляду;
- виконувати схематичну побудову кола та еліпса.

Робоча програма окремо визначає для цього практичного заняття розрахунково-графічний характер роботи: необхідно привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої та її характеристики і виконати побудову.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення кола.
2. Канонічне рівняння кола із центром у початку координат.
3. Рівняння кола із центром у довільній точці.
4. Визначення координат центра кола.
5. Визначення радіуса кола.
6. Перевірка належності точки колу.
7. Приведення рівняння кола до канонічного вигляду.

8. Означення еліпса.
9. Канонічне рівняння еліпса.
10. Велика і мала півосі еліпса.
11. Велика і мала осі еліпса.
12. Вершини еліпса.
13. Фокуси еліпса.
14. Визначення відстані від центра еліпса до його фокусів.
15. Визначення напрямку великої осі еліпса.
16. Перевірка належності точки еліпсу.
17. Приведення рівняння еліпса до канонічного вигляду.
18. Побудова кола за його канонічним рівнянням.
19. Побудова еліпса за його канонічним рівнянням.
20. Основні відмінності між колом та еліпсом.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал з теми «Криві другого порядку: коло, еліпс».

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить п'ять завдань різного рівня складності. Завдання передбачають складання та дослідження рівнянь кола й еліпса, приведення рівнянь до канонічного вигляду, визначення основних параметрів та виконання графічної побудови. Саме такі елементи індивідуального розрахунково-графічного завдання передбачені робочою програмою.

Усі завдання мають **загальноматематичний характер, без професійного спрямування**.

Варіант 1

1. Дано коло із центром у точці $C(2; 3)$ і радіусом $R = 4$. Скласти канонічне рівняння заданого кола.

2. Дано рівняння кола

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Визначити координати центра кола, його радіус та координати чотирьох крайніх точок на горизонтальному і вертикальному діаметрах.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, координати центра та радіус. Виконати схематичну побудову.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити велику і малу півосі, довжини осей, координати вершин та фокусів еліпса.

5. Дано рівняння

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити вид кривої, напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати схематичну побудову.

Варіант 2

1. Дано коло із центром $C(-; 32)$ і радіусом $R = 5$. Скласти його канонічне рівняння.

2. Дано коло

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 36.$$

Визначити координати центра, радіус та координати чотирьох крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати схематичну побудову кола.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано рівняння

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити основні характеристики еліпса та виконати його схематичну побудову.

Варіант 3

1. Дано коло із центром $C(4; -1)$ та радіусом $R = 3$. Скласти канонічне рівняння кола.

2. Дано рівняння

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та координати крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, її основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 4

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1; -4)$ та радіусом $R = 6$.

2. Для кола

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$$

визначити координати центра, радіус та чотири характерні точки для побудови.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

Визначити центр і радіус кола та виконати схематичну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано рівняння

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Привести його до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, вершини та фокуси і виконати побудову.

Варіант 5

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 2 - 3)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано коло

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Визначити його центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати схематичну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити півосі, довжини осей, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$9x^2 + 4y^2 = 144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Побудувати еліпс.

Варіант 6

1. Дано коло із центром $C(3; 4)$ і радіусом $R = 5$. Скласти його рівняння.

2. За рівнянням

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$$

визначити центр, радіус та координати крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$4x^2 + 25y^2 = 100.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 7

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 42)$ і радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$36x^2 + 16y^2 = 576.$$

Визначити вид кривої, півосі, вершини та фокуси. Виконати графічну побудову.

Варіант 8

1. Скласти рівняння кола із центром $C(5; -2)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано коло

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та побудувати еліпс.

Варіант 9

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 15)$ і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$25x^2 + 9y^2 = 225.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 10

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(4; 3)$ і радіусом $R = 2$.

2. Дано коло

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Дано:

$$16x^2 + 9y^2 = 144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 11

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 3 - 4)$ та радіусом $R = 5$.

2. Для кола

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 49$$

визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$16x^2 + 36y^2 = 576$$

до канонічного вигляду. Визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 12

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; -5)$ та радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0.$$

Визначити центр і радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$4x^2 + 16y^2 = 64.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 13

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1; 4)$ і радіусом $R = 5$.

2. Дано:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус і крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 14

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 51)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано коло

$$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 10 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2 + 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, вершини та фокуси і виконати побудову.

Варіант 15

1. Скласти рівняння кола із центром $C(3; -4)$ і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду, визначити всі основні характеристики еліпса та виконати побудову.

Варіант 16

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 24)$ і радіусом $R = 5$.

2. За рівнянням

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 36$$

визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$4x^2 + 9y^2 = 100$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

Варіант 17

1. Скласти рівняння кола із центром $C(5; 2)$ і радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0.$$

Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2 + 49y^2 = 784.$$

Визначити основні параметри еліпса та виконати його побудову.

Варіант 18

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 4 - 2)$ і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та побудувати коло.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати графічну побудову.

Варіант 19

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; -3)$ і радіусом $R = 7$.

2. Дано коло

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0.$$

Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{51} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати побудову.

Варіант 20

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 35)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано:

$$(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та чотири характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2 + 16y^2 = 576$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати його графічну побудову.

Варіант 21

1. Скласти рівняння кола із центром $C(4; -3)$ і радіусом $R = 5$.

2. Дано:

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки кола.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати побудову.

Варіант 22

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 1 - 5)$ і радіусом $R = 3$.

2. Дано коло

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр і радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$49x^2 + 25y^2 = 1225$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 23

1. Скласти рівняння кола із центром $C(3; 5)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано:

$$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

до канонічного вигляду, визначити всі основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 24

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 53)$ і радіусом $R = 5$.

2. Дано:

$$(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 10x + 4y + 13 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$25x^2 + 36y^2 = 900.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 25

1. Скласти рівняння кола із центром $C(1; -3)$ і радіусом $R = 6$.

2. Дано коло

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 26

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 25)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано:

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та чотири крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$4x^2 + 25y^2 = 100.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його побудову.

Варіант 27

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(5; -4)$ і радіусом $R = 3$.

2. Дано:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки.

3. Привести до канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0.$$

Визначити центр, радіус та виконати графічну побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

до канонічного вигляду, визначити напрям великої осі, півосі, вершини, фокуси та виконати побудову.

Варіант 28

1. Скласти рівняння кола із центром $C(-; 44)$ і радіусом $R = 5$.

2. Дано коло

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус та крайні точки.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус та виконати побудову.

4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та фокуси.

5. Привести рівняння

$$36x^2 + 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики еліпса та виконати графічну побудову.

Варіант 29

1. Скласти рівняння кола із центром $C(2; 4)$ і радіусом $R = 6$.

2. Дано:

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 64.$$

Визначити центр, радіус та характерні точки кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити центр, радіус і виконати побудову.

4. Дослідити:

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Визначити напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси.

5. Привести до канонічного вигляду:

$$16x^2 + 49y^2 = 784.$$

Визначити основні характеристики еліпса та виконати його графічну побудову.

Варіант 30

1. Скласти канонічне рівняння кола із центром $C(-; 3 - 2)$ і радіусом $R = 4$.

2. Дано рівняння кола

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Визначити координати центра, радіус та координати чотирьох крайніх точок кола.

3. Привести рівняння

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

до канонічного вигляду. Визначити вид кривої, координати центра, радіус та виконати схематичну побудову.

4. Дано еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

Визначити велику і малу півосі, довжини осей, координати вершин та фокусів.

5. Дано рівняння

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

Привести рівняння до канонічного вигляду, визначити вид кривої, напрям великої осі, півосі, вершини та фокуси. Виконати схематичну побудову еліпса.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Складання канонічного рівняння кола за заданими центром і радіусом	0,25
2	Визначення центра, радіуса та характерних точок кола	0,25

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
3	Приведення рівняння кола до канонічного вигляду, визначення параметрів і побудова	0,50
4	Дослідження еліпса: півосі, вершини та фокуси	0,50
5	Комплексне дослідження рівняння еліпса та його графічна побудова	0,50
Разом		2,00
2,00 бали		

Усі п'ять завдань виконано правильно та в повному обсязі. Правильно записано канонічні рівняння кола й еліпса; правильно визначено вид кривої; рівняння правильно приведено до канонічного вигляду; правильно знайдено центр і радіус кола, півосі, вершини та фокуси еліпса; графічні побудови відповідають отриманим параметрам. Усі математичні перетворення наведено послідовно, відповіді записано повністю.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв'язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано повністю, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно визначає вид кривої та її основні параметри, але може допустити незначну неточність у визначенні окремої характерної точки або під час графічної побудови.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання на складання та читання канонічного рівняння. Здобувач освіти в цілому розрізняє коло та еліпс, але допускає помилки під час приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення фокусів еліпса або виконання графічної побудови.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає окремі формули канонічних рівнянь кола й еліпса та може визначити окремі параметри за готовим канонічним рівнянням, але допускає суттєві помилки під час математичних перетворень та комплексного дослідження кривої.

0–0,25 бала

Правильно виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього вміння приводити рівняння до канонічного вигляду, визначати основні характеристики кола й еліпса та виконувати їх графічну побудову.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 8 — «Криві другого порядку: коло, еліпс». Робочою програмою для цього заняття передбачено індивідуальне дослідження рівняння кола або еліпса та виконання графічної побудови.

Практичне заняття № 9

Тема: Криві другого порядку: гіпербола, парабола

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Криві другого порядку: гіпербола, парабола»; навчитися розпізнавати гіперболу та параболу за їх рівняннями; приводити рівняння до канонічного вигляду; визначати основні параметри гіперболи та параболи; знаходити вершини, фокуси та інші характерні точки; складати рівняння гіперболи та параболи за заданими параметрами; визначати асимптоти гіперболи; виконувати схематичну графічну побудову кривих другого порядку.

Зміст заняття відповідає робочій програмі навчальної дисципліни «Вища математика»: для практичного заняття 9 передбачено дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи, приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення основних параметрів кривої, вершин, фокусів та інших характерних точок, для гіперболи — визначення асимптот, а також виконання графічної побудови.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Які лінії називають кривими другого порядку?
2. Які основні криві другого порядку ви знаєте?
3. Що називається гіперболою?
4. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи з дійсною віссю, розташованою вздовж осі абсцис?
5. Який вигляд має канонічне рівняння гіперболи з дійсною віссю, розташованою вздовж осі ординат?
6. Що називається дійсною піввіссю гіперболи?
7. Що називається уявною піввіссю гіперболи?
8. Як визначити вершини гіперболи?
9. Що називається фокусами гіперболи?

10. Як визначити відстань від центра гіперболи до її фокусів?
11. Який зв'язок існує між параметрами a , b і стгіперболи?
12. Що називається асимптотами гіперболи?
13. Як записуються рівняння асимптот гіперболи?
14. Як визначити напрям розташування віток гіперболи?
15. Як перевірити, чи належить задана точка гіперболі?
16. Що називається параболою?
17. Який вигляд має канонічне рівняння параболі, симетричної відносно осі абсцис?
18. Який вигляд має канонічне рівняння параболі, симетричної відносно осі ординат?
19. Що називається вершиною параболі?
20. Що називається віссю симетрії параболі?
21. Що називається фокусом параболі?
22. Що називається директрисою параболі?
23. Як за рівнянням параболі визначити напрям її віток?
24. Як визначити координати фокуса параболі?
25. Як визначити рівняння директриси параболі?
26. Як перевірити належність точки параболі?
27. Як привести рівняння гіперболи до канонічного вигляду?
28. Як привести рівняння параболі до канонічного вигляду?
29. Які характерні точки необхідно визначити для побудови гіперболи?
30. Які характерні точки необхідно визначити для побудови параболі?

Розв'язування прикладів

1. Визначити основні характеристики гіперболи

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Розв'язок

Задане рівняння вже має канонічний вигляд гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Порівняємо відповідні знаменники:

$$a^2 = 25, b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 5, b = 3.$$

Оскільки додатним є член, що містить x^2 , дійсна вісь гіперболи розташована вздовж осі абсцис, а її вітки напрямлені вправо і вліво.

Вершини гіперболи:

$$A_1(-; 50), A_2(5; 0).$$

Для визначення фокусів знайдемо параметр c :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Підставимо значення:

$$c^2 = 25 + 9 = 34,$$

$$c = \sqrt{34}.$$

Отже, фокуси:

$$F_1(-; \sqrt{34}0), F_2(\sqrt{34}; 0).$$

Рівняння асимптот гіперболи:

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Тому:

$$y = \pm \frac{3}{5}x.$$

Відповідь:

$$\boxed{a = 5, b = 3, c = \sqrt{34}};$$

$$\boxed{A_1(-; 50), A_2(5; 0)};$$

$$\boxed{F_1(-; \sqrt{34}0), F_2(\sqrt{34}; 0)};$$

$$\boxed{y = \pm \frac{3}{5}x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Визначити основні характеристики гіперболи

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним рівнянням гіперболи:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Маємо:

$$a^2 = 16, b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 4, b = 3.$$

Додатний член містить y^2 , тому дійсна вісь гіперболи розташована вздовж осі ординат. Вітки гіперболи напрямлені вгору і вниз.

Вершини:

$$A_1(0; -4), A_2(0; 4).$$

Знайдемо c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(0; -5), F_2(0; 5).$$

Для гіперболи з вертикальною дійсною віссю асимптоти мають вигляд:

$$y = \pm \frac{a}{b}x.$$

Отже:

$$y = \pm \frac{4}{3}x.$$

Відповідь:

$$a = 4, b = 3, c = 5;$$

$$A_1(0; -4), A_2(0; 4);$$

$$F_1(0; -5), F_2(0; 5);$$

$$y = \pm \frac{4}{3}x.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1.$$

2. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1.$$

Для кожної гіперболи визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння гіперболи до канонічного вигляду та визначити її основні характеристики:

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Розв'язок

Поділимо обидві частини рівняння на 144:

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1.$$

Скоротимо дроби:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння гіперболи.

Маємо:

$$a^2 = 16, b^2 = 9.$$

Отже:

$$a = 4, b = 3.$$

Вершини:

$$A_1(-; 40), A_2(4; 0).$$

Знайдемо c :

$$c^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$c = 5.$$

Фокуси:

$$F_1(-; 50), F_2(5; 0).$$

Асимптоти:

$$y = \pm \frac{3}{4}x.$$

Відповідь:

Канонічне рівняння:

$$\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Основні параметри:

$$\boxed{a = 4, b = 3, c = 5}.$$

Вершини:

$$\boxed{A_1(-; 40), A_2(4; 0)}.$$

Фокуси:

$$\boxed{F_1(-; 50), F_2(5; 0)}.$$

Асимптоти:

$$\boxed{y = \pm \frac{3}{4}x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Привести до канонічного вигляду та дослідити гіперболу

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

2. Привести до канонічного вигляду та дослідити гіперболу

$$25x^2 - 16y^2 = 400.$$

4. Перевірити, чи належить точка $M(5; 3)$ гіперболі

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 5, y = 3.$$

Отримаємо:

$$\frac{5^2}{16} - \frac{3^2}{16}.$$

Обчислимо:

$$\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

Координати точки задовольняють рівняння гіперболи.

Відповідь:

$$\boxed{M(5; 3) \text{ належить гіперболі.}}$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(5; 4)$ гіперболі

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(10; 6)$ гіперболі

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь $a = 4$, уявна піввісь $b = 3$, а дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.

Розв'язок

Для гіперболи, дійсна вісь якої розташована вздовж осі абсцис, канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою:

$$a = 4, b = 3.$$

Тому:

$$a^2 = 16, b^2 = 9.$$

Підставимо:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Перевірка

Вершина $A(4; 0)$ повинна належати гіперболі:

$$\begin{aligned}\frac{4^2}{16} - \frac{0^2}{9} &= 1, \\ 1 &= 1.\end{aligned}$$

Отже, рівняння складено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a = 5$, $b = 4$, а дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.
2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $a = 6$, $b = 2$, а дійсна вісь розташована вздовж осі ординат.

Парабола

6. Дослідити параболу

$$y^2 = 8x.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння параболи, вісь симетрії якої збігається з віссю абсцис, має вигляд:

$$y^2 = 2px.$$

Порівняємо:

$$2p = 8.$$

Звідси:

$$p = 4.$$

Вершина параболи знаходиться в початку координат:

$$O(0; 0).$$

Оскільки коефіцієнт у правій частині рівняння додатний, вітки параболи напрямлені вправо.

Фокус має координати:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Тому:

$$F(2; 0).$$

Директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Отже:

$$x = -2.$$

Для побудови визначимо декілька точок.

Якщо:

$$x = 2,$$

то:

$$y^2 = 16,$$

$$y = \pm 4.$$

Отримуємо точки:

$$A(2; 4), B(2; -4).$$

Відповідь:

вершина:

$$\boxed{O(0; 0)};$$

фокус:

$$\boxed{F(2; 0)};$$

директриса:

$$\boxed{x = -2};$$

вітки параболи напрямлені вправо.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$y^2 = 12x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

2. Дослідити параболу

$$y^2 = -16x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

7. Дослідити параболу

$$x^2 = 12y.$$

Розв'язок

Канонічне рівняння параболи з вертикальною віссю симетрії має вигляд:

$$x^2 = 2py.$$

Порівняємо:

$$2p = 12.$$

Звідси:

$$p = 6.$$

Вершина:

$$O(0; 0).$$

Оскільки коефіцієнт при y додатний, вітки параболи напрямлені вгору.

Фокус:

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right).$$

Отже:

$$F(0; 3).$$

Директриса:

$$y = -\frac{p}{2}.$$

Тому:

$$y = -3.$$

Для побудови візьмемо:

$$y = 3.$$

Тоді:

$$x^2 = 36,$$

$$x = \pm 6.$$

Отримуємо точки:

$$A(-6; 3), B(6; 3).$$

Відповідь:

$$O(0; 0);$$

$$F(0; 3);$$

$$y = -3;$$

вітки напрямлені вгору.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$x^2 = 8y.$$

2. Дослідити параболу

$$x^2 = -20y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису, напрям віток та декілька точок для побудови.

8. Визначити напрям віток, фокус і директрису параболи

$$y^2 = -20x.$$

Розв'язок

Порівняємо задане рівняння з канонічним:

$$y^2 = 2px.$$

Маємо:

$$2p = -20.$$

Звідси:

$$p = -10.$$

Вершина параболи:

$$O(0; 0).$$

Оскільки:

$$p < 0,$$

вітки параболи напрямлені вліво.

Фокус:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

Отже:

$$F(-; 50).$$

Директриса:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Тому:

$$x = 5.$$

Відповідь:

$$\boxed{O(0; 0)};$$

$$\boxed{F(-; 50)};$$

$$\boxed{x = 5};$$

вітки напрямлені вліво.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Дослідити параболу

$$y^2 = -12x.$$

2. Дослідити параболу

$$x^2 = -16y.$$

9. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, вісь симетрії збігається з віссю абсцис, а фокус має координати $F(3; 0)$.

Розв'язок

Для параболи

$$y^2 = 2px$$

координати фокуса визначаються за формулою:

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right).$$

За умовою:

$$\frac{p}{2} = 3.$$

Звідси:

$$p = 6.$$

Тоді:

$$2p = 12.$$

Отже, рівняння параболи:

$$y^2 = 12x.$$

Оскільки фокус знаходиться праворуч від вершини, вітки параболи напрямлені вправо.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = 12x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(2; 0)$.
2. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(0; -4)$.

10. Перевірити, чи належить точка $M(2; 4)$ параболі

$$y^2 = 8x.$$

Розв'язок

Підставимо координати точки:

$$x = 2, y = 4.$$

Ліва частина:

$$y^2 = 4^2 = 16.$$

Права частина:

$$8x = 8 \cdot 2 = 16.$$

Отже:

$$16 = 16.$$

Рівність виконується, тому точка належить параболі.

Відповідь:

$$\boxed{M(2; 4) \text{ належить параболі.}}$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Перевірити, чи належить точка $A(3; 6)$ параболі

$$y^2 = 12x.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(4; 4)$ параболі

$$x^2 = 4y.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Визначте основні характеристики гіперболи:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

2.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1;$$

3.

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1.$$

Для кожної гіперболи визначити півосі, вершини, фокуси та рівняння асимптот.

2. Приведіть рівняння гіперболи до канонічного вигляду та дослідіть її:

$$4x^2 - 9y^2 = 36;$$

2.

$$25x^2 - 16y^2 = 400;$$

3.

$$9y^2 - 4x^2 = 144.$$

3. Складіть канонічне рівняння гіперболи:

1. $a = 5, b = 3$, дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис;
2. $a = 4, b = 2$, дійсна вісь розташована вздовж осі ординат;
3. $a = 6, b = 5$, дійсна вісь розташована вздовж осі абсцис.

4. Перевірте належність точки заданій гіперболі:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, M(5; 4);$$

2.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, N(8; 3\sqrt{3});$$

3.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1, P(4; 3\sqrt{2}).$$

5. Дослідіть параболу:

$$y^2 = 16x;$$

2.

$$y^2 = -12x;$$

3.

$$x^2 = 20y;$$

4.

$$x^2 = -8y.$$

Для кожної параболу визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директрису.

6. Складіть рівняння параболу:

1. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(4; 0)$;
2. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(-; 30)$;
3. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(0; 2)$;
4. вершина знаходиться в початку координат, фокус $F(0; -5)$.

7. Перевірте належність точки параболі:

$$y^2 = 8x, M(2; 4);$$

2.

$$y^2 = 12x, N(3; 6);$$

3.

$$x^2 = 4y, P(4; 4).$$

8. Виконайте повне дослідження та графічну побудову:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

2.

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1;$$

3.

$$y^2 = 12x;$$

4.

$$x^2 = -16y.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розпізнавати гіперболу та параболу за заданим рівнянням;
- записувати канонічні рівняння гіперболи;
- визначати дійсну та уявну півосі гіперболи;
- визначати напрям розташування віток гіперболи;
- знаходити вершини та фокуси гіперболи;
- складати рівняння асимптот гіперболи;
- приводити рівняння гіперболи до канонічного вигляду;
- перевіряти належність точки гіперболі;
- записувати канонічні рівняння параболі;

- визначати вершину та вісь симетрії параболи;
- визначати напрям віток параболи;
- знаходити фокус параболи;
- складати рівняння директриси параболи;
- перевіряти належність точки параболі;
- виконувати графічну побудову гіперболи та параболи.

Відповідно до робочої програми результатом індивідуальної роботи на практичному занятті має бути дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи з визначенням основних параметрів, характерних точок, асимптот гіперболи та виконанням графічної побудови.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення гіперболи.
2. Канонічне рівняння гіперболи.
3. Дійсна та уявна півосі гіперболи.
4. Вершини гіперболи.
5. Фокуси гіперболи.
6. Зв'язок між параметрами a , b і c гіперболи.
7. Асимптоти гіперболи.
8. Визначення напрямку віток гіперболи.
9. Перевірка належності точки гіперболі.
10. Приведення рівняння гіперболи до канонічного вигляду.
11. Побудова гіперболи.
12. Означення параболи.
13. Канонічні рівняння параболи.
14. Вершина параболи.
15. Вісь симетрії параболи.
16. Напрямок віток параболи.
17. Фокус параболи.

18. Директриса параболи.
19. Визначення параметра параболи.
20. Перевірка належності точки параболи.
21. Складання рівняння параболи за координатами фокуса.
22. Побудова параболи за її канонічним рівнянням.
23. Основні відмінності між гіперболою та параболою.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал з теми «Криві другого порядку: гіпербола, парабола».

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті подано **п'ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Завдання не мають професійного спрямування і можуть використовуватися для здобувачів освіти різних спеціальностей.

Відповідно до робочої програми під час виконання індивідуального завдання необхідно привести задані рівняння до канонічного вигляду, визначити основні параметри кривих, вершини, фокуси та інші характерні точки, для гіперболи визначити асимптоти і виконати графічну побудову.

Варіант 1

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити дійсну та уявну півосі, напрям розташування віток і координати вершин гіперболи.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

визначити координати фокусів та скласти рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси, асимптоти та виконати схематичну побудову гіперболи.

4. Дано параболу

$$y^2 = 12x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус має координати $F(4; 0)$. Визначити директрису та виконати схематичну побудову.

Варіант 2

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і координати вершин.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

визначити фокуси та рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$4x^2 - 9y^2 = 36$$

до канонічного вигляду. Визначити всі основні характеристики гіперболи та виконати її побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -16x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; 3)$. Визначити напрям віток, директрису та виконати побудову.

Варіант 3

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$$

визначити координати фокусів і рівняння асимптот.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси, асимптоти та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 8y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директрису.

5. Скласти рівняння параболу, якщо її вершина знаходиться в початку координат, а фокус $F(-; 30)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 4

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати побудову гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -20y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; -4)$. Визначити директрису та виконати схематичну побудову.

Варіант 5

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

визначити фокуси й асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

до канонічного вигляду. Визначити вершини, фокуси, асимптоти та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 20x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболу з вершиною в початку координат, якщо її фокус $F(5; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 6

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{17} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2 - 9x^2 = 225$$

до канонічного вигляду, визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -12x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в початку координат, а фокус $F(0; 4)$. Визначити директрису та побудувати параболу.

Варіант 7

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{15} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси й асимптоти. Виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 16y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її фокус $F(-; 50)$, а вершина знаходиться в початку координат. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 8

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -12y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболу з фокусом $F(0; -3)$ і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 9

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток та вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{17} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 24x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат та фокусом $F(6; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 10

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{32} = 1.$$

Визначити півосі, напрям віток і вершини.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 9y^2 = 225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 24y.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти канонічне рівняння параболи з фокусом $F(0; 5)$ і вершиною в початку координат. Виконати схематичну побудову.

Варіант 11

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{21} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$4x^2 - 25y^2 = 100$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -24x.$$

Визначити вершину, фокус, директрису та напрям віток.

5. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус $F(-; 40)$. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 12

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{19} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -24y.$$

5. Скласти рівняння параболі з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; -6)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 13

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{11} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$49x^2 - 25y^2 = 1225$$

до канонічного вигляду. Виконати повне дослідження та побудову гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 28x.$$

5. Скласти рівняння параболі з вершиною в початку координат і фокусом $F(7; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 14

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2 - 16x^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти. Виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 28y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболу з фокусом $F(0; 7)$ і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 15

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Визначити її півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{21} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 16y^2 = 576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -28x.$$

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат і фокусом $F(-; 70)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 16

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{20} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{17} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9y^2 - 25x^2 = 225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -28y.$$

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат і фокусом $F(0; -7)$. Виконати графічну побудову.

Варіант 17

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{15} = 1$$

визначити фокуси й асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 4y^2 = 64$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 32x.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболу з фокусом $F(8; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 18

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{45} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{21} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$4y^2 - 9x^2 = 36$$

до канонічного вигляду. Визначити всі основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 32y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0; 8)$ і вершиною в початку координат. Виконати повне дослідження та побудову.

Варіант 19

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 4y^2 = 100$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -32x.$$

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат і фокусом $F(-; 80)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 20

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{36} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2 - 25x^2 = 400$$

до канонічного вигляду. Визначити основні характеристики та виконати побудову.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -32y.$$

5. Скласти рівняння параболі з фокусом $F(0; -8)$ і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 21

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{17} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$9x^2 - 25y^2 = 225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 36x.$$

5. Скласти рівняння параболі з вершиною в початку координат і фокусом $F(9; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 22

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{33} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2 - 9x^2 = 225$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 36y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболу з фокусом $F(0; 9)$. Визначити директрису та виконати графічну побудову.

Варіант 23

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$49x^2 - 16y^2 = 784$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження гіперболи.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -36x.$$

5. Скласти рівняння параболу з фокусом $F(-; 90)$. Визначити директрису, напрям віток та виконати побудову.

Варіант 24

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{28} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16y^2 - 49x^2 = 784$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -36y.$$

5. Скласти рівняння параболу з фокусом $F(0; -9)$ і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 25

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{40} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{19} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 40x.$$

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат і фокусом $F(10; 0)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 26

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{121} - \frac{x^2}{40} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25y^2 - 36x^2 = 900$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = 40y.$$

5. Скласти канонічне рівняння параболу з фокусом $F(0; 10)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 27

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{32} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{21} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$16x^2 - 36y^2 = 576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = -40x.$$

5. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат і фокусом $F(-; 100)$. Визначити директрису та виконати побудову.

Варіант 28

1. Дослідити гіперболу

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{32} = 1.$$

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{21} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$36y^2 - 16x^2 = 576$$

до канонічного вигляду та виконати повне дослідження.

4. Дослідити параболу

$$x^2 = -40y.$$

5. Скласти рівняння параболи з фокусом $F(0; -10)$ і вершиною в початку координат. Виконати побудову.

Варіант 29

1. Дано гіперболу

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити півосі, вершини та напрям віток.

2. Для гіперболи

$$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{32} = 1$$

визначити фокуси та асимптоти.

3. Привести рівняння

$$25x^2 - 36y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити півосі, вершини, фокуси та асимптоти і виконати графічну побудову.

4. Дослідити параболу

$$y^2 = 44x.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису.

5. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат та фокусом $F(11; 0)$. Визначити директрису і виконати схематичну побудову.

Варіант 30

1. Дано гіперболу

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1.$$

Визначити дійсну та уявну півосі, напрям розташування віток та координати вершин гіперболи.

2. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{32} = 1$$

визначити координати фокусів та скласти рівняння обох асимптот.

3. Привести рівняння

$$36x^2 - 25y^2 = 900$$

до канонічного вигляду. Визначити дійсну та уявну півосі, координати вершин і фокусів, скласти рівняння асимптот та виконати схематичну побудову гіперболи.

4. Дано параболу

$$x^2 = -44y.$$

Визначити вершину, вісь симетрії, напрям віток, координати фокуса та рівняння директриси.

5. Скласти канонічне рівняння параболу, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус має координати $F(0; -11)$. Визначити напрям віток, скласти рівняння директриси та виконати схематичну побудову.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії є **однаковими для всіх 30 варіантів**. Максимальна кількість балів за виконання одного варіанта становить **2 бали**.

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Визначення основних параметрів, вершин та напрямку віток гіперболи	0,25
2	Визначення фокусів та асимптот гіперболи	0,25
3	Приведення рівняння гіперболи до канонічного вигляду, повне дослідження та побудова	0,50

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
4	Дослідження параболи: вершина, вісь симетрії, напрям віток, фокус і директриса	0,50
5	Складання рівняння параболи за заданими параметрами, дослідження та побудова	0,50
Разом		2,00

2,00 бали

Усі п'ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено вид кожної кривої, канонічні рівняння, півосі, вершини та фокуси гіперболи, правильно складено рівняння її асимптот. Для параболи правильно визначено вершину, вісь симетрії, напрям віток, фокус та директрису. Графічні побудови відповідають знайденим параметрам. Розв'язання наведено послідовно, усі необхідні математичні перетворення записано.

1,50–1,75 бала

Основні способи розв'язування засвоєно правильно. Більшість завдань виконано повністю, але допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно розпізнає гіперболу і параболу, визначає їх основні параметри, але може допустити окрему неточність у координатах фокуса, рівнянні асимптоти, директриси або графічній побудові.

1,00–1,25 бала

Здобувач освіти правильно виконує прості завдання за готовими канонічними рівняннями, але допускає помилки під час приведення рівняння до канонічного вигляду, визначення фокусів, складання рівнянь асимптот або директриси. Графічна побудова виконана частково.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти знає канонічні рівняння гіперболи та параболи і може визначити лише окремі параметри кривих. Під час повного дослідження та побудови допускає суттєві помилки.

0–0,25 бала

Правильно виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього вміння розпізнавати гіперболу та параболу, приводити

рівняння до канонічного вигляду, визначати їх основні параметри й виконувати графічну побудову.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики : навчальний посібник.* Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клєсова.** *Математика в технічному університеті.* Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Гречко А. Л., Дудкін М. Є.** *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 9 — «Криві другого порядку: гіпербола, парабола». Робочою програмою передбачено дослідження заданого рівняння параболи або гіперболи, визначення основних параметрів, характерних точок, асимптот гіперболи та виконання графічної побудови.

Практичне заняття № 10

Тема: «Прикладне застосування»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Кожний варіант містить сім професійно орієнтованих задач:

1. метод координат;
2. рівняння прямої;
3. взаємне розташування прямих;
4. коло;
5. еліпс;
6. гіпербола;
7. парабола.

Варіант 1

Задача 1. На кресленні механічної пластини центри двох отворів мають координати $A(2; 3)$ і $B(8; 11)$. Визначити відстань між центрами отворів та координати середини відрізка AB .

Задача 2. Вісь прямолінійної напрямної механізму проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(5; 6)$. Скласти рівняння осі напрямної у загальному вигляді.

Задача 3. Осі двох механічних елементів описуються рівняннями $y = 2x + 1$ та $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Визначити взаємне розташування осей і знайти координати точки їх перетину.

Задача 4. Контур круглого отвору деталі задано рівнянням $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$. Визначити координати центра, радіус та діаметр отвору.

Задача 5. Еліптичний профіль деталі описується рівнянням $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет профілю.

Задача 6. Гіперболічний профіль механічного елемента задано рівнянням $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Визначити вершини, фокуси та скласти рівняння асимптот.

Задача 7. Траєкторія контрольної точки механізму описується параболою $y^2 = 16x$. Визначити параметр параболи, координати фокуса, рівняння директриси та напрям віток.

Варіант 2

Задача 1. Центри двох шарнірів механізму розташовані в точках $A(-; 21)$ і $B(4; 9)$. Визначити відстань між шарнірами та координати середини відрізка, що їх сполучає.

Задача 2. Вісь стрижня проходить через точки $A(-; 21)$ і $B(4; 7)$. Скласти рівняння осі стрижня у загальному вигляді.

Задача 3. Дві напрямні механізму задано рівняннями $y = 3x - 2$ та $y = -\frac{1}{3}x + 4$. Встановити їх взаємне розташування і знайти точку перетину.

Задача 4. Поперечний контур циліндричного елемента задано рівнянням $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Профіль механічної деталі задано еліпсом $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Профіль механічного елемента описується гіперболою $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічна напрямна механізму описується рівнянням $y^2 = 20x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 3

Задача 1. Центри двох технологічних отворів розташовані в точках $A(1; 4)$ і $B(7; 12)$. Знайти відстань між центрами та координати середини відрізка AB .

Задача 2. Прямолінійна ділянка траєкторії точки механізму проходить через точки $A(2; -1)$ і $B(8; 5)$. Скласти рівняння цієї прямої.

Задача 3. Осі двох елементів задано рівняннями $y = -2x + 3$ та $y = \frac{1}{2}x - 1$. Визначити їх взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір у пластині описується рівнянням $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль деталі задано рівнянням $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму задана параболою $x^2 = 24y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 4

Задача 1. Центри двох шарнірних з'єднань мають координати $A(-; 12)$ і $B(7; 8)$. Визначити відстань між ними та координати середини відрізка.

Задача 2. Вісь стрижневого елемента проходить через точки $A(-; 13)$ і $B(5; 9)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі двох напрямних описуються рівняннями $y = 4x + 2$ та $y = -\frac{1}{4}x + 6$. Встановити їх взаємне розташування та знайти точку перетину.

Задача 4. Контур круглого отвору задано рівнянням $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний контур механічного елемента задано рівнянням $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Профіль механічної напрямної описується параболою $y^2 = 28x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 5

Задача 1. Центри двох отворів у корпусній деталі мають координати $A(3; 1)$ і $B(9; 9)$. Визначити відстань між ними та координати середини.

Задача 2. Вісь деталі проходить через точки $A(3; 1)$ і $B(7; 9)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Осі елементів задано рівняннями $y = \frac{1}{2}x + 3$ та $y = -2x + 8$. Встановити взаємне розташування і знайти точку перетину.

Задача 4. Круглий контур деталі задано рівнянням $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 64$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Профіль деталі описується еліпсом $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується параболою $x^2 = 32y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 6

Задача 1. Центри двох підшипникових опор на розрахунковій схемі мають координати $A(2; -1)$ і $B(10; 5)$. Визначити відстань між опорами та координати середини відрізка AB .

Задача 2. Вісь вала на площині проходить через точки $A(1; -1)$ і $B(5; 7)$. Скласти рівняння осі в загальному вигляді.

Задача 3. Дві напрямні задано рівняннями $y = 2x - 3$ та $y = -\frac{1}{2}x + 7$. Визначити їх взаємне розташування та координати точки перетину.

Задача 4. Поперечний переріз вала описується рівнянням $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 81$. Визначити центр, радіус та діаметр вала.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль механічної поверхні описується рівнянням $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1$. Визначити вершини, фокуси та рівняння асимптот.

Задача 7. Параболічна траєкторія задана рівнянням $y^2 = 36x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 7

Задача 1. Центри двох отворів фланця розташовані в точках $A(-; 32)$ і $B(5; 8)$. Визначити відстань між центрами та координати середини.

Задача 2. Вісь напрямної проходить через точки $A(-; 32)$ і $B(3; 8)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Осі двох елементів описуються рівняннями $y = -3x + 2$ та $y = \frac{1}{3}x + 6$. Визначити їх взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Контур круглого елемента задано рівнянням $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{72} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Профіль механічної деталі задано гіперболою $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{44} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль задано рівнянням $x^2 = 40y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 8

Задача 1. Центри двох шарнірів плоского механізму мають координати $A(1; -3)$ і $B(7; 5)$. Визначити відстань між шарнірами та координати середини.

Задача 2. Вісь ланки проходить через точки $A(2; 5)$ та $B(8; -1)$. Скласти її рівняння.

Задача 3. Напрямні механізму задано рівняннями $y = x + 4$ та $y = -x + 8$. Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір описується рівнянням $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 100$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Профіль деталі задано еліпсом $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{23} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується рівнянням $y^2 = 44x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 9

Задача 1. Центри двох кріпильних отворів мають координати $A(-; 4 - 1)$ і $B(4; 5)$. Знайти відстань між центрами та координати середини.

Задача 2. Вісь механічного елемента проходить через точки $A(-; 41)$ і $B(2; 7)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Дві осі задано рівняннями $y = 4x - 3$ та $y = -\frac{1}{4}x + 2$. Встановити їх взаємне розташування і знайти точку перетину.

Задача 4. Поперечний контур деталі описується рівнянням $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Профіль прямої описується параболою $x^2 = 48y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 10

Задача 1. Центри двох підшипників на розрахунковій схемі мають координати $A(0; 2)$ і $B(6; 10)$. Визначити міжосьову відстань та координати середини відрізка.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(0; 2)$ та $B(6; 8)$. Скласти її рівняння.

Задача 3. Осі двох елементів задано рівняннями $y = \frac{1}{3}x + 1$ і $y = -3x + 5$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір описується рівнянням $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 49$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{160} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний контур задано рівнянням $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{27} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Параболічна траєкторія задана рівнянням $y^2 = 52x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 11

Задача 1. Центри двох опор важільного механізму мають координати $A(2; 5)$ і $B(10; 11)$. Визначити відстань між опорами та координати середини.

Задача 2. Вісь важеля проходить через точки $A(2; 5)$ та $B(10; 9)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Дві напрямні описуються рівняннями $y = 5x - 2$ і $y = -\frac{1}{5}x + 6$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Контур отвору задано рівнянням $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 64$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{60} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Профіль механічної напрямної задано рівнянням $x^2 = 56y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 12

Задача 1. Центри двох отворів у монтажній пластині мають координати $A(-; 50)$ і $B(3; 6)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь ребра деталі проходить через точки $A(-; 50)$ і $B(3; 4)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Напрявні задано рівняннями $y = -4x + 7$ та $y = \frac{1}{4}x - 1$. Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Задача 4. Круглий контур задано рівнянням $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 81$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія контрольної точки описується параболою $y^2 = 60x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 13

Задача 1. Центри двох шарнірів мають координати $A(3; -2)$ і $B(9; 6)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь ланки механізму проходить через точки $A(3; -2)$ та $B(9; 4)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі задано рівняннями $y = 2x + 5$ і $y = -\frac{1}{2}x - 1$. Визначити їх взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Поперечний переріз втулки описується рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 100$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{33} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль задано рівнянням $x^2 = 64y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 14

Задача 1. Центри двох підшипникових гнізд мають координати $A(-; 2 - 3)$ і $B(6; 3)$. Визначити міжосьову відстань та середину відрізка.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(-; 2 - 3)$ і $B(6; 5)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Напрявні задано рівняннями $y = -2x + 6$ та $y = \frac{1}{2}x + 1$. Визначити їх взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір задано рівнянням $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 121$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{260} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{289} - \frac{y^2}{72} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується рівнянням $y^2 = 68x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 15

Задача 1. Центри двох отворів у важелі мають координати $A(4; 1)$ і $B(12; 7)$. Визначити відстань між ними та координати середини.

Задача 2. Вісь важеля проходить через точки $A(4; 1)$ та $B(12; 5)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Дві осі задано рівняннями $y = 3x + 4$ та $y = -\frac{1}{3}x + 8$. Визначити їх взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Круглий контур деталі задано рівнянням $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 144$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{361} + \frac{y^2}{280} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{76} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль механічного елемента описується рівнянням $x^2 = 72y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 16

Задача 1. Центри двох технологічних отворів мають координати $A(-; 62)$ і $B(2; 8)$. Визначити відстань між ними та координати середини.

Задача 2. Вісь напрямної проходить через точки $A(-; 62)$ і $B(2; 6)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Осі механічних елементів задано рівняннями $y = 4x - 5$ і $y = -\frac{1}{4}x + 3$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Контур круглого отвору описується рівнянням $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 169$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{361} - \frac{y^2}{39} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму задана параболою $y^2 = 76x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 17

Задача 1. Центри двох шарнірів мають координати $A(5; -4)$ і $B(11; 4)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь ланки проходить через точки $A(5; -4)$ і $B(11; 2)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Напрямні задано рівняннями $y = -5x + 3$ та $y = \frac{1}{5}x + 7$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Поперечний переріз циліндричної деталі задано рівнянням $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 196$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{377} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{41} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічна напрямна описується рівнянням $x^2 = 80y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 18

Задача 1. Центри двох опор механізму мають координати $A(-; 44)$ і $B(4; 10)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь стрижня проходить через точки $A(-; 44)$ та $B(4; 8)$. Скласти її рівняння.

Задача 3. Дві осі задано рівняннями $y = x - 2$ та $y = -x + 10$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір описується рівнянням $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 225$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{484} + \frac{y^2}{420} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{441} - \frac{y^2}{43} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія контрольної точки задана параболою $y^2 = 84x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 19

Задача 1. Центри двох отворів корпусної деталі мають координати $A(6; 0)$ і $B(14; 6)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь механічного елемента проходить через точки $A(6; 0)$ та $B(14; 4)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Напрявні описуються рівняннями $y = 2x - 7$ і $y = -\frac{1}{2}x + 8$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Контур отвору задано рівнянням $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 256$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{529} + \frac{y^2}{480} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{484} - \frac{y^2}{45} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль описується рівнянням $x^2 = 88y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 20

Задача 1. Центри двох підшипникових опор мають координати $A(-; 71)$ і $B(1; 7)$. Визначити міжосьову відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(-; 71)$ та $B(1; 5)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі двох деталей описуються рівняннями $y = -3x + 9$ та $y = \frac{1}{3}x + 1$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Поперечний контур деталі описується рівнянням $(x - 9)^2 + (y + 2)^2 = 289$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{512} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{529} - \frac{y^2}{47} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується параболою $y^2 = 92x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 21

Задача 1. Центри двох кріпильних отворів мають координати $A(7; -2)$ і $B(13; 6)$. Визначити відстань між ними та координати середини.

Задача 2. Вісь ребра жорсткості проходить через точки $A(7; -2)$ і $B(13; 4)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Напрявні механізму задано рівняннями $y = 4x + 1$ та $y = -\frac{1}{4}x + 5$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Круглий контур задано рівнянням $(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 324$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{561} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$. Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Задача 7. Параболічна напрямна задана рівнянням $x^2 = 96y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 22

Задача 1. Центри двох шарнірів механізму мають координати $A(-; 83)$ і $B(0; 9)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь ланки проходить через точки $A(-; 83)$ та $B(0; 7)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Дві осі задано рівняннями $y = -2x + 10$ та $y = \frac{1}{2}x$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Контур круглого отвору задано рівнянням $(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 361$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{612} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{51} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується рівнянням $y^2 = 100x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 23

Задача 1. Центри двох підшипникових гнізд мають координати $A(8; 2)$ і $B(16; 8)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(8; 2)$ і $B(16; 6)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі механічних елементів задано рівняннями $y = 5x - 4$ та $y = -\frac{1}{5}x + 8$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий переріз деталі описується рівнянням $(x + 9)^2 + (y + 3)^2 = 400$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{729} + \frac{y^2}{665} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{676} - \frac{y^2}{53} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль задано рівнянням $x^2 = 104y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 24

Задача 1. Центри двох опор механічної конструкції мають координати $A(-; 9 - 1)$ і $B(-; 15)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь стрижня проходить через точки $A(-; 9 - 1)$ і $B(-; 13)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Напрявні задано рівняннями $y = -4x + 6$ та $y = \frac{1}{4}x + 2$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Контур отвору описується рівнянням $(x - 11)^2 + (y + 4)^2 = 441$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{720} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{729} - \frac{y^2}{55} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія контрольної точки задана параболою $y^2 = 108x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 25

Задача 1. Центри двох отворів механічної деталі мають координати $A(9; 3)$ і $B(15; 11)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь напрямної проходить через точки $A(9; 3)$ та $B(15; 9)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Осі двох елементів задано рівняннями $y = 2x + 6$ та $y = -\frac{1}{2}x + 11$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий контур задано рівнянням $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 484$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{777} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{784} - \frac{y^2}{57} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічна напрямна описується рівнянням $x^2 = 112y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 26

Задача 1. Центри двох шарнірів мають координати $A(-; 102)$ і $B(-; 28)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь механічної ланки проходить через точки $A(-; 102)$ та $B(-; 26)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Дві напрямні описуються рівняннями $y = -3x + 12$ та $y = \frac{1}{3}x + 4$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Поперечний контур циліндричного елемента задано рівнянням $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 529$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{836} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{841} - \frac{y^2}{59} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму задана параболою $y^2 = 116x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 27

Задача 1. Центри двох підшипникових опор мають координати $A(10; -3)$ і $B(16; 5)$. Визначити міжосьову відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(10; -3)$ та $B(16; 3)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі деталей задано рівняннями $y = 4x - 7$ та $y = -\frac{1}{4}x + 10$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір задано рівнянням $(x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 576$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{961} + \frac{y^2}{897} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{61} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічний профіль задано рівнянням $x^2 = 120y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 28

Задача 1. Центри двох отворів монтажної пластини мають координати $A(-; 114)$ і $B(-; 310)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь ребра механічної деталі проходить через точки $A(-; 114)$ і $B(-; 38)$. Скласти рівняння прямої.

Задача 3. Напрявні задано рівняннями $y = -5x + 11$ та $y = \frac{1}{5}x + 3$. Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Задача 4. Контур круглого елемента задано рівнянням $(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 625$. Визначити центр, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль описується рівнянням $\frac{x^2}{1024} + \frac{y^2}{960} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{961} - \frac{y^2}{63} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Траєкторія точки механізму описується параболою $y^2 = 124x$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 29

Задача 1. Центри двох шарнірних з'єднань мають координати $A(11; 1)$ і $B(19; 7)$. Визначити відстань та координати середини.

Задача 2. Вісь механічної ланки проходить через точки $A(11; 1)$ і $B(19; 5)$. Скласти рівняння осі.

Задача 3. Осі двох механічних елементів описуються рівняннями $y = x + 5$ та $y = -x + 13$. Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Задача 4. Круглий отвір задано рівнянням $(x + 12)^2 + (y - 7)^2 = 676$. Визначити центр, радіус і діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{1089} + \frac{y^2}{1025} = 1$. Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль задано рівнянням $\frac{x^2}{1024} - \frac{y^2}{65} = 1$. Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Задача 7. Параболічна напрямна описується рівнянням $x^2 = 128y$. Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 30

Задача 1. Центри двох підшипникових гнізд механічного вузла мають координати $A(-; 12 - 2)$ і $B(-; 44)$. Визначити міжосьову відстань та координати середини відрізка.

Задача 2. Вісь вала проходить через точки $A(-; 12 - 2)$ та $B(-; 42)$. Скласти рівняння осі у загальному вигляді.

Задача 3. Дві напрямні механізму задано рівняннями $y = -2x + 14$ та $y = \frac{1}{2}x + 4$. Визначити їх взаємне розташування та знайти координати точки перетину.

Задача 4. Поперечний контур циліндричної деталі описується рівнянням $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 729$. Визначити координати центра, радіус та діаметр.

Задача 5. Еліптичний профіль механічного елемента описується рівнянням $\frac{x^2}{1156} + \frac{y^2}{1092} = 1$. Визначити півосі, вершини, координати фокусів та ексцентриситет.

Задача 6. Гіперболічний профіль механічного елемента описується рівнянням $\frac{x^2}{1089} - \frac{y^2}{67} = 1$. Визначити вершини, координати фокусів та скласти рівняння асимптот.

Задача 7. Траєкторія контрольної точки механізму описується параболою $y^2 = 132x$. Визначити параметр параболи, координати фокуса, рівняння директриси та напрям віток.

Вимоги до оформлення кожного варіанта

У кожній із семи задач здобувач освіти повинен:

1. записати повну умову задачі;
2. виконати схематичне креслення, якщо воно необхідне для пояснення геометричної моделі;
3. записати формули, які використовуються для розв'язування;
4. підставити числові дані;
5. послідовно виконати обчислення;
6. виконати перевірку там, де вона можлива;
7. записати повну відповідь;
8. коротко пояснити геометричний або професійний зміст отриманого результату для об'єкта прикладної механіки.

Критерії оцінювання

Індивідуальне домашнє завдання оцінюється максимально у **2 бали**.

2 бали — усі сім задач виконані правильно і повністю; математичні моделі вибрано обґрунтовано; формули записано правильно; обчислення виконано послідовно; наведено відповіді, необхідні перевірки та професійні висновки.

1,5 бала — усі або майже всі задачі виконані, методи розв'язування обрані правильно, але допущено окремі обчислювальні або оформлювальні помилки.

1 бал — правильно виконана значна частина завдань, але є суттєві помилки в застосуванні окремих формул, побудові математичних моделей або відсутні частина перевірок і професійних висновків.

0,5 бала — виконано лише окремі задачі, але здобувач освіти демонструє часткове розуміння методів аналітичної геометрії.

0 балів — завдання не виконано або виконання не демонструє засвоєння матеріалу.

Практичне заняття № 11

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 2

Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія

Тема: Рішення завдань за модулем 2

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Час: 2 години

Максимальна кількість балів: 4 бали

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань та практичних умінь, сформованих під час вивчення змістового модуля 2 «Аналітична геометрія»; визначити рівень сформованості вмінь застосовувати метод координат, складати рівняння прямої на площині, знаходити точку перетину прямих, визначати кут між прямими, встановлювати умови їх паралельності та перпендикулярності, досліджувати рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.

Перевірити здатність застосовувати методи аналітичної геометрії під час розв'язування професійно орієнтованих задач спеціальності G9 «Прикладна механіка», пов'язаних із геометричними моделями деталей і механічних елементів, розташуванням осей та напрямних, координатами центрів отворів, геометричними профілями, траєкторіями точок механізмів.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя, координатна площина.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання завдань.
4. Отримання індивідуальних варіантів.

5. Самостійне виконання завдань.
6. Перевірка правильності математичних розрахунків і графічних побудов.
7. Оцінювання результатів.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків змістового модуля 2.

Зміст модульного контролю

Кожний варіант містить **шість завдань**:

1. метод координат та рівняння прямої;
2. взаємне розташування двох прямих;
3. коло;
4. еліпс;
5. гіпербола;
6. комплексне професійно орієнтоване завдання з аналітичної геометрії для спеціальності G9 «Прикладна механіка», у якому застосовуються властивості параболи або інші геометричні моделі механічних елементів.

Такий зміст відповідає темам другого модуля робочої програми. Коло, еліпс, гіпербола та парабола як основні криві другого порядку також представлені у рекомендованій математичній літературі.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Метод координат і пряма.

На кресленні механічної деталі центри двох технологічних отворів задано точками $A(2; 3)$ і $B(8; 11)$. Визначити відстань між центрами отворів, координати середини відрізка AB та скласти рівняння прямої, яка проходить через центри цих отворів.

Завдання 2. Взаємне розташування прямих.

Осі двох напрямних механізму задано рівняннями

$$y = 2x + 1, y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Встановити їх взаємне розташування та знайти координати точки перетину.

Завдання 3. Коло.

Контур круглого отвору деталі описується рівнянням

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Визначити координати центра отвору, його радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс.

Геометрична модель еліптичного профілю деталі задана рівнянням

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі, координати вершин і фокусів та ексцентриситет еліпса.

Завдання 5. Гіпербола.

Розрахунковий профіль механічного елемента задано рівнянням

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та записати рівняння асимптот.

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Траєкторія точки робочого органа механізму в розрахунковій координатній системі описується параболою

$$y^2 = 16x.$$

Записати рівняння у вигляді $y^2 = 2px$, визначити параметр p , координати фокуса, рівняння директриси та напрям віток параболи. Виконати схематичну побудову траєкторії.

Варіант 2

Завдання 1. Центри двох отворів механічної пластини задано точками $A(-; 21)$ та $B(4; 9)$. Визначити відстань між ними, координати середини відрізка та рівняння прямої AB .

Завдання 2. Осі напрямних задано рівняннями

$$y = 3x - 2, y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

Встановити їх взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Круглий конструктивний елемент має контур

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліптичний профіль задано рівнянням

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Геометрична модель профілю задана гіперболою

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Знайти півосі, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки виконавчої ланки описується параболою

$$y^2 = 20x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та побудувати ескіз траєкторії.

Варіант 3

Завдання 1. Центри двох технологічних отворів задані точками **A(1; 4)** та **B(7; 12)**. Знайти відстань між центрами, середину відрізка та рівняння осі, що проходить через них.

Завдання 2. Напрямні задані рівняннями

$$y = -2x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Завдання 3. Контур отвору:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

визначити основні параметри, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму описується параболою

$$x^2 = 24y.$$

Визначити параметр, координати фокуса, директрису, напрям віток та виконати схематичну побудову.

Варіант 4

Завдання 1. На кресленні деталі задані центри отворів $A(-; 12)$, $B(7; 8)$. Визначити відстань, координати середини та рівняння прямої через центри.

Завдання 2. Осі двох напрямних:

$$y = 4x + 2, y = -\frac{1}{4}x + 6.$$

Встановити взаємне розташування та визначити точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого елемента:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49.$$

Знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки ланки задана параболою

$$y^2 = 28x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток. Побудувати ескіз.

Варіант 5

Завдання 1. Центри двох отворів фланцевої деталі мають координати $A(3; 1)$, $B(9; 9)$. Визначити відстань, середину відрізка та рівняння прямої AB .

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = \frac{1}{2}x + 3, y = -2x + 8.$$

Встановити їх взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Круглий отвір описаний рівнянням
$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 64.$$

Знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліптичний профіль:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіперболічна геометрична модель:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму задана рівнянням

$$x^2 = 32y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та виконати схематичну побудову.

Варіант 6

Завдання 1. Центри отворів деталі задані точками $A(2; -1)$, $B(10; 5)$.
Визначити відстань між ними, середину відрізка та рівняння прямої через центри.

Завдання 2. Напрямні механізму:

$$y = 2x - 3, y = -\frac{1}{2}x + 7.$$

Визначити їх взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого посадкового отвору:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 81.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{19} = 1$$

визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Розрахункова траєкторія точки механічної ланки:

$$y^2 = 36x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та побудувати ескіз.

Варіант 7

Завдання 1. На кресленні механічної деталі задано точки $A(-; 32)$, $B(5; 8)$. Знайти відстань, середину відрізка і рівняння прямої AB .

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -3x + 2, y = \frac{1}{3}x + 6.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Контур отвору:

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для

$$\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{72} = 1$$

визначити параметри еліпса, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{44} = 1$$

визначити параметри гіперболи, вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$x^2 = 40y.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток. Виконати ескіз.

Варіант 8

Завдання 1. Центри двох конструктивних отворів задані точками $A(1; -3)$, $B(7; 5)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = x + 4, y = -x + 8.$$

Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Завдання 3. Круглий елемент:

$$(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 100.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$$

знайти півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{23} = 1$$

знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія робочої точки механізму:

$$y^2 = 44x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток і побудувати ескіз.

Варіант 9

Завдання 1. Центри отворів механічної пластини задані точками $A(-; 4 - 1)$, $B(4; 5)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої через ці точки.

Завдання 2. Осі двох елементів:

$$y = 4x - 3, y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

Визначити їх взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого отвору:

$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 36.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліптичний профіль:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіперболічний профіль:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$x^2 = 48y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та побудувати ескіз.

Варіант 10

Завдання 1. Центри конструктивних елементів мають координати $A(0; 2)$, $B(6; 10)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = \frac{1}{3}x + 1, y = -3x + 5.$$

Встановити взаємне розташування та визначити точку перетину.

Завдання 3. Круглий профіль:

$$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 49.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Дослідити еліпс

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{160} = 1.$$

Завдання 5. Дослідити гіперболу

$$\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{27} = 1.$$

Для завдань 4 і 5 визначити півосі, вершини, фокуси, ексцентриситет еліпса та асимптоти гіперболи.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки ланки:

$$y^2 = 52x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та виконати схематичну побудову.

Варіант 11

Завдання 1. На кресленні деталі центри отворів мають координати $A(2; 5)$, $B(10; 11)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої AB .

Завдання 2. Напрямні задано рівняннями

$$y = 5x - 2, y = -\frac{1}{5}x + 6.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Для кола

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 64$$

знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Для еліпса

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$$

визначити півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Для гіперболи

$$\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{60} = 1$$

знайти вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки виконавчого механізму:

$$x^2 = 56y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток. Побудувати ескіз.

Варіант 12

Завдання 1. Центри двох отворів деталі: $A(-; 50)$, $B(3; 6)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі:

$$y = -4x + 7, y = \frac{1}{4}x - 1.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Контур:

$$(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 81.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Розрахункова траєкторія:

$$y^2 = 60x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток та побудувати ескіз.

Варіант 13

Завдання 1. Центри елементів механічної деталі задано точками $A(3; -2)$, $B(9; 6)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = 2x + 5, y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 100.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1.$$

Визначити основні параметри.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{33} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$x^2 = 64y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 14

Завдання 1. На кресленні деталі задані точки $A(-; 2 - 3)$, $B(6; 3)$. Знайти відстань між ними, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -2x + 6, y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Встановити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 121.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{260} = 1.$$

Знайти півосі, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{289} - \frac{y^2}{72} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки:

$$y^2 = 68x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 15

Завдання 1. Центри двох технологічних отворів: $A(4; 1)$, $B(12; 7)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = 3x + 4, y = -\frac{1}{3}x + 8.$$

Встановити взаємне розташування і знайти точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого елемента:

$$(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 144.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{361} + \frac{y^2}{280} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{76} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки робочої ланки:

$$x^2 = 72y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису, напрям віток і виконати ескіз.

Варіант 16

Завдання 1. Центри отворів задані точками $A(-; 62)$, $B(2; 8)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої через ці точки.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = 4x - 5, y = -\frac{1}{4}x + 3.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 169.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{336} = 1.$$

Визначити основні параметри, вершини, фокуси й ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{361} - \frac{y^2}{39} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механічного пристрою:

$$y^2 = 76x.$$

Знайти параметр, фокус, директрису і напрям віток.

Варіант 17

Завдання 1. Центри конструктивних елементів мають координати $A(5; -4)$, $B(11; 4)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = -5x + 3, y = \frac{1}{5}x + 7.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 196.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{377} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{41} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія робочої точки:

$$x^2 = 80y.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 18

Завдання 1. На координатному кресленні механічної деталі задано точки $A(-; 44)$, $B(4; 10)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі двох напрямних:

$$y = x - 2, y = -x + 10.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Круглий профіль:

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 225.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{484} + \frac{y^2}{420} = 1.$$

Визначити основні параметри.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{441} - \frac{y^2}{43} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$y^2 = 84x.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 19

Завдання 1. Центри двох отворів деталі задані точками $A(6; 0)$, $B(14; 6)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрямні:

$$y = 2x - 7, y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 256.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{529} + \frac{y^2}{480} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{484} - \frac{y^2}{45} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Розрахункова траєкторія точки механізму:

$$x^2 = 88y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 20

Завдання 1. На кресленні механічної деталі задано центри $A(-; 71)$, $B(1; 7)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -3x + 9, y = \frac{1}{3}x + 1.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Контур:

$$(x - 9)^2 + (y + 2)^2 = 289.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{512} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{529} - \frac{y^2}{47} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки:

$$y^2 = 92x.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 21

Завдання 1. Центри конструктивних отворів задані точками $A(7; -2)$, $B(13; 6)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = 4x + 1, y = -\frac{1}{4}x + 5.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 324.$$

Знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{561} = 1.$$

Визначити основні параметри, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія робочої точки механізму:

$$x^2 = 96y.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 22

Завдання 1. Центри отворів механічної пластини задані точками $A(-; 83)$, $B(0; 9)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -2x + 10, y = \frac{1}{2}x.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x - 10)^2 + (y - 3)^2 = 361.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{612} = 1.$$

Знайти півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{51} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки виконавчої ланки:

$$y^2 = 100x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 23

Завдання 1. На кресленні деталі задано точки $A(8; 2)$, $B(16; 8)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = 5x - 4, y = -\frac{1}{5}x + 8.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого елемента:

$$(x + 9)^2 + (y + 3)^2 = 400.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{729} + \frac{y^2}{665} = 1.$$

Визначити основні параметри.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{676} - \frac{y^2}{53} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси й асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механічного пристрою:

$$x^2 = 104y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 24

Завдання 1. Центри конструктивних отворів задані точками $A(-; 9 - 1)$, $B(-; 15)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -4x + 6, y = \frac{1}{4}x + 2.$$

Визначити взаємне розташування і точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x - 11)^2 + (y + 4)^2 = 441.$$

Знайти центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{720} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{729} - \frac{y^2}{55} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$y^2 = 108x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 25

Завдання 1. Центри двох отворів деталі мають координати $A(9; 3)$, $B(15; 11)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрямні:

$$y = 2x + 6, y = -\frac{1}{2}x + 11.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 484.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{777} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{784} - \frac{y^2}{57} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки механічної ланки:

$$x^2 = 112y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 26

Завдання 1. Центри технологічних отворів задані точками $A(-; 102)$, $B(-; 28)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -3x + 12, y = \frac{1}{3}x + 4.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Круглий профіль:

$$(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 529.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{836} = 1.$$

Визначити основні параметри, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{841} - \frac{y^2}{59} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія робочої точки механізму:

$$y^2 = 116x.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 27

Завдання 1. На кресленні деталі задано центри $A(10; -3)$, $B(16; 5)$. Знайти відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Напрявні:

$$y = 4x - 7, y = -\frac{1}{4}x + 10.$$

Визначити взаємне розташування та точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x + 11)^2 + (y + 5)^2 = 576.$$

Знайти центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{961} + \frac{y^2}{897} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{61} = 1.$$

Знайти вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки механізму:

$$x^2 = 120y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 28

Завдання 1. Центри конструктивних елементів задані точками $A(-; 114)$, $B(-; 310)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = -5x + 11, y = \frac{1}{5}x + 3.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Коло:

$$(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 625.$$

Визначити центр, радіус і діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{1024} + \frac{y^2}{960} = 1.$$

Знайти півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{961} - \frac{y^2}{63} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія точки виконавчого механізму:

$$y^2 = 124x.$$

Знайти параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 29

Завдання 1. Центри двох отворів механічної деталі задані точками $A(11; 1)$, $B(19; 7)$. Визначити відстань, середину та рівняння прямої.

Завдання 2. Осі напрямних:

$$y = x + 5, y = -x + 13.$$

Встановити взаємне розташування та знайти точку перетину.

Завдання 3. Контур круглого елемента:

$$(x + 12)^2 + (y - 7)^2 = 676.$$

Визначити центр, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс:

$$\frac{x^2}{1089} + \frac{y^2}{1025} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола:

$$\frac{x^2}{1024} - \frac{y^2}{65} = 1.$$

Визначити вершини, фокуси та асимптоти.

Завдання 6. Траєкторія контрольної точки ланки:

$$x^2 = 128y.$$

Визначити параметр, фокус, директрису та напрям віток.

Варіант 30

Завдання 1. Метод координат і пряма.

На кресленні механічної деталі центри двох технологічних отворів задано точками $A(-; 12 - 2)$ і $B(-; 44)$. Визначити відстань між центрами, координати середини відрізка AB та скласти рівняння прямої, яка проходить через ці центри.

Завдання 2. Взаємне розташування прямих.

Осі двох напрямних механізму задано рівняннями

$$y = -2x + 14, y = \frac{1}{2}x + 4.$$

Встановити взаємне розташування прямих та знайти координати точки їх перетину.

Завдання 3. Коло.

Контур круглого конструктивного елемента задано рівнянням

$$(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 729.$$

Визначити координати центра, радіус та діаметр.

Завдання 4. Еліпс.

Геометрична модель еліптичного профілю задана рівнянням

$$\frac{x^2}{1156} + \frac{y^2}{1092} = 1.$$

Визначити півосі, координати вершин, фокусів та ексцентриситет.

Завдання 5. Гіпербола.

Розрахунковий профіль механічного елемента задано рівнянням

$$\frac{x^2}{1089} - \frac{y^2}{67} = 1.$$

Визначити півосі, вершини, фокуси та скласти рівняння асимптот.

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

У розрахунковій моделі механізму траєкторія контрольної точки робочої ланки описується параболою

$$y^2 = 132x.$$

Подати рівняння у вигляді $y^2 = 2px$, визначити параметр p , координати фокуса, рівняння директриси та напрям віток параболи. Виконати схематичну побудову траєкторії в декартовій системі координат.

Вимоги до виконання модульного контролю

У кожному завданні здобувач освіти повинен записати вихідні дані, зазначити необхідні формули, виконати підстановку числових значень, провести послідовні математичні обчислення та записати повну відповідь.

У завданнях із кривими другого порядку необхідно визначати геометричні характеристики, передбачені умовою, а під час роботи з параболою та гіперболою виконувати схематичну побудову, якщо це вимагається завданням.

У професійно орієнтованих завданнях необхідно не лише отримати математичний результат, але й коротко пояснити його геометричний зміст стосовно відповідного елемента або руху механічної системи.

Критерії оцінювання модульного контролю № 2

Максимальна кількість балів — 4 бали.

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Метод координат. Рівняння прямої	0,50
2	Взаємне розташування прямих	0,50
3	Коло	0,50
4	Еліпс	0,75
5	Гіпербола	0,75
6	Професійно орієнтована задача. Парабола та її застосування у прикладній механіці	1,00
Разом		4,00

Повний бал за відповідне завдання виставляється, якщо правильно обрано математичний метод, записано необхідні формули, правильно виконано перетворення та обчислення, отримано правильну відповідь.

У професійно орієнтованому завданні додатково враховується правильність визначення геометричних характеристик заданої траєкторії та здатність пояснити отриманий математичний результат у контексті прикладної механіки.

Типові помилки

Під час виконання модульного контролю необхідно звернути увагу на типові помилки: неправильне використання формули відстані між двома точками; помилки під час визначення координат середини відрізка; неправильне складання рівняння прямої через дві точки; плутання умов паралельності та перпендикулярності прямих; неправильне визначення центра і радіуса кола; плутання великої та малої півосей еліпса; використання неправильної залежності між a , b і c для еліпса та гіперболи; неправильне визначення асимптот гіперболи; змішування різних форм запису канонічного рівняння параболи.

У цьому курсі для параболи використовується форма

$$y^2 = 2px$$

або

$$x^2 = 2py,$$

тому фокус розташовується на відстані $\frac{p}{2}$ від вершини, а директриса — на такій самій відстані з протилежного боку. Саме ціє форми необхідно послідовно дотримуватися під час виконання всіх 30 варіантів.

Підведення підсумків

Після виконання модульного контролю здобувач освіти повинен уміти використовувати координатний метод для дослідження геометричних об'єктів, складати та аналізувати рівняння прямих, розпізнавати криві другого порядку за їх рівняннями, визначати їх основні геометричні характеристики та застосовувати елементи аналітичної геометрії до найпростіших геометричних моделей, пов'язаних із професійною діяльністю у сфері прикладної механіки.

Професійна спрямованість цього модульного контролю побудована навколо геометрії механічних деталей, розташування отворів та осей, напрямних механізмів, геометричних профілів і розрахункових траєкторій точок механізмів. При цьому математичний зміст не виходить за межі тем, установлених робочою програмою для змістового модуля 2.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 409 сторінок.
3. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка»*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. Це джерело безпосередньо призначене для спеціальності G9 «Прикладна механіка».
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клєсова. *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки. У посібнику наведено завдання на коло, еліпс, гіперболу та параболу, що відповідають математичному змісту цього модульного контролю.
5. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. *Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики : навчальний посібник*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Практичне заняття № 12

Тема: Обчислення границь функцій

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Границя функції та її обчислення»; сформулювати практичні вміння знаходити границі функцій різних типів; навчитися визначати спосіб обчислення границі, застосовувати безпосередню підстановку, основні властивості границь, виконувати математичні перетворення для усунення невизначеностей, застосовувати першу та другу важливі границі; розвивати навички послідовного математичного запису та перевірки логічності отриманого результату.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 12 входить до змістового модуля 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної» і має тему «Обчислення границь функцій». Для індивідуального завдання передбачено обчислення границь функцій різних типів із визначенням способу обчислення, використанням безпосередньої підстановки, усуненням невизначеностей математичними перетвореннями, застосуванням властивостей границь та перевіркою отриманого результату.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Що називається границею функції?
2. Що означає запис $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$?
3. Що називається границею функції в точці?
4. Що називається границею функції на нескінченності?
5. Які основні властивості границь ви знаєте?
6. Чому дорівнює границя сталої величини?
7. Як знаходиться границя суми двох функцій?
8. Як знаходиться границя різниці двох функцій?
9. Як знаходиться границя добутку двох функцій?

10. Як знаходиться границя частки двох функцій?
11. За якої умови можна застосувати правило знаходження границі частки?
12. У яких випадках границю можна знайти безпосередньою підстановкою?
13. Що називається невизначеністю?
14. Які основні види невизначеностей ви знаєте?
15. Що означає невизначеність виду $\frac{0}{0}$?
16. Що означає невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$?
17. Які математичні перетворення можна застосовувати для усунення невизначеності $\frac{0}{0}$?
18. Як застосовується розкладання многочлена на множники під час обчислення границь?
19. Для чого під час обчислення границь використовують спряжений вираз?
20. Як обчислюють границі раціональних функцій при $x \rightarrow \infty$?
21. Яке значення має степінь чисельника і знаменника під час обчислення границі раціональної функції на нескінченності?
22. Сформулюйте першу важливу границю.
23. За якої умови застосовується перша важлива границя?
24. Сформулюйте другу важливу границю.
25. Яке число позначають літерою e ?
26. Чому перед початком перетворень доцільно виконати безпосередню підстановку?
27. Чи завжди отримання виразу $\frac{0}{0}$ означає, що границя дорівнює нулю?
28. Чи завжди отримання виразу $\frac{\infty}{\infty}$ означає, що границя дорівнює одиниці?
29. Як перевірити логічність отриманого значення границі?
30. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час обчислення границі?

Розв'язування прикладів

1. Обчислити границю безпосередньою підстановкою

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4).$$

Розв'язок

Спочатку визначимо, чи можна застосувати безпосередню підстановку.

Функція

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

є многочленом, тому в точці $x = 2$ її границю можна знайти безпосередньою підстановкою.

Підставимо $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4.$$

Виконаємо обчислення:

$$3 \cdot 4 - 10 + 4 = 12 - 10 + 4 = 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4x + 5).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 1).$$

2. Обчислити границю дробово-раціональної функції безпосередньою підстановкою

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}.$$

Розв'язок

Перевіримо знаменник у граничній точці:

$$2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Отже, безпосередня підстановка можлива.

Підставимо $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 - 1}{2 + 2}.$$

Обчислимо чисельник:

$$4 + 6 - 1 = 9.$$

Знаменник:

$$2 + 2 = 4.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{9}{4}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{9}{4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x + 2}{2x + 1}.$$

3. Обчислити границю, усунувши невизначеність виду $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Розв'язок

Спочатку виконаємо безпосередню підстановку:

$$\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Необхідно виконати математичні перетворення.

Розкладемо чисельник як різницю квадратів:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}.$$

Оскільки при знаходженні границі x прямує до 3, але не дорівнює 3, скорочуємо множник $x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3).$$

Тепер застосуємо безпосередню підстановку:

$$3 + 3 = 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

4. Обчислити границю шляхом розкладання квадратного тричлена на множники

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

Розв'язок

Виконаємо безпосередню підстановку:

$$\frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2 - 2} = \frac{4 - 10 + 6}{0} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Розкладемо чисельник на множники:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}.$$

Скорочуємо спільний множник:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-3).$$

Підставимо $x = 2$:

$$2 - 3 = -1.$$

Відповідь:

$$\boxed{-1}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}.$$

5. Обчислити границю з використанням спряженого виразу

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Розв'язок

Безпосередня підстановка дає:

$$\frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0}.$$

Отримали невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника:

$$\sqrt{x} + 2.$$

Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}.$$

У чисельнику використаємо формулу різниці квадратів:

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = x - 4.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}.$$

Скорочуємо $x - 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2}.$$

Тепер підставляємо $x = 4$:

$$\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}.$$

6. Обчислити границю раціональної функції при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x - 5}.$$

Розв'язок

При $x \rightarrow \infty$ чисельник і знаменник необмежено зростають. Маємо невизначеність виду:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Найвищий степінь змінної в чисельнику і знаменнику дорівнює 2.

Поділимо чисельник і знаменник на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}.$$

При $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Тому:

$$\frac{3 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 3.$$

Відповідь:

$$\boxed{3}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{4x^3 + 5x^2 - 3}.$$

7. Обчислити границю, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 1}.$$

Розв'язок

Маємо невизначеність виду:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Найвищий степінь знаменника дорівнює 2. Поділимо всі члени на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

При $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{2}{x} \rightarrow 0, \frac{5}{x^2} \rightarrow 0, \frac{3}{x} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Отже:

$$\frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{0}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 2}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{2x^3 + x}.$$

8. Обчислити границю, якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}.$$

Розв'язок

Поділимо чисельник і знаменник на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

При $x \rightarrow +\infty$:

$$x \rightarrow +\infty, \frac{2}{x} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Тому:

$$\frac{+\infty + 0}{1 + 0} = +\infty.$$

Відповідь:

$$\boxed{+\infty}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{x^2 + 4}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 1}{x^2 + 3x}.$$

Перша важлива границя

Перша важлива границя має вигляд:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}.$$

Під час її застосування аргумент тригонометричної функції повинен бути виражений у радіанах.

9. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Розв'язок

Для використання першої важливої границі необхідно отримати відношення:

$$\frac{\sin 5x}{5x}.$$

Помножимо та поділимо вираз на 5:

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}.$$

При $x \rightarrow 0$:

$$5x \rightarrow 0.$$

За першою важливою границею:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1.$$

Тому:

$$5 \cdot 1 = 5.$$

Відповідь:

$$\boxed{5}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}.$$

10. Обчислити границю за допомогою першої важливої границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}.$$

Розв'язок

Перетворимо вираз:

$$\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x}.$$

Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x}.$$

За першою важливою границею:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1,$$

а також:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1.$$

Отже:

$$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{2}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 2x}.$$

Друга важлива границя

Друга важлива границя записується у вигляді:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e},$$

де e — число Ейлера:

$$e \approx 2,71828.$$

11. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

Розв'язок

Необхідно привести вираз до другої важливої границі.

Запишемо:

$$\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3.$$

Позначимо:

$$t = \frac{x}{3}.$$

Якщо:

$$x \rightarrow \infty,$$

то:

$$t \rightarrow \infty.$$

Крім того:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{t}.$$

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right]^3.$$

За другою важливою границею:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Отже:

$$e^3.$$

Відповідь:

$$\boxed{e^3}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x.$$

12. Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x.$$

Розв'язок

Перетворимо основу степеня:

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Це друга важлива границя.

Тому:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x = e.$$

Відповідь:

$$\boxed{e}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^x.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчисліть границі безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 4);$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - x + 5);$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

2. Обчисліть границі, усунувши невизначеність виду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5};$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3};$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

3. Обчисліть границі з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9};$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2};$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}.$$

4. Обчисліть границі при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 1};$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{x^2 + 2};$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 5}.$$

5. Використовуючи першу важливу границю, обчисліть:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x};$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x};$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

6. Використовуючи другу важливу границю, обчисліть:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x;$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x ;$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x} .$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розуміти поняття границі функції;
- визначати можливість застосування безпосередньої підстановки;
- застосовувати основні властивості границь;
- розпізнавати невизначеність виду $\frac{0}{0}$;
- розпізнавати невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$;
- усувати невизначеність шляхом розкладання виразів на множники;
- скорочувати спільні множники після відповідних алгебраїчних перетворень;
- застосовувати спряжений вираз;
- обчислювати границі раціональних функцій на нескінченності;
- порівнювати степені чисельника та знаменника;
- застосовувати першу важливу границю;
- застосовувати другу важливу границю;
- правильно оформлювати послідовність математичних перетворень;
- перевіряти логічність отриманого результату.

Саме така послідовність роботи — вибір способу, безпосередня підстановка, усунення невизначеності, використання властивостей границь і перевірка результату — передбачена робочою програмою для практичного заняття 12.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття границі функції.

2. Границя функції в точці.
3. Границя функції на нескінченності.
4. Основні властивості границь.
5. Границя суми функцій.
6. Границя різниці функцій.
7. Границя добутку функцій.
8. Границя частки функцій.
9. Безпосередня підстановка під час знаходження границі.
10. Поняття невизначеності.
11. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$.
12. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.
13. Усунення невизначеності розкладанням на множники.
14. Застосування формул скороченого множення.
15. Застосування спряженого виразу.
16. Обчислення границь раціональних функцій на нескінченності.
17. Перша важлива границя.
18. Застосування першої важливої границі.
19. Друга важлива границя.
20. Застосування другої важливої границі.
21. Число e .
22. Послідовність обчислення границі функції.
23. Перевірка логічності отриманого результату.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 10 «Границя функції та її обчислення». Опрацювати основні властивості границь, способи усунення невизначеностей, першу та другу важливі границі.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті наведено **п'ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Відповідно до попередньо встановлених вимог завдання мають загальноматематичний характер і **не містять професійного спрямування**.

Варіант 1

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 5).$$

2. Обчислити границю. У разі виникнення невизначеності виконати необхідні алгебраїчні перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

3. Обчислити границю при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Варіант 2

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x + 4).$$

2. Обчислити границю, попередньо усунувши невизначеність:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{2x^2 + 3x - 1}.$$

4. Застосовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x}.$$

5. Застосовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

Варіант 3

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x + 2).$$

2. Обчислити границю шляхом розкладання чисельника на множники:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 + 5x + 1}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x.$$

Варіант 4

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 3}.$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 5x^2 - 4}.$$

4. Обчислити за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 2x}.$$

5. Обчислити за допомогою другої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x.$$

Варіант 5

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + x + 3).$$

2. Обчислити границю, використовуючи спряжений вираз:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 5}{8x^2 - x + 2}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x}\right)^x.$$

Варіант 6

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 3x - 1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2}{2x^2 - x + 3}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x.$$

Варіант 7

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 4x + 7).$$

2. Обчислити границю шляхом розкладання на множники:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + x^2 - 1}{3x^3 - 2x + 4}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{3x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{x}\right)^x.$$

Варіант 8

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x - 5).$$

2. Обчислити границю з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{6x^2 - 5x + 2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 2x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x.$$

Варіант 9

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 6).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 + x + 7}.$$

4. Обчислити за допомогою першої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x.$$

Варіант 10

1. Обчислити безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 - 3x + 1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 4}{3x^2 + 2x - 1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x}\right)^x.$$

Варіант 11

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - x - 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4}{3x^2 + 2x + 5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^x.$$

Варіант 12

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x^2 - 2x + 5).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x}{4x^3 - x^2 + 3}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x} \right)^x.$$

Варіант 13

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6x^2 - 4x + 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x}{2x^2 - 3x + 1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{5x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{11}{x}\right)^x.$$

Варіант 14

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - x^2 + 4).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 8}{5x^2 - x + 2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{x}\right)^x.$$

Варіант 15

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + 2x^2 - x + 1).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 36} \frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - x + 2}{5x^2 + 4x - 7}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^x.$$

Варіант 16

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (7x^2 - 5x + 1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 1}{4x^2 + 2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 14x}{7x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{13}{x} \right)^x.$$

Варіант 17

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 2x - 7).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x + 1}{3x^2 + 5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 5x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{14}{x}\right)^x.$$

Варіант 18

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (5x^2 + 3x - 4).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 49} \frac{\sqrt{x} - 7}{x - 49}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 - x + 4}{6x^3 + 2x^2 - 5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 18x}{6x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x}\right)^x.$$

Варіант 19

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (8x^2 - 3x + 2).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3}{14x^2 - x + 4}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 16x}{4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{15}{x}\right)^x.$$

Варіант 20

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 6).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 7}{2x^2 + 3x + 1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\sin 3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x}\right)^x.$$

Варіант 21

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (9x^2 - 4x + 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^2 + 2x - 1}{5x^2 - 3x + 7}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{5x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{16}{x}\right)^x.$$

Варіант 22

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (6x^3 - x + 5).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{x - 64}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x}{10x^3 - x + 1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\sin 3x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x}\right)^x.$$

Варіант 23

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 + x - 2).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x + 3}{x^2 + 6x - 2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 21x}{7x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{17}{x}\right)^x.$$

Варіант 24

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 2x + 1).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 - x + 3}{6x^2 + 4x - 1}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 18x}{\sin 6x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x}\right)^x.$$

Варіант 25

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 + 4x^2 - x + 6).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt{x} - 9}{x - 81}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^3 + 3}{8x^3 + 2x - 5}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 24x}{8x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{18}{x}\right)^x.$$

Варіант 26

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (10x^2 - 7x + 4).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x + 5}{4x^2 - x + 8}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 14x}{\sin 2x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 10}{x}\right)^x.$$

Варіант 27

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (7x^2 - 2x + 5).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21x^2 + 4x - 1}{7x^2 - x + 2}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 27x}{9x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{19}{x}\right)^x.$$

Варіант 28

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (8x^3 + 3x^2 - 2).$$

2. Обчислити з використанням спряженого виразу:

$$\lim_{x \rightarrow 100} \frac{\sqrt{x} - 10}{x - 100}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - x^2 + 2}{3x^3 + 5x - 4}.$$

4. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 20x}{\sin 4x}.$$

5. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 11}{x}\right)^x.$$

Варіант 29

1. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (11x^2 - 6x + 3).$$

2. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^3 - 343}{x - 7}.$$

3. Обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^2 + x - 3}{8x^2 - 2x + 5}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 30x}{10x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{20}{x}\right)^x.$$

Варіант 30

1. Обчислити границю функції безпосередньою підстановкою:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (6x^2 - 5x + 2).$$

2. Обчислити границю. Спочатку встановити вид невизначеності, а потім усунути її за допомогою відповідних алгебраїчних перетворень:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}.$$

3. Обчислити границю раціональної функції на нескінченності:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 2x^2 - 4}.$$

4. Використовуючи першу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 24x}{\sin 6x}.$$

5. Використовуючи другу важливу границю, обчислити:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 12}{x} \right)^x.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
1	Обчислення границі безпосередньою підстановкою	0,25
2	Обчислення границі з усуненням невизначеності	0,50
3	Обчислення границі функції на нескінченності	0,50
4	Застосування першої важливої границі	0,25
5	Застосування другої важливої границі	0,50

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
Разом		2,00

2,00 бали

Усі п'ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено спосіб обчислення кожної границі, виконано безпосередню підстановку там, де вона можлива, правильно встановлено вид невизначеності, виконано необхідні алгебраїчні перетворення, правильно застосовано першу та другу важливі границі. Розв'язання записано послідовно, а кінцеві результати є правильними.

1,50–1,75 бала

Здобувач освіти правильно визначає способи обчислення границь та володіє основними прийомами їх знаходження. Допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок, які не свідчать про нерозуміння способу розв'язування.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання та частину завдань середнього рівня складності. Здобувач освіти розуміє поняття границі та може застосувати безпосередню підстановку, але допускає помилки під час усунення невизначеностей або застосування важливих границь.

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти правильно виконує лише найпростіші обчислення. Під час виникнення невизначеності має труднощі з вибором способу її усунення. Перша та друга важливі границі застосовуються з істотними помилками.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння способів обчислення границь функцій.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний

університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. **Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова.** *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 12 — «Обчислення границь функцій».

Практичне заняття № 13

Тема: Обчислення похідних і диференціалів функцій

Мета

Закріпити знання, отримані під час лекції з теми «Похідна. Правила диференціювання»; сформувати практичні вміння знаходити похідні елементарних, складених, степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій; навчитися застосовувати таблицю похідних та правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки функцій; формувати вміння знаходити похідну складеної функції, обчислювати значення похідної у заданій точці, знаходити диференціал функції та його значення.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 13 входить до змістового модуля 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної» і має тему «**Обчислення похідних і диференціалів функцій**». Індивідуальним завданням передбачено знаходження похідних і диференціалів заданих функцій із застосуванням таблиці похідних, правил диференціювання, правила диференціювання складеної функції та обчисленням значення похідної або диференціала у заданій точці.

Оснащення: опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми, таблиця похідних елементарних функцій, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування):

1. Що називається похідною функції в точці?
2. Як позначається похідна функції?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Який механічний зміст похідної?
5. Чому дорівнює похідна сталої?
6. Чому дорівнює похідна функції $y = x$?
7. Чому дорівнює похідна степеневої функції $y = x^n$?
8. Чому дорівнює похідна функції $y = \sin x$?
9. Чому дорівнює похідна функції $y = \cos x$?

10. Чому дорівнює похідна функції $y = \tan x$?
11. Чому дорівнює похідна функції $y = \cot x$?
12. Чому дорівнює похідна показникової функції $y = e^x$?
13. Чому дорівнює похідна функції $y = a^x$?
14. Чому дорівнює похідна натурального логарифма?
15. Як знаходиться похідна суми двох функцій?
16. Як знаходиться похідна різниці двох функцій?
17. Як знаходиться похідна добутку двох функцій?
18. Як знаходиться похідна частки двох функцій?
19. Що називається складеною функцією?
20. Сформулюйте правило знаходження похідної складеної функції.
21. Що називається внутрішньою функцією?
22. Що називається зовнішньою функцією?
23. Як знайти значення похідної функції у заданій точці?
24. Що називається диференціалом функції?
25. Як позначається диференціал функції?
26. Який зв'язок існує між похідною і диференціалом функції?
27. Як обчислюється диференціал функції у заданій точці?
28. Чому дорівнює диференціал незалежної змінної?
29. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час знаходження похідної складеної функції?
30. Чому правильне визначення виду функції є важливим перед початком диференціювання?

Розв'язування прикладів

1. Знайти похідну степеневі функції

Знайти похідну функції:

$$y = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7.$$

Розв'язок

Використаємо правило диференціювання суми та різниці функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

а також формулу похідної степеневі функції:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Диференціюємо кожний доданок окремо:

$$y' = (4x^5)' - (3x^3)' + (2x)' - 7'.$$

Маємо:

$$(4x^5)' = 20x^4,$$

$$(3x^3)' = 9x^2,$$

$$(2x)' = 2,$$

$$7' = 0.$$

Отже:

$$y' = 20x^4 - 9x^2 + 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 20x^4 - 9x^2 + 2}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну функції:

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 4.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 8.$$

2. Знайти похідну функції з дробовими та від'ємними показниками степеня

Знайти похідну:

$$y = \sqrt{x} + \frac{3}{x^2}.$$

Розв'язок

Для зручності запишемо функцію у степеневому вигляді:

$$y = x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-2}.$$

Застосуємо правило:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Тоді:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3(-2)x^{-3}.$$

Отримаємо:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \sqrt{x} + \frac{4}{x}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{5}{x^3}.$$

Правило диференціювання добутку

Для функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

3. Знайти похідну добутку двох функцій

Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 3)(2x - 1).$$

Розв'язок

Функція є добутком двох функцій.

Позначимо:

$$u = x^2 + 3,$$

$$v = 2x - 1.$$

Знайдемо їх похідні:

$$u' = 2x,$$

$$v' = 2.$$

Застосуємо правило диференціювання добутку:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо знайдені вирази:

$$y' = 2x(2x - 1) + (x^2 + 3) \cdot 2.$$

Розкриємо дужки:

$$y' = 4x^2 - 2x + 2x^2 + 6.$$

Зведемо подібні доданки:

$$y' = 6x^2 - 2x + 6.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 6x^2 - 2x + 6}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 1)(3x - 2).$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^3 - 1)(x + 4).$$

Правило диференціювання частки

Якщо

$$y = \frac{u}{v},$$

то за умови $v \neq 0$:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

4. Знайти похідну частки двох функцій

Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 2}.$$

Розв'язок

Позначимо:

$$u = x^2 + 1, v = x + 2.$$

Знайдемо похідні:

$$u' = 2x,$$

$$v' = 1.$$

Застосуємо правило диференціювання частки:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Підставимо:

$$y' = \frac{2x(x + 2) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}.$$

Розкриємо дужки в чисельнику:

$$y' = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 1}{(x + 2)^2}.$$

Зведемо подібні доданки:

$$y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 5}{x^2 + 1}.$$

Похідні тригонометричних функцій

Основні формули:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Знайти похідну тригонометричної функції

Знайти похідну:

$$y = 3 \sin x - 2 \cos x.$$

Розв'язок

Застосуємо правило диференціювання суми та таблицю похідних:

$$y' = 3(\sin x)' - 2(\cos x)'.$$

Оскільки:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

а

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

одержимо:

$$y' = 3 \cos x - 2(-\sin x).$$

Отже:

$$y' = 3 \cos x + 2 \sin x.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3 \cos x + 2 \sin x}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = 5 \sin x + 3 \cos x.$$

2. Знайти похідну:

$$y = 4 \cos x - 7 \sin x.$$

Похідна складеної функції

Якщо функція має вигляд

$$y = f(u), \quad u = g(x),$$

то її похідна знаходиться за правилом:

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

Тобто спочатку знаходимо похідну зовнішньої функції, не змінюючи внутрішню функцію, а потім множимо отриманий результат на похідну внутрішньої функції.

6. Знайти похідну складеної степеневі функції

Знайти похідну:

$$y = (3x + 2)^5.$$

Розв'язок

Функція є складеною.

Внутрішня функція:

$$u = 3x + 2.$$

Зовнішня функція:

$$y = u^5.$$

Знайдемо похідну зовнішньої функції:

$$\frac{dy}{du} = 5u^4.$$

Знайдемо похідну внутрішньої функції:

$$u' = 3.$$

За правилом диференціювання складеної функції:

$$y' = 5u^4 \cdot 3.$$

Повернемося до змінної x :

$$y' = 15(3x + 2)^4.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 15(3x + 2)^4}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = (2x - 1)^6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (5x + 3)^4.$$

7. Знайти похідну складеної тригонометричної функції

Знайти похідну:

$$y = \sin(4x + 1).$$

Розв'язок

Внутрішня функція:

$$u = 4x + 1.$$

Зовнішня функція:

$$y = \sin u.$$

Похідна зовнішньої функції:

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Похідна внутрішньої функції:

$$u' = 4.$$

Тому:

$$y' = \cos u \cdot 4.$$

Повернемося до змінної x :

$$y' = 4\cos(4x + 1).$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 4\cos(4x + 1)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \sin(3x - 2).$$

2. Знайти похідну:

$$y = \cos(5x + 1).$$

8. Знайти похідну показникової функції

Знайти похідну:

$$y = e^{3x+2}.$$

Розв'язок

Маємо складену функцію.

Внутрішня функція:

$$u = 3x + 2.$$

Зовнішня функція:

$$y = e^u.$$

Відомо, що:

$$(e^u)' = e^u \cdot u'.$$

Знайдемо:

$$u' = 3.$$

Отже:

$$y' = 3e^{3x+2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3e^{3x+2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = e^{2x-1}.$$

2. Знайти похідну:

$$y = e^{5x+4}.$$

9. Знайти похідну логарифмічної функції

Знайти похідну:

$$y = \ln(2x + 3).$$

Розв'язок

Внутрішня функція:

$$u = 2x + 3.$$

Зовнішня функція:

$$y = \ln u.$$

Відомо:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Знайдемо похідну внутрішньої функції:

$$u' = 2.$$

Тому:

$$y' = \frac{2}{2x + 3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = \frac{2}{2x + 3}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну:

$$y = \ln(3x + 1).$$

2. Знайти похідну:

$$y = \ln(5x - 2).$$

10. Знайти похідну функції та обчислити її значення у заданій точці

Знайти похідну функції

$$y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Розв'язок

Спочатку знайдемо похідну функції:

$$y' = (x^3)' - 2(x^2)' + (4x)' - 1'.$$

Отже:

$$y' = 3x^2 - 4x + 4.$$

Тепер обчислимо значення похідної при $x = 2$:

$$y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4.$$

Виконуємо обчислення:

$$y'(2) = 12 - 8 + 4 = 8.$$

Відповідь:

$$\boxed{y' = 3x^2 - 4x + 4},$$

$$\boxed{y'(2) = 8}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну функції

$$y = x^3 + 2x^2 - x + 3$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

2. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 - 3x^2 + 5$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Диференціал функції

Диференціалом функції

$$y = f(x)$$

називається вираз:

$$dy = f'(x) dx.$$

Отже, для знаходження диференціала необхідно:

1. знайти похідну функції;
2. помножити отриману похідну на dx .

11. Знайти диференціал функції

Знайти диференціал:

$$y = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1.$$

Розв'язок

Знайдемо похідну:

$$y' = 12x^3 - 4x + 5.$$

За означенням диференціала:

$$dy = y' dx.$$

Тому:

$$dy = (12x^3 - 4x + 5) dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = (12x^3 - 4x + 5) dx}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти диференціал:

$$y = 2x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти диференціал:

$$y = 4x^5 - 3x^2 + 7.$$

12. Знайти диференціал складеної функції

Знайти диференціал:

$$y = (2x + 1)^4.$$

Розв'язок

Спочатку знайдемо похідну функції.

Маємо складену функцію:

$$y = (2x + 1)^4.$$

Похідна зовнішньої функції:

$$4(2x + 1)^3.$$

Похідна внутрішньої функції:

$$(2x + 1)' = 2.$$

Тому:

$$y' = 4(2x + 1)^3 \cdot 2.$$

Отже:

$$y' = 8(2x + 1)^3.$$

Диференціал функції:

$$dy = y' dx.$$

Тому:

$$dy = 8(2x + 1)^3 dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 8(2x + 1)^3 dx}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти диференціал:

$$y = (3x - 2)^5.$$

2. Знайти диференціал:

$$y = (4x + 1)^3.$$

13. Обчислити значення диференціала функції у заданій точці

Для функції

$$y = x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при

$$x = 2, dx = 0,1.$$

Розв'язок

Знайдемо похідну:

$$y' = 3x^2 + 2.$$

Диференціал функції:

$$dy = (3x^2 + 2)dx.$$

Підставимо:

$$x = 2, dx = 0,1.$$

Маємо:

$$dy = (3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 0,1.$$

Обчислимо:

$$3 \cdot 4 + 2 = 14.$$

Тому:

$$dy = 14 \cdot 0,1 = 1,4.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 1,4}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Для функції

$$y = x^2 + 3x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,05$.

2. Для функції

$$y = 2x^3 - x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0,1$.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайдіть похідні функцій:

$$y = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 6;$$

2.

$$y = 2x^5 + 4x^3 - x + 7;$$

3.

$$y = \sqrt{x} + \frac{2}{x}.$$

2. Знайдіть похідні добутків функцій:

$$y = (x^2 + 2)(3x - 1);$$

2.

$$y = (2x^3 + 1)(x^2 - 4);$$

3.

$$y = (x + 3) \sin x.$$

3. Знайдіть похідні часток функцій:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1};$$

2.

$$y = \frac{3x - 2}{x^2 + 1};$$

3.

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

4. Знайдіть похідні складених функцій:

$$y = (2x + 3)^6;$$

2.

$$y = \sin(5x - 1);$$

3.

$$y = \cos(3x + 2);$$

4.

$$y = e^{4x-3};$$

5.

$$y = \ln(2x + 5).$$

5. Знайдіть похідну та обчисліть її значення у заданій точці:

$$y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2, x = 1;$$

2.

$$y = 2x^4 - x^2 + 3, x = 2;$$

3.

$$y = \sin x + \cos x, x = 0.$$

6. Знайдіть диференціали функцій:

$$y = 4x^3 - 2x + 5;$$

2.

$$y = (3x + 1)^4;$$

3.

$$y = \sin 2x;$$

4.

$$y = e^{3x};$$

5.

$$y = \ln(4x + 1).$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- користуватися таблицею похідних елементарних функцій;
- знаходити похідну сталої та степеневої функції;
- знаходити похідну суми і різниці функцій;
- застосовувати правило диференціювання добутку;
- застосовувати правило диференціювання частки;
- знаходити похідні тригонометричних функцій;
- знаходити похідні показникових та логарифмічних функцій;
- розпізнавати складену функцію;
- правильно визначати внутрішню та зовнішню функції;
- застосовувати правило диференціювання складеної функції;
- знаходити значення похідної у заданій точці;
- знаходити диференціал функції;
- обчислювати значення диференціала у заданій точці;
- правильно і послідовно оформлювати математичні перетворення.

Зміст заняття відповідає робочій програмі, яка для практичного заняття 13 передбачає застосування таблиці похідних, правил диференціювання, знаходження похідних складених функцій, визначення диференціала та обчислення значення похідної або диференціала у заданій точці.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Означення похідної функції.
2. Геометричний зміст похідної.
3. Механічний зміст похідної.
4. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
5. Похідна сталої.
6. Похідна степеневої функції.
7. Похідна суми функцій.
8. Похідна різниці функцій.
9. Похідна добутку функцій.

10. Похідна частки функцій.
11. Похідні тригонометричних функцій.
12. Похідна показникової функції.
13. Похідна логарифмічної функції.
14. Поняття складеної функції.
15. Внутрішня і зовнішня функції.
16. Правило знаходження похідної складеної функції.
17. Обчислення значення похідної у заданій точці.
18. Поняття диференціала функції.
19. Зв'язок між похідною та диференціалом.
20. Формула диференціала функції.
21. Знаходження диференціала складеної функції.
22. Обчислення значення диференціала у заданій точці.
23. Послідовність знаходження похідної функції.
24. Послідовність знаходження диференціала функції.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 11 «Похідна. Правила диференціювання». Повторити таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання суми, різниці, добутку, частки і складеної функції.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

У кожному варіанті наведено **п'ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Біля порядкових номерів завдань кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання для всіх варіантів наведено після варіантів.

Варіант 1

1. Знайти похідну функції:

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = (x^2 + 2)(3x - 1).$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = (2x + 3)^5.$$

4. Знайти диференціал функції:

$$y = 2x^3 - 4x + 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 2

1. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^3 - 2x^2 + 4x + 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x + 3}.$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = (3x - 1)^6.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^4 - 3x^2 + 2.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 - x^2 + 3$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 3

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^5 - 3x^3 + x - 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 - 1)(x + 4).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(4x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^2 + 5x - 4.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,1$.

Варіант 4

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^6 - 5x^3 + 3x - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 3}{x^2 + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(3x - 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x + 1)^4.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^3 - x^2 + 4x - 2$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 5

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^4 - 2x^3 + 5x - 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 + 2)(2x - 5).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{2x+1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^3 - 2x + 7.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 4x$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0,05$.

Варіант 6

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^5 - 4x^2 + 3x + 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(3x + 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x - 1)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^3 + 3x^2 - x + 4$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 7

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^3 - 5x^2 + 2x - 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^2 + 1)(x - 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (4x + 3)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 2x^4 + 3x^2 - 5.$$

5. Для функції

$$y = 2x^3 - x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0,2$.

Варіант 8

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^6 - 2x^4 + x^2 - 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(5x - 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^3 - 7x + 2.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 - 2x^2 + 5x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 9

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^4 - 4x^2 + 6x - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 - 3)(4x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(2x + 5).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (x + 2)^6.$$

5. Для функції

$$y = 3x^2 + 2x - 1$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,1$.

Варіант 10

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^5 - 3x^2 + 4x + 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 + 1}{x + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{4x-1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 6x^2 - 3x + 8.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 4x^3 - 3x^2 + 2$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 11

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^4 + 7x^3 - 3x + 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 + 3)(x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(2x + 5).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (4x - 1)^3.$$

5. Для функції

$$y = x^3 - 3x$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,05$.

Варіант 12

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^6 - x^4 + 2x^2 - 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = (5x + 2)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^5 - 4x^2 + x.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^4 + 3x^2 - x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 13

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 - 1)(3x + 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(6x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^4 - 2x^3 + 6.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 5x + 2$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0,02$.

Варіант 14

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^5 + 2x^3 - 4x + 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(4x - 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x - 5)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 15

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^4 - 3x^3 + 2x - 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (4x^2 - 1)(x + 3).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{5x+2}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 2x^5 + x^3 - 4x.$$

5. Для функції

$$y = 3x^3 + 2x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0,1$.

Варіант 16

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^5 - 2x^2 + 5x - 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x + 4}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(4x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x + 2)^4.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 + 2x^3 - 5x$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 17

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^6 - 4x^3 + x - 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 + 5)(2x - 3).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (6x - 1)^3.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 7x^3 - 5x^2 + 4.$$

5. Для функції

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 4$, $dx = 0,05$.

Варіант 18

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^4 + 3x^2 - 6x + 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(7x - 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^5 - 3x + 1.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - x^2 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 19

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^3 - 2x^2 + 4x - 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^3 + 1)(x - 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(5x + 4).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (x - 3)^7.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 4x^2$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,1$.

Варіант 20

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^7 - 5x^4 + 3x^2 - 1.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 - 2}{2x + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{3x-4}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^4 - 2x^2 + 3x.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 2x^3 - 4x^2 + x + 5$$

та обчислити її значення при $x = 3$.

Варіант 21

1. Знайти похідну:

$$y = 7x^5 + 2x^3 - 5x + 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^2 - 3)(4x + 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(5x + 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (2x + 5)^6.$$

5. Для функції

$$y = 4x^2 + x - 3$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,04$.

Варіант 22

1. Знайти похідну:

$$y = 3x^6 - 7x^2 + 2x + 8.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = (3x - 4)^7.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 6x^3 + x^2 - 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = x^4 - 3x^3 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 23

1. Знайти похідну:

$$y = 5x^4 + 4x^3 - 2x + 6.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^2 - 4)(5x + 2).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(8x + 3).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 3x^5 + 2x^2 - 7x.$$

5. Для функції

$$y = 2x^3 + 5x$$

обчислити диференціал при $x = 1$, $dx = 0,05$.

Варіант 24

1. Знайти похідну:

$$y = 6x^5 - x^3 + 3x^2 - 4.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{4x - 3}{x^2 + 2}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(6x - 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (5x + 1)^3.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - 2x^2 + x - 6$$

та обчислити її значення при $x = -1$.

Варіант 25

1. Знайти похідну:

$$y = 10x^3 - 4x^2 + 3x - 9.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (2x^3 + 5)(x - 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = e^{6x+1}.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 4x^4 + 2x^3 - x.$$

5. Для функції

$$y = x^2 + 6x - 2$$

обчислити диференціал при $x = 3$, $dx = 0,1$.

Варіант 26

1. Знайти похідну:

$$y = 4x^7 - 3x^5 + 2x - 5.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{2x^2 + 5}{3x - 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \ln(6x + 1).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (4x - 3)^5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 5x^3 + x^2 - 4x$$

та обчислити її значення при $x = 2$.

Варіант 27

1. Знайти похідну:

$$y = 8x^4 - 6x^2 + x + 3.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (3x^2 + 4)(2x - 1).$$

3. Знайти похідну:

$$y = (7x + 2)^4.$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 5x^3 - 4x + 6.$$

5. Для функції

$$y = 3x^3 - x^2$$

обчислити диференціал при $x = 2$, $dx = 0,02$.

Варіант 28

1. Знайти похідну:

$$y = 2x^6 + 5x^4 - 3x + 7.$$

2. Знайти похідну:

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1}.$$

3. Знайти похідну:

$$y = \sin(9x - 4).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = 7x^4 - 2x^2 + 5.$$

5. Знайти похідну функції

$$y = 4x^4 - 3x^2 + 2x$$

та обчислити її значення при $x = 1$.

Варіант 29

1. Знайти похідну:

$$y = 9x^5 - 5x^3 + 4x - 2.$$

2. Знайти похідну:

$$y = (x^3 + 3)(4x - 5).$$

3. Знайти похідну:

$$y = \cos(7x + 2).$$

4. Знайти диференціал:

$$y = (3x + 4)^6.$$

5. Для функції

$$y = 2x^2 + 7x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 4$, $dx = 0,05$.

Варіант 30

1. Знайти похідну функції:

$$y = 5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 4.$$

2. Знайти похідну функції:

$$y = \frac{3x^2 - 1}{2x + 5}.$$

3. Знайти похідну складеної функції:

$$y = e^{4x+3}.$$

4. Знайти диференціал функції:

$$y = (2x - 3)^7.$$

5. Для функції

$$y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

обчислити диференціал при $x = 2$, якщо $dx = 0,1$.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Знаходження похідної із застосуванням таблиці похідних	0,25
2	Застосування правил диференціювання добутку або частки	0,50
3	Знаходження похідної складеної функції	0,50
4	Знаходження диференціала функції	0,25
5	Обчислення значення похідної або диференціала у заданій точці	0,50
Разом		2,00
2,00 бали		

Усі п'ять завдань виконано правильно та повністю. Здобувач освіти правильно використовує таблицю похідних, безпомилково застосовує правила диференціювання суми, різниці, добутку та частки, правильно визначає

внутрішню і зовнішню функції під час диференціювання складених функцій, правильно знаходить диференціал та обчислює значення похідної або диференціала у заданій точці. Розв'язання записані послідовно, математично грамотно та завершені правильними відповідями.

1,50–1,75 бала

Основні способи диференціювання засвоєно правильно. Допущено одну або декілька незначних арифметичних чи алгебраїчних помилок. Здобувач освіти правильно визначає правило, яке необхідно застосувати, але може допустити неточність під час спрощення отриманого виразу.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано прості завдання та частину завдань середнього рівня складності. Здобувач освіти вміє користуватися таблицею похідних, але допускає помилки під час диференціювання добутку, частки або складеної функції. Диференціал функції знаходить із незначною допомогою викладача.

0,50–0,75 бала

Правильно виконано лише окремі прості завдання. Є суттєві помилки у використанні правил диференціювання. Здобувач освіти має труднощі з визначенням внутрішньої та зовнішньої функцій, знаходженням диференціала або обчисленням його значення.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння таблиці похідних, правил диференціювання та зв'язку між похідною і диференціалом функції.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення : курс лекцій : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум : навчальний посібник.* Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. *Прикладні задачі з вищої математики* : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І. *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка»**. Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 13 — «Обчислення похідних і диференціалів функцій»

Практичне заняття № 14

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема: Дослідження функцій. Знаходження максимумів і мінімумів у прикладних задачах

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години

Мета

Закріпити знання про похідну функції, критичні точки, проміжки зростання і спадання, точки максимуму та мінімуму; сформувати вміння застосовувати похідну для дослідження функцій і розв'язування професійно орієнтованих оптимізаційних задач прикладної механіки.

Навчити здобувачів освіти встановлювати математичну залежність між механічними або геометричними величинами, складати функцію, що описує досліджуваний процес, визначати її область допустимих значень, знаходити критичні точки, досліджувати знак похідної та визначати найбільші й найменші значення величин.

Формувати вміння інтерпретувати результати математичного дослідження стосовно реального механічного об'єкта: визначати оптимальні розміри деталі, максимальне переміщення, мінімальні витрати матеріалу, максимальну продуктивність, оптимальний режим роботи механізму та інші характеристики.

Оснащення

Опорні конспекти, навчальні посібники, картки професійно орієнтованих завдань, схеми механічних деталей і механізмів, калькулятор, креслярське приладдя, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності.

5. Актуалізація опорних знань.
6. Повторення алгоритму знаходження проміжків монотонності.
7. Повторення алгоритму знаходження точок екстремуму.
8. Дослідження функцій за допомогою першої похідної.
9. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції.
10. Побудова математичних моделей оптимізаційних задач.
11. Розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки.
12. Самостійне виконання завдань.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків.
15. Повідомлення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називається похідною функції?
2. Який механічний зміст має перша похідна?
3. Що називається критичною точкою функції?
4. Як знайти критичні точки?
5. Яка ознака зростання функції?
6. Яка ознака спадання функції?
7. Що називається точкою локального максимуму?
8. Що називається точкою локального мінімуму?
9. Що називається екстремумом функції?
10. Чи кожна критична точка є точкою екстремуму?
11. Як дослідити знак похідної?
12. Якою є ознака максимуму за зміною знака першої похідної?
13. Якою є ознака мінімуму за зміною знака першої похідної?
14. Як використовується друга похідна для дослідження екстремуму?
15. Що означає умова $f''(x_0) > 0$?
16. Що означає умова $f''(x_0) < 0$?

17. Як знайти найбільше значення функції на відрізку?
18. Як знайти найменше значення функції на відрізку?
19. Чому під час прикладної задачі необхідно встановлювати область допустимих значень?
20. Як складається цільова функція оптимізаційної задачі?
21. Які механічні величини можуть бути функціями часу?
22. Як за законом переміщення визначити швидкість?
23. Як за законом швидкості визначити прискорення?
24. Які параметри механічної деталі можна оптимізувати?
25. Як похідна може використовуватися для мінімізації витрат матеріалу?
26. Як визначити момент найбільшого переміщення?
27. Як визначити максимальну продуктивність механізму?
28. Чому математичний екстремум необхідно перевіряти на фізичну допустимість?
29. Чим локальний екстремум відрізняється від найбільшого або найменшого значення на відрізку?
30. Яке значення має оптимізація для прикладної механіки?

Короткий алгоритм розв'язування прикладної задачі на екстремум

Під час розв'язування професійно орієнтованої задачі доцільно дотримуватися такої послідовності:

1. Визначити величину, яку необхідно максимізувати або мінімізувати.
2. Ввести змінну.
3. Встановити область допустимих значень змінної.
4. Виразити досліджувану величину через одну змінну.
5. Скласти цільову функцію.
6. Знайти її похідну.
7. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$.
8. Відібрати критичні точки, що належать області допустимих значень.
9. Визначити характер критичних точок.

10. За необхідності порівняти значення функції у критичних точках і на межах області.
11. Записати результат з одиницями вимірювання.
12. Пояснити його професійний зміст.

Розв'язування професійно орієнтованих прикладів

Приклад 1. Дослідження переміщення точки механізму

Переміщення точки механізму описується функцією

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2,$$

де t — час у секундах. Визначити проміжки зростання і спадання переміщення та точки локального екстремуму.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

Винесемо спільний множник:

$$s'(t) = 3(t^2 - 4t + 3).$$

Розкладемо на множники:

$$s'(t) = 3(t - 1)(t - 3).$$

Критичні точки:

$$t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Досліджуємо знак похідної.

При $t < 1$:

$$s'(t) > 0.$$

При $1 < t < 3$:

$$s'(t) < 0.$$

При $t > 3$:

$$s'(t) > 0.$$

Отже, при $t = 1$ похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», тому маємо локальний максимум.

$$s(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6.$$

При $t = 3$ похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс», тому маємо локальний мінімум.

$$s(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2.$$

Відповідь

Функція зростає при $t < 1$ і $t > 3$, спадає при $1 < t < 3$.

Локальний максимум:

$$s(1) = 6.$$

Локальний мінімум:

$$s(3) = 2.$$

У фізичній задачі враховуємо тільки допустимі значення $t \geq 0$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Переміщення повзуна задано функцією $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 1$. Дослідити функцію на монотонність і знайти точки екстремуму при $t \geq 0$.

1.2. Координата точки механізму задана функцією $x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t + 4$. Визначити проміжки зростання і спадання координати та точки екстремуму.

Приклад 2. Максимальна швидкість механічної ланки

Швидкість точки механізму протягом робочого інтервалу $0 \leq t \leq$ бописується функцією

$$v(t) = -t^2 + 6t + 4.$$

Визначити максимальну швидкість.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$v'(t) = -2t + 6.$$

Критична точка:

$$-2t + 6 = 0,$$

$$t = 3.$$

Друга похідна:

$$v''(t) = -2 < 0.$$

Отже, при $t = 3$ функція має максимум.

Обчислюємо:

$$v(3) = -9 + 18 + 4 = 13.$$

Перевіримо кінці відрізка:

$$v(0) = 4,$$

$$v(6) = -36 + 36 + 4 = 4.$$

Відповідь

Максимальна швидкість досягається при

$$t = 3 \text{ с}$$

і дорівнює

$$v_{\max} = 13.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Швидкість повзуна задана функцією $v(t) = -2t^2 + 12t + 3$, $0 \leq t \leq 6$.
Визначити максимальну швидкість.

2.2. Швидкість точки ланки описується функцією $v(t) = -t^2 + 8t + 5$, $0 \leq t \leq 8$.
Визначити момент і значення максимальної швидкості.

Приклад 3. Мінімальне навантаження

Залежність навантаження на механічний елемент від параметра x описується функцією

$$F(x) = x^2 - 8x + 25, \quad x > 0.$$

Визначити значення параметра, за якого навантаження мінімальне.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$F'(x) = 2x - 8.$$

Прирівнюємо до нуля:

$$2x - 8 = 0.$$

$$x = 4.$$

Друга похідна:

$$F''(x) = 2 > 0.$$

Отже, при $x = 4$ функція має мінімум.

$$F(4) = 16 - 32 + 25 = 9.$$

Відповідь

$$\boxed{x = 4, F_{\min} = 9.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Навантаження на елемент описується функцією $F(x) = x^2 - 10x + 34$. Визначити мінімальне навантаження.

3.2. Залежність приведенного навантаження від параметра має вигляд $F(x) = 2x^2 - 16x + 40$. Знайти значення параметра, за якого навантаження мінімальне.

Приклад 4. Максимальна продуктивність механізму

Продуктивність механізму залежить від параметра режиму n за законом

$$Q(n) = -2n^2 + 40n + 100.$$

Визначити значення параметра, за якого продуктивність максимальна.

Розв'язання

$$Q'(n) = -4n + 40.$$

Критична точка:

$$-4n + 40 = 0,$$

$$n = 10.$$

Друга похідна:

$$Q''(n) = -4 < 0.$$

Отже, це точка максимуму.

$$Q(10) = -2 \cdot 100 + 400 + 100 = 300.$$

Відповідь

Максимальна продуктивність становить

$$\boxed{Q_{\max} = 300}$$

при

$$\boxed{n = 10}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Продуктивність механізму описується функцією $Q(n) = -n^2 + 24n + 80$. Визначити оптимальне значення параметра і максимальну продуктивність.

4.2. Продуктивність технологічного механізму задано функцією $Q(n) = -3n^2 + 36n + 120$. Знайти її максимальне значення.

Приклад 5. Оптимальні розміри прямокутної пластини

Із заготовки необхідно отримати прямокутну пластину з периметром 40 сантиметрів. Визначити довжину і ширину пластини, за яких її площа буде максимальною.

Розв'язання

Нехай одна сторона дорівнює x , а друга — y .

За умовою:

$$2x + 2y = 40.$$

Отже,

$$x + y = 20,$$

$$y = 20 - x.$$

Площа:

$$S(x) = x(20 - x).$$

$$S(x) = 20x - x^2.$$

Область допустимих значень:

$$0 < x < 20.$$

Знайдемо похідну:

$$S'(x) = 20 - 2x.$$

$$20 - 2x = 0.$$

$$x = 10.$$

Тоді

$$y = 20 - 10 = 10.$$

Друга похідна:

$$S''(x) = -2 < 0.$$

Отже, площа максимальна.

$$S_{\max} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2.$$

Відповідь

Оптимальні розміри пластини:

$$\boxed{10 \text{ см} \times 10 \text{ см.}}$$

Максимальна площа:

$$\boxed{100 \text{ см}^2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Периметр прямокутної металевої пластини дорівнює 48сантиметрів. Визначити розміри, за яких площа максимальна.

5.2. Необхідно виготовити прямокутну пластину з периметром 60сантиметрів. Визначити оптимальні розміри за критерієм максимальної площі.

Приклад 6. Максимальна площа прямокутного перерізу

Прямокутний переріз механічного елемента має сторони x та y , причому

$$x + y = 18.$$

Визначити розміри перерізу, за яких його площа найбільша.

Розв'язання

$$y = 18 - x.$$

Площа:

$$S(x) = x(18 - x) = 18x - x^2.$$

$$S'(x) = 18 - 2x.$$

$$18 - 2x = 0.$$

$$x = 9.$$

Тоді

$$y = 9.$$

$$S''(x) = -2 < 0.$$

Отже, отримано максимум.

Відповідь

$$\boxed{x = y = 9.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Для прямокутного перерізу $x + y = 24$. Визначити розміри максимальної площі.

6.2. Для перерізу механічного елемента виконується умова $x + y = 30$. Визначити розміри, за яких площа найбільша.

Приклад 7. Мінімізація витрат матеріалу

Умовні витрати матеріалу на виготовлення механічного елемента описуються функцією

$$M(x) = 2x^2 - 24x + 100.$$

Визначити значення параметра x , за якого витрати матеріалу мінімальні.

Розв'язання

$$M'(x) = 4x - 24.$$

$$4x - 24 = 0.$$

$$x = 6.$$

Друга похідна:

$$M''(x) = 4 > 0.$$

Отже, маємо мінімум.

$$M(6) = 2 \cdot 36 - 144 + 100 = 28.$$

Відповідь

$x = 6, M_{\min} = 28.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Витрати матеріалу описуються функцією $M(x) = 3x^2 - 30x + 100$. Визначити мінімальні витрати.

7.2. Функція витрат має вигляд $M(x) = 4x^2 - 48x + 180$. Знайти оптимальне значення параметра.

Приклад 8. Максимальна потужність

Потужність механічної системи залежить від параметра режиму x :

$$P(x) = -5x^2 + 60x + 20.$$

Визначити режим, за якого потужність максимальна.

Розв'язання

$$P'(x) = -10x + 60.$$

$$-10x + 60 = 0.$$

$$x = 6.$$

$$P''(x) = -10 < 0.$$

Отже, при $x = 6$ потужність максимальна.

$$P(6) = -5 \cdot 36 + 360 + 20 = 200.$$

Відповідь

$$\boxed{x = 6, P_{\max} = 200.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Потужність механізму задана функцією $P(x) = -4x^2 + 48x + 30$. Визначити максимальну потужність.

8.2. Залежність потужності від режимного параметра має вигляд $P(x) = -2x^2 + 28x + 50$. Знайти оптимальний режим.

Приклад 9. Максимальна висота точки механізму

Вертикальна координата точки механізму залежить від часу:

$$y(t) = -2t^2 + 12t + 1, \quad 0 \leq t \leq 6.$$

Знайти максимальну висоту точки.

Розв'язання

$$y'(t) = -4t + 12.$$

$$-4t + 12 = 0.$$

$$t = 3.$$

$$y''(t) = -4 < 0.$$

Отже, при $t = 3$ маємо максимум.

$$y(3) = -18 + 36 + 1 = 19.$$

Відповідь

$$\boxed{y_{\max} = 19}$$

при

$$\boxed{t = 3 \text{ с.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Координата точки механізму задана функцією $y(t) = -t^2 + 8t + 2$, $0 \leq t \leq 8$. Знайти максимальне значення.

9.2. Вертикальне переміщення задано функцією $y(t) = -3t^2 + 18t + 4$, $0 \leq t \leq 6$. Визначити максимальне переміщення.

Приклад 10. Мінімум деформації

Залежність умовної деформації елемента від параметра x має вигляд

$$\delta(x) = x^2 - 12x + 40.$$

Визначити параметр, за якого деформація мінімальна.

Розв'язання

$$\delta'(x) = 2x - 12.$$

$$2x - 12 = 0.$$

$$x = 6.$$

$$\delta''(x) = 2 > 0.$$

Тому при $x = 6$ деформація мінімальна.

$$\delta(6) = 36 - 72 + 40 = 4.$$

Відповідь

$$\boxed{x = 6, \delta_{\min} = 4.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Деформація задана функцією $\delta(x) = x^2 - 14x + 54$. Знайти мінімальну деформацію.

10.2. Залежність деформації має вигляд $\delta(x) = 2x^2 - 20x + 58$. Визначити оптимальне значення параметра.

Приклад 11. Максимальна ефективність механізму

Умовний показник ефективності механізму описується функцією

$$E(x) = -x^2 + 10x + 15.$$

Визначити оптимальне значення параметра x .

Розв'язання

$$E'(x) = -2x + 10.$$

$$-2x + 10 = 0.$$

$$x = 5.$$

Оскільки

$$E''(x) = -2 < 0,$$

у цій точці маємо максимум.

$$E(5) = -25 + 50 + 15 = 40.$$

Відповідь

$x = 5, E_{\max} = 40.$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Показник ефективності задано функцією $E(x) = -2x^2 + 16x + 10$.
Визначити його максимальне значення.

11.2. Ефективність механізму описується функцією $E(x) = -3x^2 + 30x + 20$. Знайти оптимальний параметр.

Приклад 12. Комплексна задача на оптимізацію механічного режиму

Умовна продуктивність механічної установки залежить від параметра x :

$$Q(x) = -2x^2 + 32x + 40, 0 \leq x \leq 20.$$

Визначити проміжки зростання і спадання продуктивності та її найбільше значення на заданому проміжку.

Розв'язання

$$Q'(x) = -4x + 32.$$

Критична точка:

$$-4x + 32 = 0,$$

$$x = 8.$$

При $0 < x < 8$:

$$Q'(x) > 0.$$

Отже, функція зростає.

При $8 < x < 20$:

$$Q'(x) < 0.$$

Отже, функція спадає.

Обчислимо значення:

$$Q(0) = 40,$$

$$Q(8) = -2 \cdot 64 + 256 + 40 = 168,$$

$$Q(20) = -800 + 640 + 40 = -120.$$

Отже, найбільше значення:

$$Q_{\max} = 168.$$

Відповідь

Продуктивність зростає на проміжку $(0; 8)$, спадає на проміжку $(8; 20)$ і досягає максимального значення

$$Q_{\max} = 168$$

при

$$x = 8.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Продуктивність механізму описується функцією $Q(x) = -x^2 + 18x + 30$, $0 \leq x \leq 20$. Дослідити функцію і знайти найбільше значення.

12.2. Показник роботи механічної установки задано функцією $Q(x) = -3x^2 + 42x + 25$, $0 \leq x \leq 16$. Визначити проміжки монотонності та максимум.

Завдання для самостійного розв'язування на занятті

1. Переміщення точки механізму задано функцією $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$.
Визначити проміжки зростання і спадання та точки екстремуму при $t \geq 0$.
2. Швидкість механічної ланки задана функцією $v(t) = -2t^2 + 16t + 5$, $0 \leq t \leq 8$. Визначити максимальну швидкість.
3. Навантаження на деталь описується функцією $F(x) = 2x^2 - 24x + 80$.
Знайти мінімальне навантаження.
4. Продуктивність механізму задана функцією $Q(x) = -3x^2 + 48x + 60$.
Визначити максимальну продуктивність.

5. Периметр прямокутної пластини дорівнює 72 сантиметри. Визначити розміри, за яких площа пластини максимальна.
6. Витрати матеріалу задано функцією $M(x) = 4x^2 - 64x + 300$. Визначити мінімальне значення.
7. Потужність механічної системи описується функцією $P(x) = -2x^2 + 40x + 50$. Визначити оптимальний режим.
8. Деформація елемента описується функцією $\delta(x) = 3x^2 - 36x + 120$. Визначити мінімальну деформацію.

Типові помилки

1. Знаходження екстремуму без визначення області допустимих значень.
2. Прирівнювання до нуля самої функції замість її похідної.
3. Визнання кожної критичної точки точкою екстремуму без перевірки.
4. Неправильне визначення знака похідної.
5. Плутання максимуму і мінімуму.
6. Ігнорування кінців відрізка під час пошуку найбільшого або найменшого значення.
7. Неправильне складання цільової функції.
8. Використання двох незалежних змінних замість зведення задачі до однієї змінної.
9. Відсутність перевірки фізичної допустимості отриманого значення.
10. Відсутність одиниць вимірювання.
11. Відсутність професійного тлумачення результату.
12. Плутання математичного локального екстремуму з оптимальним результатом прикладної задачі.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

Задача 1. Переміщення повзуна механізму описується функцією $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$, $t \geq 0$. Визначити критичні точки, проміжки зростання і спадання та точки екстремуму.

Задача 2. Швидкість точки механізму задана функцією $v(t) = -t^2 + 8t + 4$, $0 \leq t \leq 8$. Визначити максимальну швидкість і момент її досягнення.

Задача 3. Навантаження на механічний елемент описується функцією $F(x) = x^2 - 10x + 34$. Визначити значення параметра x , за якого навантаження мінімальне, та обчислити це навантаження.

Задача 4. Продуктивність механізму описується функцією $Q(x) = -2x^2 + 32x + 50$. Визначити значення параметра, за якого продуктивність максимальна.

Задача 5. Необхідно виготовити прямокутну металеву пластину з периметром 48сантиметрів. Визначити довжину і ширину пластини, за яких її площа максимальна.

Варіант 2

Задача 1. Координата точки механізму задана функцією $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 3, t \geq 0$. Дослідити функцію на монотонність та знайти точки екстремуму.

Задача 2. Швидкість повзуна описується функцією $v(t) = -2t^2 + 12t + 5, 0 \leq t \leq 6$. Знайти максимальну швидкість.

Задача 3. Умовна деформація деталі задана функцією $\delta(x) = x^2 - 12x + 40$. Визначити мінімальну деформацію та відповідне значення параметра.

Задача 4. Потужність механічної системи описується функцією $P(x) = -4x^2 + 48x + 30$. Визначити режим максимальної потужності.

Задача 5. Прямокутний переріз механічного елемента задовольняє умову $x + y = 20$. Визначити розміри перерізу, за яких його площа максимальна.

Варіант 3

Задача 1. Переміщення ланки задано функцією $s(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t + 1, t \geq 0$. Знайти критичні точки та проміжки монотонності.

Задача 2. Швидкість точки задана функцією $v(t) = -t^2 + 10t + 2, 0 \leq t \leq 10$. Визначити максимальну швидкість.

Задача 3. Навантаження задано функцією $F(x) = 2x^2 - 16x + 40$. Знайти мінімальне значення навантаження.

Задача 4. Продуктивність механізму описується функцією $Q(x) = -3x^2 + 36x + 100$. Визначити максимальну продуктивність.

Задача 5. Периметр прямокутної пластини становить 56сантиметрів. Знайти розміри максимальної за площею пластини.

Варіант 4

Задача 1. Координата контрольної точки механізму задана функцією $x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 2, t \geq 0$. Дослідити її на монотонність і екстремуми.

Задача 2. Швидкість механічної ланки описується функцією $v(t) = -3t^2 + 18t + 6$, $0 \leq t \leq 6$. Визначити максимальну швидкість.

Задача 3. Деформація елемента задана функцією $\delta(x) = 2x^2 - 20x + 58$. Визначити мінімальну деформацію.

Задача 4. Потужність механізму описується функцією $P(x) = -5x^2 + 50x + 40$. Знайти максимальну потужність.

Задача 5. Для прямокутного перерізу виконується умова $x + y = 24$. Визначити розміри, за яких площа найбільша.

Варіант 5

Задача 1. Переміщення повзуна задано функцією $s(t) = t^3 - 15t^2 + 48t + 4$, $t \geq 0$. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми.

Задача 2. Швидкість точки механізму задана функцією $v(t) = -2t^2 + 16t + 3$, $0 \leq t \leq 8$. Знайти максимальну швидкість.

Задача 3. Витрати матеріалу описуються функцією $M(x) = 3x^2 - 30x + 100$. Визначити мінімальні витрати.

Задача 4. Продуктивність установки задана функцією $Q(x) = -2x^2 + 40x + 60$. Визначити максимальну продуктивність.

Задача 5. Прямокутна пластина має периметр 64 сантиметри. Визначити її оптимальні розміри за критерієм максимальної площі.

Варіанти 6–30

Для всіх наступних варіантів зберігається **повна структура з п'яти професійно орієнтованих задач**. Щоб виконати Ваш стандарт без скорочень, нижче подаю їх повністю.

Варіант 6

1. Переміщення точки механізму задано $s(t) = 2t^3 - 18t^2 + 36t + 5$, $t \geq 0$. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 12t + 7$, $0 \leq t \leq 12$. Визначити максимальну швидкість.
3. Навантаження задано $F(x) = x^2 - 14x + 55$. Визначити мінімальне навантаження.
4. Потужність задана $P(x) = -3x^2 + 42x + 50$. Визначити максимальну потужність.

5. Периметр прямокутної пластини дорівнює 72 сантиметри. Визначити розміри максимальної площі.

Варіант 7

1. Координата точки механізму задана $x(t) = t^3 - 18t^2 + 81t + 1, t \geq 0$. Знайти проміжки монотонності й екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 20t + 4, 0 \leq t \leq 10$. Визначити максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = x^2 - 16x + 70$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -4x^2 + 48x + 80$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 28$. Визначити розміри максимальної площі.

Варіант 8

1. Переміщення ланки задано $s(t) = t^3 - 12t^2 + 27t + 6, t \geq 0$. Дослідити монотонність і екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 24t + 5, 0 \leq t \leq 8$. Визначити максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 2x^2 - 32x + 150$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -2x^2 + 36x + 40$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини 80 сантиметрів. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 9

1. Координата точки задана $x(t) = 2t^3 - 24t^2 + 72t + 3, t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 14t + 8, 0 \leq t \leq 14$. Знайти максимальне значення.
3. Навантаження задано $F(x) = 3x^2 - 36x + 120$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -5x^2 + 60x + 90$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 32$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 10

1. Переміщення повзуна задано $s(t) = t^3 - 21t^2 + 108t + 2, t \geq 0$. Дослідити монотонність та екстремуми.

2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 24t + 6$, $0 \leq t \leq 12$. Визначити максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = 2x^2 - 28x + 110$. Визначити мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -4x^2 + 64x + 50$. Визначити максимум.
5. Периметр пластини становить 88сантиметрів. Знайти розміри максимальної площі.

Варіант 11

1. Переміщення точки задано $s(t) = t^3 - 9t^2 + 18t + 5$, $t \geq 0$. Дослідити функцію на екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 16t + 3$, $0 \leq t \leq 16$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = x^2 - 18x + 90$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -2x^2 + 44x + 70$. Знайти максимум.
5. Для перерізу $x + y = 36$. Визначити розміри максимальної площі.

Варіант 12

1. Координата ланки задана $x(t) = 2t^3 - 30t^2 + 108t + 1$, $t \geq 0$. Дослідити монотонність і екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 30t + 4$, $0 \leq t \leq 10$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 4x^2 - 48x + 180$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -5x^2 + 70x + 30$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини дорівнює 96сантиметрів. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 13

1. Переміщення задано $s(t) = t^3 - 24t^2 + 135t + 4$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 28t + 5$, $0 \leq t \leq 14$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = x^2 - 20x + 110$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -3x^2 + 54x + 100$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 40$. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 14

1. Координата точки задана $x(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t + 2$, $t \geq 0$. Дослідити монотонність та екстремуми.

2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 18t + 6$, $0 \leq t \leq 18$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = 2x^2 - 40x + 220$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -4x^2 + 72x + 80$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини становить 104сантиметри. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 15

1. Переміщення повзуна задано $s(t) = t^3 - 15t^2 + 54t + 3$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 32t + 7$, $0 \leq t \leq 16$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = 3x^2 - 60x + 320$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -5x^2 + 80x + 60$. Знайти максимум.
5. Для перерізу $x + y = 44$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 16

1. Переміщення точки механізму задано $s(t) = 2t^3 - 24t^2 + 54t + 6$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 36t + 4$, $0 \leq t \leq 12$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 2x^2 - 40x + 230$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -2x^2 + 48x + 90$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини становить 112сантиметрів. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 17

1. Координата точки задана $x(t) = t^3 - 27t^2 + 180t + 1$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 20t + 5$, $0 \leq t \leq 20$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = x^2 - 22x + 130$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -3x^2 + 66x + 50$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 48$. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 18

1. Переміщення задано $s(t) = 2t^3 - 42t^2 + 240t + 5$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.

2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 40t + 8$, $0 \leq t \leq 20$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = 2x^2 - 48x + 310$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -4x^2 + 88x + 70$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини дорівнює 120сантиметрів. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 19

1. Координата точки задана $x(t) = t^3 - 18t^2 + 72t + 2$, $t \geq 0$. Дослідити монотонність і екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 42t + 6$, $0 \leq t \leq 14$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 3x^2 - 66x + 390$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -5x^2 + 100x + 80$. Знайти максимум.
5. Для перерізу $x + y = 52$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 20

1. Переміщення повзуна задано $s(t) = 2t^3 - 30t^2 + 96t + 4$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 22t + 3$, $0 \leq t \leq 22$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = 2x^2 - 52x + 360$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -2x^2 + 52x + 100$. Знайти максимум.
5. Периметр прямокутної пластини дорівнює 128сантиметрів. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 21

1. Переміщення точки задано $s(t) = t^3 - 30t^2 + 225t + 5$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 48t + 4$, $0 \leq t \leq 24$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = x^2 - 26x + 180$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -3x^2 + 78x + 60$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 56$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 22

1. Координата точки механізму задана $x(t) = 2t^3 - 48t^2 + 270t + 3$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.

2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 54t + 5$, $0 \leq t \leq 18$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 2x^2 - 56x + 420$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -4x^2 + 104x + 50$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини дорівнює 136сантиметрів. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 23

1. Переміщення задано $s(t) = t^3 - 21t^2 + 108t + 6$, $t \geq 0$. Дослідити монотонність та екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 24t + 7$, $0 \leq t \leq 24$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = 3x^2 - 84x + 620$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -5x^2 + 120x + 90$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 60$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 24

1. Координата точки задана $x(t) = 2t^3 - 36t^2 + 144t + 2$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 52t + 6$, $0 \leq t \leq 26$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = 2x^2 - 60x + 480$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -2x^2 + 56x + 80$. Знайти максимум.
5. Периметр прямокутної пластини дорівнює 144сантиметри. Знайти оптимальні розміри.

Варіант 25

1. Переміщення точки механізму задано $s(t) = t^3 - 33t^2 + 270t + 4$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 60t + 8$, $0 \leq t \leq 20$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = x^2 - 30x + 250$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -3x^2 + 90x + 70$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 64$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 26

1. Координата точки механізму задана $x(t) = 2t^3 - 54t^2 + 336t + 1$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.

2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 28t + 4$, $0 \leq t \leq 28$. Знайти максимум.
3. Навантаження задано $F(x) = 2x^2 - 64x + 540$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -4x^2 + 120x + 60$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини дорівнює 152сантиметри. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 27

1. Переміщення задано $s(t) = t^3 - 24t^2 + 135t + 5$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -2t^2 + 60t + 5$, $0 \leq t \leq 30$. Знайти максимум.
3. Деформація задана $\delta(x) = 3x^2 - 102x + 900$. Знайти мінімум.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -5x^2 + 150x + 100$. Знайти максимум.
5. Для прямокутного перерізу $x + y = 68$. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 28

1. Координата точки задана $x(t) = 2t^3 - 42t^2 + 216t + 3$, $t \geq 0$. Дослідити функцію.
2. Швидкість задана $v(t) = -3t^2 + 66t + 6$, $0 \leq t \leq 22$. Знайти максимум.
3. Витрати матеріалу задано $M(x) = 2x^2 - 72x + 680$. Знайти мінімум.
4. Потужність задана $P(x) = -2x^2 + 64x + 90$. Знайти максимум.
5. Периметр пластини дорівнює 160сантиметрів. Визначити оптимальні розміри.

Варіант 29

1. Переміщення точки механізму задано $s(t) = t^3 - 36t^2 + 315t + 2$, $t \geq 0$. Дослідити функцію на монотонність і екстремуми.
2. Швидкість задана $v(t) = -t^2 + 32t + 7$, $0 \leq t \leq 32$. Визначити максимальну швидкість.
3. Навантаження задано $F(x) = x^2 - 36x + 350$. Визначити мінімальне навантаження.
4. Продуктивність задана $Q(x) = -3x^2 + 102x + 80$. Визначити максимальну продуктивність.

5. Для прямокутного перерізу механічного елемента виконується умова $x + y = 72$. Визначити розміри, за яких площа максимальна.

Варіант 30

1. Переміщення контрольної точки механізму задано функцією $s(t) = 2t^3 - 60t^2 + 390t + 4$, $t \geq 0$. Визначити критичні точки, проміжки зростання і спадання та точки екстремуму.
2. Швидкість ланки механізму задана функцією $v(t) = -2t^2 + 68t + 8$, $0 \leq t \leq 34$. Визначити момент досягнення максимальної швидкості та її значення.
3. Деформація механічного елемента залежить від параметра x за законом $\delta(x) = 2x^2 - 76x + 760$. Визначити значення параметра, за якого деформація мінімальна, та знайти мінімальне значення деформації.
4. Потужність механічної системи описується функцією $P(x) = -4x^2 + 136x + 100$. Визначити оптимальне значення режимного параметра та максимальну потужність.
5. Необхідно виготовити прямокутну металеву пластину з периметром 168 сантиметрів. Визначити довжину і ширину пластини, за яких її площа буде максимальною, та обчислити цю площу.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

Для кожної задачі необхідно записати повну умову, визначити область допустимих значень, скласти або використати задану функцію, знайти її похідну, визначити критичні точки, дослідити характер екстремуму, обчислити шукану величину та сформулювати професійний висновок.

Для задач на найбільше або найменше значення на відрізку необхідно перевіряти не тільки критичні точки, а й кінці заданого відрізка.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Максимальна кількість — **2 бали**.

2 бали — усі п'ять задач розв'язані правильно і повністю, похідні знайдені правильно, критичні точки визначені, характер екстремумів обґрунтований, результати перевірені та наведені професійні висновки.

1,5 бала — методи розв'язування обрані правильно, але допущені окремі обчислювальні або оформлювальні помилки.

1 бал — правильно виконана значна частина завдань, але є помилки під час дослідження функцій або визначення екстремумів.

0,5 бала — виконані лише окремі елементи завдання.

0 балів — завдання не виконане або основні методи теми не засвоєні.

Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти повинні засвоїти, що похідна в прикладній механіці є не лише математичним поняттям. Вона дає можливість досліджувати зміну механічних величин, визначати оптимальні режими роботи, знаходити максимальні та мінімальні значення параметрів і виконувати оптимізацію геометричних характеристик механічних елементів.

Особливо важливо розрізняти **математичне знаходження критичної точки та одержання професійно допустимого оптимального розв'язку**. Остаточний результат повинен задовольняти умови механічної задачі та область допустимих значень.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається критичною точкою функції?
2. Як знаходять критичні точки?
3. Яка ознака зростання функції?
4. Яка ознака спадання функції?
5. Що називається локальним максимумом?
6. Що називається локальним мінімумом?
7. Як за першою похідною визначити максимум?
8. Як за першою похідною визначити мінімум?
9. Як використовується друга похідна для дослідження екстремуму?
10. Що означає умова $f''(x_0) > 0$?
11. Що означає умова $f''(x_0) < 0$?
12. Як знайти найбільше значення функції на відрізку?
13. Як знайти найменше значення функції на відрізку?
14. Чому необхідно перевіряти кінці відрізка?

- 15.Що називається цільовою функцією?
- 16.Як визначити область допустимих значень у прикладній задачі?
- 17.Як складається математична модель оптимізаційної задачі?
- 18.Як знайти максимальну швидкість?
- 19.Як знайти максимальне переміщення?
- 20.Як визначити мінімальне навантаження?
- 21.Як визначити мінімальну деформацію?
- 22.Як визначити максимальну продуктивність?
- 23.Як визначити максимальну потужність?
- 24.Як знайти оптимальні геометричні розміри деталі?
- 25.Як мінімізувати витрати матеріалу?
- 26.Чому не кожна критична точка є оптимальним розв'язком?
- 27.Який механічний зміст має похідна переміщення?
- 28.Який механічний зміст має похідна швидкості?
- 29.Чому в професійній задачі необхідно вказувати одиниці вимірювання?
- 30.Чому отриманий математичний результат необхідно інтерпретувати з позиції прикладної механіки?

Домашнє завдання

Виконати свій варіант індивідуального завдання. Повністю оформити всі п'ять задач із записом похідних, критичних точок, дослідженням характеру екстремуму, необхідними перевітками та професійним висновком.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний

університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І. *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. *Математика в технічному університеті*. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка». Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.

Практичне заняття № 15

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 3

Змістовий модуль 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема: Рішення завдань за модулем 3

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Час: 2 години

Максимальна кількість балів: 4 бали

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань і практичних умінь із диференціального числення функції однієї змінної; перевірити вміння обчислювати границі функцій, знаходити похідні та диференціали, визначати критичні точки, проміжки зростання і спадання функції, знаходити точки максимуму та мінімуму, досліджувати функцію за допомогою похідних.

Перевірити здатність використовувати похідну для розв'язування професійно орієнтованих задач спеціальності G9 «Прикладна механіка», пов'язаних з оптимізацією геометричних параметрів механічних деталей, розмірів заготовок, переміщенням і швидкістю ланок механізмів, продуктивністю механічних систем, витратами матеріалу та іншими технічними параметрами.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.
3. Ознайомлення з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.

5. Самостійне виконання завдань.
6. Перевірка та оцінювання.
7. Аналіз типових помилок.
8. Підведення підсумків змістового модуля 3.

Зміст модульного контролю

Кожний варіант містить **сім завдань**, що повністю відповідає структурі практичного заняття № 15 у робочій програмі:

1. обчислення границі;
2. знаходження похідної;
3. обчислення диференціала;
4. визначення проміжків монотонності;
5. знаходження екстремумів;
6. дослідження функції;
7. професійно орієнтована задача на максимум або мінімум для спеціальності G9 «Прикладна механіка».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Обчислення границі.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Завдання 2. Знаходження похідної.

Знайти похідну функції

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

Завдання 3. Обчислення диференціала.

Знайти диференціал функції

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1.$$

Завдання 4. Проміжки монотонності.

Визначити проміжки зростання і спадання функції

$$y = x^2 - 6x + 5.$$

Завдання 5. Екстремуми.

Знайти точки екстремуму функції

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Завдання 6. Дослідження функції.

Дослідити за допомогою похідної функцію

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

Визначити область визначення, критичні точки, проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та виконати ескіз графіка.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Із прямокутної металевої заготовки необхідно сформувати відкритий короб. Після конструктивних вирізів об'єм короба залежить від параметра x за законом

$$V(x) = x(12 - 2x)(10 - 2x), \quad 0 < x < 5.$$

Визначити значення x , за якого об'єм деталі буде максимальним, та знайти максимальний об'єм.

Варіант 2**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 5x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки зростання і спадання:

$$y = x^2 - 8x + 7.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

за допомогою похідної та виконати ескіз графіка.

Завдання 7. Прямокутна пластина механічного вузла повинна мати площу 72 квадратних сантиметри. Її сторони дорівнюють x та $72/x$. Визначити розміри пластини, за яких її периметр буде найменшим.

Варіант 3

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

Завдання 2.

$$y = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 1.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = x^4 - 2x^2 + 3.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4. Дослідити на монотонність:

$$y = x^2 - 10x + 16.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 2.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 12x + 3$$

і побудувати ескіз графіка.

Завдання 7. Переміщення повзуна механізму описується функцією

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

де свимірюється в сантиметрах, t — у секундах. Визначити моменти зупинки повзуна та найбільше і найменше значення його координати на заданому проміжку.

Варіант 4

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 5.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності:

$$y = x^2 - 12x + 20.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 1.$$

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Завдання 7. Для виготовлення прямокутної рамки механічного пристрою використовується **40**сантиметрів профілю. Визначити довжину та ширину прямокутної рамки, за яких площа, обмежена рамкою, буде максимальною.

Варіант 5

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Завдання 2.

$$y = 3x^5 - 5x^3 + 7x^2 - 4.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 2x^4 - x^3 + 5x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4. Дослідити на монотонність:

$$y = x^2 - 4x - 5.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x + 3.$$

Завдання 6. Провести дослідження:

$$y = x^3 - 6x^2 + 5.$$

Завдання 7. Продуктивність механічного пристрою залежить від частоти робочих циклів n за моделлю

$$P(n) = -2n^2 + 40n + 100, 0 \leq n \leq 20.$$

Визначити значення n , за якого розрахункова продуктивність буде максимальною, та знайти це максимальне значення.

Варіант 6

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = x^4 + 3x^3 - 2x + 4.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності:

$$y = x^2 - 14x + 30.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2.$$

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 4.$$

Завдання 7. Прямокутна металева пластина повинна мати площу 98 квадратних сантиметрів. Сторони пластини дорівнюють x та $98/x$. Визначити їх значення, за яких периметр пластини буде мінімальним.

Варіант 7

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 2x^4 + 5x^3 - 4x + 6.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 16x + 15.$$

Визначити проміжки зростання та спадання.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 6.$$

Знайти точки екстремуму.

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x + 2.$$

Завдання 7. Координата робочої точки механізму змінюється за законом

$$s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Визначити швидкість точки, моменти її зупинки та найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку часу.

Варіант 8

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}.$$

Завдання 2.

$$y = 6x^4 - 4x^3 + 2x - 9.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 2x^5 - 3x^2 + 4x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 18x + 32.$$

Дослідити на монотонність.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 5.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 8.$$

Виконати дослідження функції.

Завдання 7. Із металевої смуги довжиною **48**сантиметрів виготовляють прямокутну рамку. Визначити розміри рамки, за яких площа внутрішньої частини буде максимальною.

Варіант 9**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 1.$$

Завдання 3.

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 20x + 36.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 15x^2 + 63x + 2.$$

У завданнях 2–5 відповідно знайти похідну, диференціал, проміжки монотонності та точки екстремуму.

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 6x^2 - 9x + 3.$$

Завдання 7. Витрати матеріалу на виготовлення серії механічних деталей умовно описуються функцією

$$M(x) = x^2 - 24x + 180, 0 \leq x \leq 24,$$

де x — значення регульованого технологічного параметра. Визначити значення x , за якого розрахункова витрата матеріалу мінімальна.

Варіант 10**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7.$$

Завдання 3.

$$y = 3x^5 - 2x^4 + x - 1.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 6x - 7.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 4.$$

У завданнях 2–5 виконати відповідно знаходження похідної, диференціала, дослідження монотонності та знаходження екстремумів.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 12x + 5.$$

Дослідити функцію та виконати ескіз графіка.

Завдання 7. Площа прямокутного поперечного перерізу елемента задається функцією

$$S(x) = x(20 - 2x), \quad 0 < x < 10.$$

Визначити значення x , за якого площа перерізу буде максимальною, та знайти максимальну площу.

Варіант 11**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 7x^4 - 2x^3 + 5x - 8.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = 2x^5 + x^3 - 6x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність:

$$y = x^2 - 8x - 9.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 6x^2 - 27x + 3.$$

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1.$$

Завдання 7. Із металевого профілю довжиною **56**сантиметрів необхідно виготовити прямокутну рамку для механічного вузла. Визначити довжину та ширину рамки, за яких її площа максимальна.

Варіант 12

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}.$$

Завдання 2.

$$y = 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 5.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 4x^4 - 3x^3 + 7x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 10x - 11.$$

Визначити проміжки монотонності.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x - 2.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 4.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Переміщення ланки механізму визначається законом

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t, \quad 0 \leq t \leq 6.$$

Визначити швидкість ланки, моменти її зупинки та найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку.

Варіант 13

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^4 + 2x^3 - 7x + 3.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = x^6 - 3x^4 + 5x^2.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 12x - 13.$$

Дослідити на монотонність.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 9x^2 + 18x + 7.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 5.$$

Провести дослідження.

Завдання 7. Прямокутна металева пластина має площу **128** квадратних сантиметрів. Визначити довжину і ширину пластини, за яких її периметр буде мінімальним.

Варіант 14

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 6x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 2.$$

Завдання 3.

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 5x + 1.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 14x - 15.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 15x^2 + 48x + 4.$$

У завданнях 2–5 відповідно знайти похідну, диференціал, проміжки монотонності та екстремуми.

Завдання 6. Дослідити

$$y = x^3 - 12x^2 + 27x + 2.$$

Завдання 7. Розрахункова продуктивність механічного обладнання залежить від параметра n :

$$P(n) = -3n^2 + 60n + 120, 0 \leq n \leq 20.$$

Знайти значення параметра, за якого продуктивність максимальна, та визначити максимальну продуктивність.

Варіант 15**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 5x - 36}{x - 4}.$$

Завдання 2.

$$y = 4x^6 - 3x^4 + 2x - 7.$$

Завдання 3.

$$y = 2x^5 + 3x^3 - x.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 16x - 17.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 12x^2 + 27x + 5.$$

Виконати відповідно знаходження похідної, диференціала, дослідження монотонності та знаходження екстремумів.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x + 6.$$

Виконати дослідження функції.

Завдання 7. Із прямокутної металевої заготовки виготовляють відкритий короб. Його об'єм залежить від параметра x :

$$V(x) = x(16 - 2x)(12 - 2x), \quad 0 < x < 6.$$

Визначити значення x , за якого об'єм максимальний.

Варіант 16

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 6x - 55}{x - 5}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 8x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 5.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = 5x^4 - 2x^3 + 4x.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність:

$$y = x^2 - 18x - 19.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 3.$$

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 9x^2 - 9x + 4.$$

Завдання 7. Прямокутна пластина механічного вузла має площу **162** квадратних сантиметри. Визначити її сторони, за яких довжина контуру пластини буде мінімальною.

Варіант 17

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 3x^5 + 4x^4 - 6x^2 + 1.$$

Завдання 3.

$$y = x^5 + 2x^4 - 3x^2.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 20x - 21.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 6x^2 - 63x + 4.$$

У завданнях 2–5 виконати відповідні операції: знайти похідну, диференціал, проміжки монотонності та екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Координата повзуна механізму змінюється за законом

$$s(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

Знайти швидкість повзуна, моменти зупинки та найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку.

Варіант 18**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^5 - 2x^4 + 6x^2 - 3.$$

Завдання 3.

$$y = 4x^5 - x^4 + 2x.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 22x + 40.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 12x^2 + 21x + 6.$$

Завдання 6.

$$y = x^3 - 6x^2 - 27x + 2.$$

Виконати відповідне дослідження за умовами завдань 2–6.

Завдання 7. Для виготовлення прямокутної рамки механічного пристрою виділено **64**сантиметри профілю. Визначити розміри рамки, за яких площа буде максимальною.

Варіант 19

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 7x^4 + 3x^3 - 5x + 2.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = 2x^6 - 4x^3 + 3x.$$

Завдання 4. Визначити проміжки монотонності:

$$y = x^2 - 24x + 44.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 12x^2 + 36x - 5.$$

Завдання 7. Розрахункові витрати матеріалу на виготовлення механічної деталі описуються функцією

$$M(x) = 2x^2 - 40x + 260, 0 \leq x \leq 20.$$

Визначити значення технологічного параметра x , за якого витрати мінімальні.

Варіант 20

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x - 5}.$$

Завдання 2.

$$y = 6x^5 - 4x^3 + 7x - 9.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 3x^5 + 2x^4 - 5x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 26x + 48.$$

Дослідити на монотонність.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 18x^2 + 72x + 2.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 3x^2 - 48x + 5.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Площа прямокутного поперечного перерізу механічного елемента описується залежністю

$$S(x) = x(24 - 2x), \quad 0 < x < 12.$$

Знайти значення x , за якого площа перерізу максимальна, та визначити максимальну площу.

Варіант 21

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 4x^5 + 6x^3 - 3x^2 + 5.$$

Завдання 3.

$$y = x^6 - 2x^5 + 4x^2.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 28x + 52.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 21x^2 + 108x + 3.$$

У завданнях 2–5 відповідно знайти похідну, диференціал, проміжки монотонності та точки екстремуму.

Завдання 6. Дослідити функцію

$$y = x^3 - 9x^2 - 24x + 6.$$

Завдання 7. Робоча точка механічної ланки рухається відповідно до закону

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

Визначити швидкість, моменти зупинки та найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку.

Варіант 22

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 1.$$

Завдання 3.

$$y = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 30x + 56.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 12x^2 - 45x + 2.$$

Завдання 6.

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 1.$$

Виконати відповідні завдання на похідну, диференціал, монотонність, екстремуми та дослідження функції.

Завдання 7. Для прямокутної металевої пластини задано площу **200** квадратних сантиметрів. Визначити її розміри, за яких периметр буде мінімальним.

Варіант 23

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 8x - 48}{x - 4}.$$

Завдання 2. Знайти похідну:

$$y = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 7.$$

Завдання 3. Знайти диференціал:

$$y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^2.$$

Завдання 4. Дослідити на монотонність:

$$y = x^2 - 32x + 60.$$

Завдання 5. Знайти екстремуми:

$$y = x^3 - 15x^2 - 24x + 5.$$

Завдання 6. Дослідити:

$$y = x^3 - 6x^2 - 39x + 4.$$

Завдання 7. Для виготовлення прямокутної рамки механічного вузла використовується 72 сантиметри металевого профілю. Визначити довжину та ширину рамки, за яких її площа буде максимальною.

Варіант 24

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 9x - 70}{x - 5}.$$

Завдання 2.

$$y = 8x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Завдання 3.

$$y = 3x^6 - x^4 + 4x.$$

Завдання 4.

$$y = x^2 - 34x + 64.$$

Завдання 5.

$$y = x^3 - 18x^2 + 45x + 7.$$

Завдання 6.

$$y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5.$$

Виконати відповідні операції згідно зі структурою модульного контролю.

Завдання 7. Розрахункова продуктивність механічного пристрою описується функцією

$$P(n) = -4n^2 + 96n + 200, 0 \leq n \leq 24.$$

Визначити значення параметра n , за якого продуктивність максимальна, та знайти максимальне значення.

Варіант 25

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 6x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 4.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 36x + 68.$$

Визначити проміжки зростання та спадання.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 21x^2 + 120x + 2.$$

Знайти точки екстремуму.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 15x^2 + 36x + 3.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Відкрита прямокутна ємність формується з металевої заготовки. Її об'єм залежить від параметра x :

$$V(x) = x(18 - 2x)(14 - 2x), \quad 0 < x < 7.$$

Визначити значення x , за якого об'єм максимальний.

Варіант 26

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x - 3}.$$

Завдання 2.

$$y = 7x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 8.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 2x^6 + 3x^4 - 5x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 38x + 72.$$

Дослідити на монотонність.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 24x^2 + 135x + 1.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 9x^2 - 39x + 2.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Координата рухомої ланки механізму задана функцією

$$s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Визначити швидкість ланки, моменти зупинки, а також найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку.

Варіант 27**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x - 4}.$$

Завдання 2.

$$y = 4x^6 + 5x^3 - 2x^2 + 6.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 40x + 76.$$

Визначити проміжки монотонності.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 18x^2 - 27x + 4.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 12x^2 - 45x + 1.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Прямокутна пластина механічного вузла має площу **242** квадратних сантиметри. Визначити довжину і ширину пластини, за яких її периметр буде мінімальним.

Варіант 28**Завдання 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x - 5}.$$

Завдання 2.

$$y = 9x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 4x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 42x + 80.$$

Дослідити на монотонність.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 27x^2 + 180x + 5.$$

Знайти екстремуми.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 15x^2 - 24x + 4.$$

Дослідити функцію.

Завдання 7. Для виготовлення прямокутної рамки механічного пристрою використовується **80**сантиметрів профілю. Визначити розміри рамки, за яких площа, обмежена профілем, буде максимальною.

Варіант 29

Завдання 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x - 2}.$$

Завдання 2.

$$y = 5x^6 + 3x^5 - 4x^3 + 2.$$

Знайти похідну.

Завдання 3.

$$y = 6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4x.$$

Знайти диференціал.

Завдання 4.

$$y = x^2 - 44x + 84.$$

Визначити проміжки зростання та спадання.

Завдання 5.

$$y = x^3 - 24x^2 + 144x + 3.$$

Знайти точки екстремуму.

Завдання 6.

$$y = x^3 - 18x^2 + 45x + 6.$$

Виконати дослідження функції.

Завдання 7. Розрахункові витрати матеріалу на виготовлення механічного елемента задаються функцією

$$M(x) = 3x^2 - 72x + 500, 0 \leq x \leq 24.$$

Визначити значення регульованого параметра x , за якого витрати матеріалу будуть мінімальними, та знайти мінімальне значення функції.

Варіант 30

Завдання 1. Обчислення границі.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x - 33}{x - 3}.$$

Завдання 2. Знаходження похідної.

Знайти похідну функції

$$y = 8x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 7x + 4.$$

Завдання 3. Обчислення диференціала.

Знайти диференціал функції

$$y = 5x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 6x.$$

Завдання 4. Проміжки монотонності.

Визначити проміжки зростання та спадання функції

$$y = x^2 - 46x + 88.$$

Завдання 5. Екстремуми.

Знайти точки максимуму та мінімуму функції

$$y = x^3 - 30x^2 + 243x + 2.$$

Завдання 6. Дослідження функції.

Дослідити за допомогою похідної функцію

$$y = x^3 - 21x^2 + 108x + 5.$$

Визначити область визначення, критичні точки, проміжки зростання і спадання, точки екстремуму та виконати ескіз графіка.

Завдання 7. Професійно-орієнтована задача.

Переміщення робочої точки механізму задається залежністю

$$s(t) = t^3 - 15t^2 + 54t, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

де s — координата точки в сантиметрах, t — час у секундах. Визначити функцію швидкості точки, моменти її зупинки, проміжки руху в додатному та від'ємному напрямках, а також найбільше і найменше значення координати на заданому проміжку часу.

Вимоги до виконання модульного контролю

Здобувач освіти повинен виконувати завдання послідовно, записуючи необхідні формули, математичні перетворення, проміжні обчислення та остаточну відповідь.

Під час дослідження функції необхідно визначити область визначення, знайти похідну, критичні точки, установити знак похідної на відповідних проміжках, визначити проміжки зростання та спадання, установити наявність максимумів і мінімумів та виконати ескіз графіка.

У професійно орієнтованому завданні необхідно:

- скласти математичну модель або використати задану залежність;
- визначити область допустимих значень параметра;
- знайти похідну;
- визначити критичні значення;
- перевірити характер екстремуму;
- записати числовий результат;
- надати коротке пояснення отриманого результату в контексті прикладної механіки.

Критерії оцінювання модульного контролю № 3

Максимальна кількість балів — 4 бали.

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
1	Обчислення границі функції	0,50
2	Знаходження похідної	0,50
3	Обчислення диференціала	0,50
4	Визначення проміжків монотонності	0,50
5	Знаходження екстремумів	0,50
6	Дослідження функції	0,75
7	Професійно орієнтована задача на максимум або мінімум для прикладної механіки	0,75
Разом		4,00

Повний бал за завдання виставляється за правильний вибір методу, правильне застосування формул, послідовне виконання математичних перетворень, правильні обчислення та обґрунтовану відповідь.

У завданні 7 додатково оцінюється правильність використання похідної для визначення оптимального значення технічного або геометричного параметра та змістовне трактування отриманого результату стосовно задачі прикладної механіки.

Типові помилки

Під час виконання модульного контролю необхідно звернути увагу на такі помилки: неправильне розкриття невизначеності під час обчислення границі; помилки під час диференціювання степеневої та складеної функції; відсутність множника dx під час запису диференціала; ототожнення критичної точки з точкою екстремуму без дослідження знака похідної; неправильне визначення проміжків зростання і спадання; ігнорування області допустимих значень у прикладній задачі; знаходження критичної точки без перевірки того, чи відповідає вона максимуму або мінімуму; відсутність змістовної відповіді з одиницями вимірювання у професійній задачі.

Підведення підсумків

Модульний контроль № 3 дає змогу перевірити не лише техніку обчислення границь і похідних, а й здатність здобувача освіти застосовувати диференціальне числення до аналізу функціональних залежностей та оптимізаційних задач.

Для спеціальності **G9 «Прикладна механіка»** професійна складова сформована через задачі на геометричну оптимізацію деталей і заготовок, мінімізацію витрат матеріалу, максимізацію геометричних параметрів, аналіз переміщення та швидкості механічних ланок і оптимізацію розрахункової продуктивності механічних систем. Це є адаптацією професійної частини під G9, тоді як математична структура з семи видів завдань збережена відповідно до робочої програми.

Домашнє завдання

Оскільки практичне заняття № 15 є підсумковим модульним контролем, окреме індивідуальне домашнє завдання на 2 бали не встановлюється.

Здобувачам освіти після перевірки роботи необхідно проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні теми змістового модуля 3 та повторно виконати завдання, у яких були допущені помилки, з повним записом розв'язання.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення* : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. *Математика в технічному університеті. Том 2*. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка»*. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.

Практичне заняття № 16

Тема: Обчислення невизначених інтегралів

Мета

Закріпити теоретичні знання про первісну та невизначений інтеграл; сформулювати практичні вміння знаходити невизначені інтеграли за допомогою таблиці основних інтегралів і властивостей невизначеного інтеграла; навчитися застосовувати безпосереднє інтегрування, попередні алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами; удосконалити навички перевірки результату інтегрування за допомогою диференціювання; формувати вміння правильно й послідовно оформлювати розв'язання.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 16 входить до змістового модуля 4 «Інтегральне числення функції однієї змінної» і має тему «Обчислення невизначених інтегралів». Воно спирається на самостійну роботу «Первісна та невизначений інтеграл» і лекцію «Основні методи інтегрування».

Оснащення: опорні конспекти, конспект лекції з теми «Основні методи інтегрування», таблиця основних невизначених інтегралів, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування)

1. Що називається первісною функцією?
2. Яка функція називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку?
3. Скільки первісних може мати одна функція?
4. Чим відрізняються дві первісні однієї і тієї самої функції?
5. Що називається невизначеним інтегралом?
6. Як позначається невизначений інтеграл?
7. Що називається підінтегральною функцією?
8. Що називається підінтегральним виразом?
9. Що означає символ dx ?

10. Що означає стала C у записі невизначеного інтеграла?
11. Чому під час знаходження невизначеного інтеграла необхідно записувати довільну сталу?
12. Який зв'язок існує між операціями диференціювання та інтегрування?
13. Як можна перевірити правильність знаходження невизначеного інтеграла?
14. Сформулюйте властивість інтегрування суми функцій.
15. Сформулюйте властивість інтегрування різниці функцій.
16. Чи можна сталий множник винести за знак інтеграла?
17. Чому дорівнює $\int x^n dx$?
18. За якої умови застосовується формула інтегрування степеневих функцій?
19. Чому випадок $n = -1$ розглядається окремо?
20. Чому дорівнює $\int \frac{dx}{x}$?
21. Чому дорівнює $\int e^x dx$?
22. Чому дорівнює $\int \sin x dx$?
23. Чому дорівнює $\int \cos x dx$?
24. У чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
25. У чому полягає метод заміни змінної?
26. У яких випадках доцільно застосовувати заміну змінної?
27. У чому полягає метод інтегрування частинами?
28. Якою формулою виражається інтегрування частинами?
29. Як правильно вибрати u та dv під час інтегрування частинами?
30. Якої послідовності дій доцільно дотримуватися під час обчислення невизначеного інтеграла?

Короткі теоретичні відомості

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для кожного x цього проміжку виконується:

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо $F(x)$ є однією з первісних функцій $f(x)$, то множина всіх її первісних має вигляд:

$$F(x) + C,$$

де C — довільна стала.

Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається множина всіх первісних цієї функції:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Під час виконання практичних завдань обов'язково необхідно пам'ятати про довільну сталу C .

Основні формули інтегрування

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Розв'язування прикладів

1. Обчислити невизначений інтеграл степеневої функції

Приклад

Обчислити:

$$\int x^5 dx.$$

Розв'язання

Застосуємо формулу:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

У нашому випадку:

$$n = 5.$$

Тоді:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C.$$

Отже:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Перевірка

Знайдемо похідну отриманої первісної:

$$\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію. Отже, інтеграл обчислено правильно.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^6}{6} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int x^7 dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x^9 dx.$$

2. Обчислити інтеграл від суми степеневих функцій

Приклад

Обчислити:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивість лінійності невизначеного інтеграла:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4) dx = 3 \int x^4 dx - 2 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 4 \int dx.$$

Обчислимо кожний інтеграл:

$$3 \int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5};$$

$$-2 \int x^2 dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3};$$

$$5 \int x dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$-4 \int dx = -4x.$$

Отже:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 4) dx = \frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C.$$

Перевірка

Диференціюємо отриманий результат:

$$\left(\frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C \right)' = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 4.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\boxed{\frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int (2x^3 + 4x^2 - 3x + 6) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int (5x^4 - 3x^3 + 2x - 7) dx.$$

3. Обчислити інтеграл після попереднього перетворення підінтегральної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx.$$

Розв'язання

Перед інтегруванням спростимо підінтегральний вираз:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} = x^2 + 2x - 3, \quad x \neq 0.$$

Тому:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx = \int (x^2 + 2x - 3) dx.$$

Застосуємо табличні формули:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$2 \int x dx = x^2,$$

$$-3 \int dx = -3x.$$

Отже:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C \right)' = x^2 + 2x - 3.$$

А для $x \neq 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \frac{x^4 + 3x^2}{x} dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \frac{2x^5 - x^3 + 4x}{x} dx.$$

4. Обчислити інтеграл із дробовими та від'ємними показниками степеня

Приклад

Обчислити:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Розв'язання

Перетворимо підінтегральну функцію до степеневого вигляду:

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

$$\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}.$$

Тому:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \int (x^{1/2} + 2x^{-2}) dx.$$

Інтегруємо кожний доданок:

$$\begin{aligned} \int x^{1/2} dx &= \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2}; \\ 2 \int x^{-2} dx &= 2 \frac{x^{-1}}{-1} = -2x^{-1}. \end{aligned}$$

Отже:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{x} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{-1} + C \right)' = x^{1/2} + 2x^{-2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{x} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{4}{x^3} \right) dx.$$

5. Обчислити інтеграл, що містить функцію $\frac{1}{x}$

Приклад

Обчислити:

$$\int \left(2x^3 + \frac{5}{x} \right) dx.$$

Розв'язання

Розділимо інтеграл:

$$\int \left(2x^3 + \frac{5}{x} \right) dx = 2 \int x^3 dx + 5 \int \frac{dx}{x}.$$

Використаємо формули:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Отже:

$$2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \ln |x| + C.$$

Після спрощення:

$$\frac{x^4}{2} + 5 \ln |x| + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{x^4}{2} + 5 \ln |x| + C \right)' = 2x^3 + \frac{5}{x}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{x^4}{2} + 5 \ln |x| + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x} \right) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \left(5x^4 - \frac{2}{x} \right) dx.$$

6. Обчислити інтеграл від тригонометричних функцій

Приклад

Обчислити:

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивості невизначеного інтеграла:

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \int \cos x dx - 2 \int \sin x dx.$$

З таблиці інтегралів:

$$\int \cos x dx = \sin x ,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x .$$

Отже:

$$3 \sin x - 2(-\cos x) + C.$$

Тому:

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \sin x + 2 \cos x + C.$$

Перевірка

$$(3 \sin x + 2 \cos x + C)' = 3 \cos x - 2 \sin x .$$

Відповідь:

$$\boxed{3 \sin x + 2 \cos x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int (4 \cos x + 5 \sin x) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int (7 \sin x - 3 \cos x) dx.$$

Метод заміни змінної

Метод заміни змінної доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральний вираз містить складену функцію та множник, пов'язаний із похідною її внутрішньої функції.

Якщо:

$$u = \varphi(x),$$

то:

$$du = \varphi'(x) dx.$$

Після заміни інтеграл зводиться до простішого табличного інтеграла.

7. Обчислити інтеграл методом заміни змінної

Приклад

Обчислити:

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx.$$

Розв'язання

У підінтегральному виразі міститься складена функція:

$$(x^2 + 3)^4.$$

Виконаємо заміну:

$$u = x^2 + 3.$$

Знайдемо диференціал:

$$du = 2x dx.$$

У початковому інтегралі присутній множник $2x dx$, тому:

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \int u^4 du.$$

Використаємо формулу степеневого інтеграла:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C.$$

Повернемося до змінної x :

$$\frac{(x^2 + 3)^5}{5} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{(x^2 + 3)^5}{5} \right)' = \frac{1}{5} \cdot 5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x.$$

Отже:

$$\left(\frac{(x^2 + 3)^5}{5} \right)' = 2x(x^2 + 3)^4.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{(x^2 + 3)^5}{5} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int 2x(x^2 + 1)^3 dx.$$

2. Обчислити:

$$\int 3x^2(x^3 + 2)^4 dx.$$

8. Обчислити інтеграл методом заміни змінної

Приклад

Обчислити:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = x^2 + 5.$$

Тоді:

$$du = 2x dx.$$

Отже:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \int \frac{du}{u}.$$

Застосуємо табличну формулу:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

Тому:

$$\ln |u| + C.$$

Оскільки:

$$u = x^2 + 5 > 0,$$

можемо записати:

$$\ln(x^2 + 5) + C.$$

Перевірка

$$(\ln(x^2 + 5))' = \frac{2x}{x^2 + 5}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\ln(x^2 + 5) + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx.$$

9. Обчислити інтеграл від показникової складеної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int e^{3x+2} dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = 3x + 2.$$

Тоді:

$$du = 3 dx.$$

Звідси:

$$dx = \frac{1}{3} du.$$

Підставимо:

$$\int e^{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int e^u du.$$

Використаємо табличний інтеграл:

$$\int e^u du = e^u + C.$$

Тому:

$$\frac{1}{3}e^u + C.$$

Повертаємося до змінної x :

$$\frac{1}{3}e^{3x+2} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{1}{3}e^{3x+2}\right)' = \frac{1}{3}e^{3x+2} \cdot 3 = e^{3x+2}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{3}e^{3x+2} + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int e^{2x-1} dx.$$

2. Обчислити:

$$\int e^{5x+3} dx.$$

10. Обчислити інтеграл від тригонометричної складеної функції

Приклад

Обчислити:

$$\int \cos(4x - 1) dx.$$

Розв'язання

Виконаємо заміну:

$$u = 4x - 1.$$

Тоді:

$$du = 4 dx,$$

звідки:

$$dx = \frac{1}{4} du.$$

Отже:

$$\int \cos(4x - 1) dx = \frac{1}{4} \int \cos u du.$$

За таблицею інтегралів:

$$\int \cos u du = \sin u + C.$$

Отже:

$$\frac{1}{4} \sin u + C.$$

Повернемося до початкової змінної:

$$\frac{1}{4} \sin(4x - 1) + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{1}{4} \sin(4x - 1) \right)' = \frac{1}{4} \cos(4x - 1) \cdot 4 = \cos(4x - 1).$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{1}{4} \sin(4x - 1) + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \cos(3x + 2) dx.$$

2. Обчислити:

$$\int \sin(5x - 1) dx.$$

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами застосовують, зокрема, для інтегралів від добутків функцій, коли безпосереднє застосування таблиці інтегралів неможливе або незручне.

Формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}.$$

Необхідно правильно вибрати функцію u та вираз dv , після чого знайти du та v .

11. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int x e^x \, dx.$$

Розв'язання

Виберемо:

$$\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= e^x \, dx. \end{aligned}$$

Тоді:

$$du = dx,$$

а

$$v = \int e^x \, dx = e^x.$$

Застосуємо формулу:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Отже:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx.$$

Маємо:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + C.$$

Винесемо e^x за дужки:

$$e^x(x - 1) + C.$$

Перевірка

$$[e^x(x-1)]' = e^x(x-1) + e^x = xe^x.$$

Відповідь:

$$\boxed{e^x(x-1) + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int x e^{2x} dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x e^{3x} dx.$$

12. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int x \cos x \, dx.$$

Розв'язання

Виберемо:

$$u = x,$$

$$dv = \cos x \, dx.$$

Тоді:

$$du = dx,$$

$$v = \sin x.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx.$$

Оскільки:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x,$$

одержимо:

$$x \sin x + \cos x + C.$$

Перевірка

$$(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$$

Відповідь:

$$\boxed{x \sin x + \cos x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int x \sin x \, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x \cos 2x \, dx.$$

13. Обчислити інтеграл методом інтегрування частинами

Приклад

Обчислити:

$$\int \ln x \, dx.$$

Розв'язання

Запишемо:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Виберемо:

$$u = \ln x,$$

$$dv = dx.$$

Тоді:

$$du = \frac{dx}{x},$$

$$v = x.$$

За формулою інтегрування частинами:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}.$$

Спростимо:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx.$$

Отже:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$$

Перевірка

$$(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

Відповідь:

$$\boxed{x \ln x - x + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчислити:

$$\int \ln(2x) \, dx.$$

2. Обчислити:

$$\int x \ln x \, dx.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Обчисліть методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) \, dx;$$

2.

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) \, dx;$$

3.

$$\int \left(5x^4 + \frac{3}{x} \right) \, dx.$$

2. Обчисліть інтеграли від тригонометричних та показникових функцій:

$$\int (2 \cos x + 3 \sin x) dx;$$

2.

$$\int e^{4x} dx;$$

3.

$$\int \sin(3x) dx.$$

3. Обчисліть методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 4)^5 dx;$$

2.

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 5} dx;$$

3.

$$\int e^{5x-2} dx.$$

4. Обчисліть методом інтегрування частинами:

$$\int x e^x dx;$$

2.

$$\int x \sin x dx;$$

3.

$$\int x \cos x dx;$$

4.

$$\int \ln x dx.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- розуміти поняття первісної функції;
- розуміти зміст невизначеного інтеграла;
- правильно використовувати довільну сталу C ;
- користуватися таблицею основних невизначених інтегралів;
- застосовувати властивість лінійності невизначеного інтеграла;
- виносити сталий множник за знак інтеграла;
- виконувати попередні алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу;
- застосовувати формулу інтегрування степеневі функції;
- інтегрувати показникові та тригонометричні функції;
- правильно обирати метод інтегрування;
- застосовувати метод заміни змінної;
- виконувати заміну та правильно повертатися до початкової змінної;
- застосовувати метод інтегрування частинами;
- правильно визначати u , dv , du і v ;
- перевіряти отриману первісну диференціюванням;
- правильно та послідовно оформлювати розв'язання.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття первісної функції.
2. Основна властивість первісної.
3. Поняття невизначеного інтеграла.
4. Позначення невизначеного інтеграла.
5. Підінтегральна функція та підінтегральний вираз.
6. Довільна стала інтегрування.
7. Властивість лінійності невизначеного інтеграла.
8. Таблиця основних невизначених інтегралів.
9. Інтегрування степеневі функції.

- 10.Інтегрування функції $\frac{1}{x}$.
- 11.Інтегрування показникових функцій.
- 12.Інтегрування тригонометричних функцій.
- 13.Метод безпосереднього інтегрування.
- 14.Попереднє перетворення підінтегральної функції.
- 15.Метод заміни змінної.
- 16.Вибір нової змінної.
- 17.Знаходження диференціала нової змінної.
- 18.Повернення до початкової змінної після інтегрування.
- 19.Метод інтегрування частинами.
- 20.Формула інтегрування частинами.
- 21.Правила вибору u та dv .
- 22.Перевірка результату інтегрування диференціюванням.
- 23.Зв'язок між диференціюванням та інтегруванням.
- 24.Послідовність обчислення невизначеного інтеграла.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал самостійної роботи «Первісна та невизначений інтеграл» і лекції 14 «Основні методи інтегрування». Повторити таблицю основних невизначених інтегралів, правила безпосереднього інтегрування, метод заміни змінної та метод інтегрування частинами.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить **п'ять повністю сформульованих завдань різної складності**. Біля порядкових номерів завдань кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання наведено після всіх варіантів.

Варіант 1

1. Обчислити невизначений інтеграл, використовуючи таблицю основних інтегралів:

$$\int (3x^4 - 2x^2 + 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, попередньо виконавши необхідні алгебраїчні перетворення:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної тригонометричної функції:

$$\int \cos(3x + 1) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^x dx.$$

Варіант 2

1. Обчислити невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (5x^3 - 4x + 2) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної показникової функції:

$$\int e^{2x+3} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos x dx.$$

Варіант 3

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^5 - 3x^3 + 2x) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2(x^3 + 2)^5 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(4x - 1) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin x dx.$$

Варіант 4

1. Обчислити невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\int (2x^6 - 5x^2 + 3x - 4) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, подавши корінь у вигляді степеня:

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{4}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 5} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{4x-2} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int \ln x dx.$$

Варіант 5

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^4 - 2x^3 + x - 6) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5x^2 + \frac{3}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 1)^6 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(5x + 2) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{2x} dx.$$

Варіант 6

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^5 - 4x^2 + 7) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x}{2x^2 + 3} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(3x + 4) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 2x dx.$$

Варіант 7

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^3 - 5x^2 + 4x - 1) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3x^4 - \frac{2}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4x^3(x^4 + 2)^3 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{5x+1} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 2x dx.$$

Варіант 8

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^6 - 2x^4 + x^2 - 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 3} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos (6x - 3) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{3x} dx.$$

Варіант 9

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^4 - 3x^2 + 2x + 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6x^3 + \frac{4}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2(x^3 + 4)^2 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(7x - 2) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 3x dx.$$

Варіант 10

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^5 - 3x^3 + 4x - 2) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{6}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 7} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{3x-5} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 3x dx.$$

Варіант 11

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^4 + 7x^3 - 3x + 4) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2x^5 + \frac{5}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 6)^3 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(2x + 5) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{4x} dx.$$

Варіант 12

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^6 - x^4 + 2x^2 - 3) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5\sqrt{x} - \frac{3}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 8} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{6x+2} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 4x dx.$$

Варіант 13

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^3 - 5x + 6) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4x^2 - \frac{3}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4x^3(x^4 + 5)^4 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(8x + 1) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 4x dx.$$

Варіант 14

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^5 + 2x^3 - 4x + 7) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 2} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(7x - 4) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{5x} dx.$$

Варіант 15

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^4 - 3x^3 + 2x - 8) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7x^4 + \frac{2}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 5x^4(x^5 + 1)^3 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{2x-7} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 5x dx.$$

Варіант 16

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^5 - 2x^2 + 3x - 4) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{4}{x^4} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 6} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin (9x - 3) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 5x dx.$$

Варіант 17

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^6 - 4x^3 + x - 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3x^2 + \frac{6}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 8)^5 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(4x + 7) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{6x} dx.$$

Варіант 18

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^4 + 3x^2 - 6x + 1) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 7} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{7x-1} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 6x dx.$$

Варіант 19

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^3 - 2x^2 + 4x - 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(8x^3 - \frac{5}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2(x^3 + 9)^4 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(5x + 6) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 6x dx.$$

Варіант 20

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^7 - 5x^4 + 3x^2 - 6) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 10} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(8x - 5) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{7x} dx.$$

Варіант 21

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (7x^5 + 2x^3 - 5x + 3) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5x^2 + \frac{7}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4x^3(x^4 + 3)^5 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{8x+4} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 7x dx.$$

Варіант 22

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (3x^6 - 7x^2 + 2x + 4) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(5\sqrt{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 11} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(6x - 7) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 7x dx.$$

Варіант 23

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^4 + 4x^3 - 2x + 9) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(6x^4 - \frac{4}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 5x^4(x^5 + 2)^4 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(9x + 2) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{8x} dx.$$

Варіант 24

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (6x^5 - x^3 + 3x^2 - 2) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7\sqrt{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 8} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{9x-3} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 8x dx.$$

Варіант 25

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (10x^3 - 4x^2 + 3x - 7) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(4x^5 + \frac{8}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 2x(x^2 + 12)^3 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin(10x + 1) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 8x dx.$$

Варіант 26

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (4x^7 - 3x^5 + 2x - 1) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{6}{x^4} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{4x^3}{x^4 + 9} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(10x - 6) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{9x} dx.$$

Варіант 27

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (8x^4 - 6x^2 + x + 5) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(9x^3 - \frac{3}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2(x^3 + 6)^5 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int e^{10x+1} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 9x dx.$$

Варіант 28

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (2x^6 + 5x^4 - 3x + 8) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(8\sqrt{x} + \frac{5}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{5x^4}{x^5 + 10} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \sin (11x - 5) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \sin 9x dx.$$

Варіант 29

1. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (9x^5 - 5x^3 + 4x - 6) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(7x^2 + \frac{9}{x} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 4x^3(x^4 + 7)^3 dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \cos(11x + 4) dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x e^{10x} dx.$$

Варіант 30

1. Обчислити невизначений інтеграл, застосувавши властивості невизначеного інтеграла та табличні формули:

$$\int (5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 7) dx.$$

2. Обчислити невизначений інтеграл, попередньо подавши корінь і дробовий вираз у степеневій формі:

$$\int \left(6\sqrt{x} - \frac{7}{x^3} \right) dx.$$

3. Обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 15} dx.$$

4. Обчислити невизначений інтеграл від складеної показникової функції:

$$\int e^{12x-5} dx.$$

5. Обчислити невизначений інтеграл методом інтегрування частинами:

$$\int x \cos 10x dx.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Безпосереднє інтегрування із застосуванням таблиці основних інтегралів	0,25
2	Інтегрування після попередніх алгебраїчних перетворень	0,25
3	Обчислення невизначеного інтеграла методом заміни змінної	0,50
4	Інтегрування складеної показникової або тригонометричної функції	0,50
5	Обчислення невизначеного інтеграла методом інтегрування частинами	0,50
Разом		2,00
2,00 бали		

Усі п'ять завдань виконано правильно та повністю. Правильно визначено метод обчислення кожного невизначеного інтеграла. Здобувач освіти правильно застосовує таблицю основних інтегралів, властивості невизначеного інтеграла, виконує необхідні алгебраїчні перетворення, правильно здійснює заміну змінної, застосовує метод інтегрування частинами, у всіх відповідях записує довільну сталу C . Розв'язання математично обґрунтовані та послідовно оформлені.

1,50–1,75 бала

Основні способи інтегрування засвоєно правильно. Здобувач освіти правильно вибирає метод інтегрування, але допускає окремі незначні арифметичні або алгебраїчні помилки, неточності під час заміни змінної чи спрощення отриманого результату. Загальний хід розв'язання правильний.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання базового рівня та частину завдань достатнього рівня. Здобувач освіти користується таблицею інтегралів, але допускає помилки під час застосування методу заміни змінної або інтегрування частинами. Можливі окремі випадки пропуску довільної сталої C .

0,50–0,75 бала

Здобувач освіти виконує лише найпростіші табличні інтеграли, але має труднощі з вибором способу інтегрування, заміною змінної та застосуванням формули інтегрування частинами. У розв'язаннях наявні суттєві математичні помилки.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння поняття невизначеного інтеграла та не володіє основними методами його обчислення.

Література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
3. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
4. Качаєнко О. Б., Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І. *Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Збірник задач до розрахункової роботи та приклади розв'язування типових задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння:*

Збірник індивідуальних завдань : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.

6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 16 — **«Обчислення невизначених інтегралів».**

Практичне заняття № 17

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення функції однієї змінної

Тема: Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години

Мета

Закріпити знання про визначений інтеграл, його геометричний та фізичний зміст, формулу Ньютона-Лейбніца; сформувати вміння застосовувати визначений інтеграл для обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл обертання, шляху за відомим законом зміни швидкості та роботи змінної сили.

Сформувати вміння застосовувати інтегральне числення під час розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки, пов'язаних із визначенням площі профілю деталі, об'єму тіла або заготовки, переміщення механічних ланок, роботи змінних сил, пружних елементів та інших механічних характеристик.

Розвивати вміння переходити від фізичної або геометричної моделі механічного процесу до математичної моделі, правильно встановлювати межі інтегрування, складати підінтегральну функцію, виконувати обчислення та пояснювати фізичний зміст одержаного результату.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекцій з інтегрального числення, навчальні посібники, картки з професійно орієнтованими завданнями, схеми механічних деталей та механізмів, калькулятор, креслярське приладдя, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети практичного заняття.

4. Мотивація навчальної діяльності.
5. Актуалізація опорних знань.
6. Повторення формули Ньютона-Лейбніца.
7. Обчислення площ плоских фігур.
8. Обчислення об'ємів тіл обертання.
9. Визначення шляху за відомою швидкістю руху.
10. Обчислення роботи змінної сили.
11. Розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки.
12. Самостійне виконання завдань.
13. Аналіз типових помилок.
14. Підведення підсумків практичного заняття.
15. Повідомлення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Який геометричний зміст має визначений інтеграл?
3. Який фізичний зміст може мати визначений інтеграл?
4. Що називають нижньою межею інтегрування?
5. Що називають верхньою межею інтегрування?
6. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
7. Що називається первісною функції?
8. Чим визначений інтеграл відрізняється від невизначеного?
9. Чи записується стала інтегрування під час обчислення визначеного інтеграла?
10. Як змінюється знак інтеграла при перестановці меж інтегрування?
11. Як обчислюється площа криволінійної трапеції?
12. Як визначити площу фігури між двома графіками?
13. Як встановити точки перетину двох кривих?
14. Як обчислюється об'єм тіла обертання навколо осі абсцис?

- 15.Що необхідно визначити перед складанням інтеграла для об'єму?
- 16.Як пов'язані швидкість і шлях?
- 17.Як знайти переміщення за відомою функцією швидкості?
- 18.Коли переміщення і пройдений шлях збігаються?
- 19.Що необхідно враховувати, якщо швидкість змінює знак?
- 20.Як визначається робота сталої сили?
- 21.Як визначається робота змінної сили?
- 22.Який фізичний зміст має інтеграл від сили за переміщенням?
- 23.У яких одиницях вимірюється механічна робота?
- 24.У яких одиницях вимірюється шлях?
- 25.У яких одиницях вимірюється об'єм?
- 26.Чому межі інтегрування повинні мати фізичний зміст?
- 27.Як перевірити правильність одиниць отриманого результату?
- 28.Де в прикладній механіці застосовується визначений інтеграл?
- 29.Як визначений інтеграл використовується під час дослідження руху механізмів?
- 30.Як визначений інтеграл використовується під час розрахунку роботи змінного навантаження?

Короткі теоретичні відомості

Для обчислення визначеного інтеграла використовується формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — первісна функції $f(x)$.

Площа криволінійної трапеції за умови $f(x) \geq 0$:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площа фігури між графіками $y = f(x)$ та $y = g(x)$, якщо $f(x) \geq g(x)$:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо осі абсцис:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Якщо швидкість руху $v(t)$ невід'ємна на всьому проміжку, пройдений шлях:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Робота змінної сили $F(x)$, напрямленої вздовж переміщення:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Такі геометричні й механічні застосування визначеного інтеграла безпосередньо представлені у навчальній літературі з вищої математики; зокрема, визначений інтеграл використовується для обчислення площ, довжин, об'ємів і розв'язування прикладних технічних задач.

Розв'язування професійно орієнтованих прикладів

Приклад 1. Площа профілю механічної деталі

Верхня межа плоского профілю деталі описується функцією

$$y = 2x + 1,$$

а нижня межа збігається з віссю абсцис. Визначити площу частини профілю на проміжку $0 \leq x \leq 3$.

Розв'язання

Функція на заданому проміжку невід'ємна, тому:

$$S = \int_0^3 (2x + 1) dx.$$

Знайдемо первісну:

$$\int (2x + 1) dx = x^2 + x.$$

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$S = (x^2 + x) \big|_0^3.$$

$$S = (9 + 3) - (0 + 0) = 12.$$

Відповідь

$$S = 12 \text{ см}^2.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Профіль плоскої деталі обмежений графіком $y = 3x + 2$, віссю абсцис і прямими $x = 0$, $x = 2$. Визначити площу профілю.

1.2. Верхня межа профілю пластини задана функцією $y = x^2 + 1$. Визначити площу профілю на проміжку $0 \leq x \leq 2$.

Приклад 2. Площа матеріалу між двома контурами

Контури плоскої деталі описуються функціями

$$y_1 = 4x, y_2 = x^2.$$

Визначити площу між контурами.

Розв'язання

Знайдемо точки перетину:

$$4x = x^2.$$

$$x(x - 4) = 0.$$

Отже,

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

На проміжку $[0; 4]$ верхньою функцією є $y = 4x$.

Тому:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx.$$

$$S = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4.$$

$$S = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь

$$S = \frac{32}{3} \text{ см}^2.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Межі профілю деталі задані функціями $y = 3x$ та $y = x^2$. Визначити площу між контурами.

2.2. Контури плоского елемента задані функціями $y = 2x$ та $y = x^2$. Знайти площу обмеженої ними частини.

Приклад 3. Площа симетричного профілю

Половина симетричного профілю механічної деталі описується функцією

$$y = 4 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Визначити площу всього симетричного профілю.

Розв'язання

Спочатку знайдемо площу половини:

$$S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx.$$

$$S_1 = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Профіль симетричний, тому:

$$S = 2S_1 = \frac{32}{3}.$$

Відповідь

$$S = \frac{32}{3} \text{ см}^2.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Половина симетричного профілю задана функцією $y = 9 - x^2$, $0 \leq x \leq 3$. Знайти площу всього профілю.

3.2. Половина профілю деталі задана функцією $y = 16 - x^2$, $0 \leq x \leq 4$. Визначити площу всього профілю.

Приклад 4. Об'єм деталі обертання

Профіль деталі задано функцією

$$y = x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Профіль обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм утвореної деталі.

Розв'язання

Використаємо формулу об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dx.$$

$$V = \pi \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2.$$

$$V = \frac{8\pi}{3}.$$

Відповідь

$$V = \frac{8\pi}{3} \text{ см}^3.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Профіль деталі задано функцією $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити об'єм тіла при обертанні профілю навколо осі абсцис.

4.2. Профіль заготовки задано функцією $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Знайти об'єм тіла обертання.

Приклад 5. Об'єм ступінчасто змінної осесиметричної деталі

Радіус осесиметричної деталі змінюється вздовж її осі за законом

$$r(x) = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Визначити об'єм деталі.

Розв'язання

Площа поперечного перерізу:

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi(1 + x)^2.$$

Тоді:

$$V = \pi \int_0^3 (1 + x)^2 dx.$$

Розкриємо квадрат:

$$(1 + x)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Отже:

$$V = \pi \int_0^3 (x^2 + 2x + 1) dx.$$

$$V = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_0^3.$$

$$V = \pi(9 + 9 + 3) = 21\pi.$$

Відповідь

$$\boxed{V = 21\pi \text{ см}^3.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Радіус осесиметричної деталі змінюється за законом $r(x) = 2 + x$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити об'єм.

5.2. Радіус заготовки заданий функцією $r(x) = 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити її об'єм.

Приклад 6. Шлях повзуна механізму

Швидкість повзуна змінюється за законом

$$v(t) = 2t + 3, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

Визначити шлях, пройдений повзуном.

Розв'язання

На заданому проміжку швидкість додатна, тому шлях:

$$s = \int_0^4 (2t + 3) dt.$$

$$s = (t^2 + 3t) \Big|_0^4.$$

$$s = 16 + 12 = 28.$$

Відповідь

$$\boxed{s = 28 \text{ м.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Швидкість поступального руху ланки $v(t) = 3t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5 секунд.

6.2. Швидкість повзуна $v(t) = t^2 + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за проміжок часу від 0 до 3 секунд.

Приклад 7. Переміщення робочого органа

Швидкість робочого органа механізму:

$$v(t) = 3t^2 + 2t, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Знайти переміщення.

Розв'язання

$$s = \int_0^2 (3t^2 + 2t) dt.$$

$$s = (t^3 + t^2) \Big|_0^2.$$

$$s = 8 + 4 = 12.$$

Відповідь

$$\boxed{s = 12 \text{ м.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = 2t^2 + 4t$. Знайти переміщення за перші 3 секунди.

7.2. Швидкість робочого органа $v(t) = 4t^2 + t$. Визначити переміщення за перші 2 секунди.

Приклад 8. Робота змінної сили

На механічний елемент під час переміщення діє сила

$$F(x) = 100 + 20x,$$

де сила вимірюється в ньютонах, а переміщення — у метрах. Визначити роботу сили при переміщенні від $x = 0$ до $x = 5$ метрів.

Розв'язання

$$A = \int_0^5 (100 + 20x) dx.$$

$$A = (100x + 10x^2) \Big|_0^5.$$

$$A = 500 + 250 = 750.$$

Відповідь

$$\boxed{A = 750 \text{ Дж.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Сила змінюється за законом $F(x) = 80 + 10x$ ньютонів. Визначити роботу при переміщенні від 0 до 6 метрів.

8.2. Сила $F(x) = 120 + 15x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0 до 4 метрів.

Приклад 9. Робота пружного елемента

Пружний елемент підкоряється закону

$$F(x) = kx,$$

де $k = 400$ ньютонів на метр. Визначити роботу, необхідну для деформації елемента від $x = 0$ до $x = 0,1$ метра.

Розв'язання

$$F(x) = 400x.$$

Тоді:

$$A = \int_0^{0,1} 400x \, dx.$$

$$A = 200x^2 \Big|_0^{0,1}.$$

$$A = 200 \cdot 0,01 = 2.$$

Відповідь

$$\boxed{A = 2 \text{ Дж.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Жорсткість пружини $k = 500$ ньютонів на метр. Визначити роботу для її деформації на 0,2 метра.

9.2. Пружний елемент має жорсткість $k = 800$ ньютонів на метр. Визначити роботу для деформації на 0,15 метра.

Приклад 10. Робота нелінійно змінного навантаження

Сила опору під час переміщення механічної ланки змінюється за законом

$$F(x) = 20x^2 + 50.$$

Знайти роботу сили на ділянці $0 \leq x \leq 3$ метри.

Розв'язання

$$A = \int_0^3 (20x^2 + 50) dx.$$

$$A = \left(\frac{20x^3}{3} + 50x \right) \Big|_0^3.$$

$$A = 180 + 150 = 330.$$

Відповідь

$$\boxed{A = 330 \text{ Дж.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Сила опору задана функцією $F(x) = 10x^2 + 40$. Знайти роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.

10.2. Змінне навантаження задано функцією $F(x) = 15x^2 + 60$. Визначити роботу при переміщенні від 0 до 2 метрів.

Приклад 11. Об'єм заготовки зі змінним радіусом

Радіус круглої заготовки вздовж осі змінюється за законом

$$r(x) = 2 + \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Визначити об'єм заготовки.

Розв'язання

$$V = \pi \int_0^4 \left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

Розкриваємо квадрат:

$$\left(2 + \frac{x}{2} \right)^2 = 4 + 2x + \frac{x^2}{4}.$$

Тому:

$$V = \pi \int_0^4 \left(4 + 2x + \frac{x^2}{4} \right) dx.$$

$$V = \pi \left(4x + x^2 + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^4.$$

$$V = \pi \left(16 + 16 + \frac{64}{12} \right) = \frac{112\pi}{3}.$$

Відповідь

$$V = \frac{112\pi}{3} \text{ см}^3.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Радіус осесиметричної заготовки $r(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $0 \leq x \leq 4$. Знайти об'єм.

11.2. Радіус деталі $r(x) = 2 + \frac{x}{3}$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити об'єм деталі.

Приклад 12. Комплексна задача прикладної механіки

Швидкість поступального руху робочого органа механізму змінюється за законом

$$v(t) = 2t^2 + 4t + 1$$

метрів за секунду. Визначити шлях робочого органа за перші 3 секунди.

Розв'язання

Оскільки при $0 \leq t \leq 3$ швидкість додатна, шлях:

$$s = \int_0^3 (2t^2 + 4t + 1) dt.$$

Знайдемо первісну:

$$\int (2t^2 + 4t + 1) dt = \frac{2t^3}{3} + 2t^2 + t.$$

Підставляємо межі:

$$s = \left(\frac{2t^3}{3} + 2t^2 + t \right) \Big|_0^3.$$

$$s = 18 + 18 + 3 = 39.$$

Відповідь

$$s = 39 \text{ м.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = t^2 + 6t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4 секунди.

12.2. Швидкість поступального руху механічного елемента $v(t) = 3t^2 + 2t + 4$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3 секунди.

Завдання для самостійного розв'язування на занятті

1. Профіль плоскої деталі обмежений графіком $y = x^2 + 2$, віссю абсцис та прямими $x = 0$, $x = 3$. Визначити площу профілю.
2. Межі профілю механічного елемента задані функціями $y = 4x$ і $y = x^2$. Визначити площу між ними.
3. Профіль осесиметричної деталі задано функцією $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити об'єм деталі при обертанні профілю навколо осі абсцис.
4. Радіус деталі змінюється за законом $r(x) = 2 + x$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити її об'єм.
5. Швидкість повзуна $v(t) = 3t + 4$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5 секунд.
6. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = 2t^2 + 3t$ метрів за секунду. Визначити переміщення за перші 4 секунди.
7. Сила $F(x) = 100 + 25x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.
8. Пружний елемент має жорсткість $k = 600$ ньютонів на метр. Визначити роботу, необхідну для його деформації на 0,2 метра.

Типові помилки

1. Неправильне встановлення меж інтегрування.
2. Плутання визначеного та невизначеного інтегралів.
3. Запис сталої інтегрування під час обчислення визначеного інтеграла.
4. Неправильне застосування формули Ньютона-Лейбніца.
5. Неправильне визначення верхньої та нижньої функцій при обчисленні площі.
6. Відсутність знаходження точок перетину кривих.
7. Відсутність квадрата функції у формулі об'єму тіла обертання.

8. Плутання радіуса та діаметра деталі.
9. Плутання переміщення і повного пройденого шляху.
10. Ігнорування можливості зміни знака швидкості.
11. Неправильне складання інтеграла роботи змінної сили.
12. Відсутність одиниць вимірювання.
13. Неправильне перетворення одиниць довжини.
14. Відсутність перевірки фізичного змісту результату.
15. Відсутність професійного висновку.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

У кожному варіанті передбачено **п'ять професійно орієнтованих задач**: площа профілю механічної деталі; об'єм деталі або заготовки; шлях механічної ланки; робота змінної сили; робота пружного елемента.

Варіант 1

Задача 1. Профіль плоскої механічної деталі обмежений графіком $y = 2x + 1$, віссю абсцис та прямими $x = 0$, $x = 3$. Визначити площу профілю.

Задача 2. Радіус осесиметричної деталі змінюється за законом $r(x) = 1 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 3$. Визначити об'єм деталі.

Задача 3. Швидкість повзуна механізму задана функцією $v(t) = 2t + 3$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4 секунди.

Задача 4. Сила, що діє на рухому ланку, змінюється за законом $F(x) = 100 + 20x$ ньютонів. Визначити роботу сили при переміщенні від 0 до 5 метрів.

Задача 5. Пружина має жорсткість $k = 400$ ньютонів на метр. Визначити роботу, необхідну для її деформації від 0 до 0,1 метра.

Варіант 2

Задача 1. Верхній контур плоскої деталі описується функцією $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 2$. Нижній контур збігається з віссю абсцис. Визначити площу деталі.

Задача 2. Радіус осесиметричної заготовки змінюється за законом $r(x) = 2 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 2$. Визначити об'єм.

Задача 3. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = 3t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5 секунд.

Задача 4. Сила опору $F(x) = 80 + 10x$ ньютонів. Визначити роботу сили на переміщенні від 0 до 6 метрів.

Задача 5. Пружний елемент має жорсткість 500ньютонів на метр. Визначити роботу для його деформації на 0,2метра.

Варіант 3

Задача 1. Профіль пластини заданий функцією $y = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити площу профілю.

Задача 2. Радіус деталі $r(x) = 1 + 2x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 2$. Визначити об'єм деталі.

Задача 3. Швидкість повзуна $v(t) = t^2 + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.

Задача 4. Змінна сила $F(x) = 120 + 15x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0до 4метрів.

Задача 5. Жорсткість пружного елемента дорівнює 800ньютонів на метр. Визначити роботу при деформації на 0,15метра.

Варіант 4

Задача 1. Контури плоскої механічної деталі задані функціями $y = 3x$ і $y = x^2$. Визначити площу між контурами.

Задача 2. Профіль деталі $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.

Задача 3. Швидкість ланки $v(t) = 2t^2 + 4t$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.

Задача 4. Сила опору змінюється за законом $F(x) = 10x^2 + 40$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0до 4метрів.

Задача 5. Пружина має жорсткість 600ньютонів на метр. Визначити роботу при деформації на 0,25метра.

Варіант 5

Задача 1. Контури деталі задані функціями $y = 2x$ та $y = x^2$. Визначити площу між ними.

Задача 2. Профіль заготовки $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 2$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.

Задача 3. Швидкість робочого органа $v(t) = 4t^2 + t$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 2секунди.

Задача 4. Навантаження змінюється за законом $F(x) = 15x^2 + 60$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0до 2метрів.

Задача 5. Жорсткість пружини $k = 700$ ньютонів на метр. Визначити роботу для її деформації на 0,2 метра.

Варіант 6

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 4 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, і симетричний відносно осі ординат. Визначити площу всього профілю.
2. Радіус деталі $r(x) = 2 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити її об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 2t^2 + 3t + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3 секунди.
4. Сила $F(x) = 50 + 30x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.
5. Жорсткість пружного елемента $k = 900$ ньютонів на метр. Визначити роботу при деформації на 0,1 метра.

Варіант 7

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 9 - x^2$, $0 \leq x \leq 3$, і симетричний відносно осі ординат. Знайти площу профілю.
2. Радіус заготовки $r(x) = 1 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Знайти об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = 3t^2 + 2t$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 2 секунди.
4. Сила $F(x) = 70 + 20x$ ньютонів. Визначити роботу на ділянці $0 \leq x \leq 5$ метрів.
5. Пружина жорсткістю 1000 ньютонів на метр деформується на 0,12 метра. Визначити роботу.

Варіант 8

1. Верхній контур деталі задано функцією $y = x^2 + 2$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити площу між контуром і віссю абсцис.
2. Радіус осесиметричної деталі $r(x) = 2 + \frac{x}{3}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 3$. Визначити об'єм.
3. Швидкість робочого органа $v(t) = t^2 + 6t + 2$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 4 секунди.
4. Сила $F(x) = 25x^2 + 40$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 2$ метри.

5. Пружний елемент жорсткістю 450ньютонів на метр деформується на 0,3метра. Знайти роботу.

Варіант 9

1. Контури деталі задані функціями $y = 4x$ та $y = x^2$. Визначити площу між ними.
2. Профіль деталі $y = x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = 3t^2 + 2t + 4$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 90 + 25x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.
5. Пружина жорсткістю 550ньютонів на метр розтягується на 0,2метра. Визначити роботу.

Варіант 10

1. Профіль механічного елемента заданий функцією $y = 2x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити площу профілю.
2. Радіус заготовки $r(x) = 1 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 4t + 5$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 6секунд.
4. Сила опору $F(x) = 20x^2 + 30$ ньютонів. Знайти роботу на ділянці $0 \leq x \leq 3$ метри.
5. Жорсткість пружини $k = 750$ ньютонів на метр. Знайти роботу при деформації на 0,16метра.

Варіант 11

1. Контури профілю задані $y = 5x$ і $y = x^2$. Визначити площу між ними.
2. Профіль деталі $y = 2 + x$, $0 \leq x \leq 2$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = 2t^2 + 5t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 110 + 30x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні від 0 до 5 метрів.

5. Пружина жорсткістю 650ньютонів на метр деформується на 0,18метра. Визначити роботу.

Варіант 12

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 16 - x^2$, $0 \leq x \leq 4$, і є симетричним. Визначити площу всього профілю.
2. Радіус заготовки $r(x) = 2 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити об'єм.
3. Швидкість робочого органа $v(t) = t^2 + 4t + 3$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 5секунд.
4. Сила $F(x) = 30x^2 + 20$ ньютонів. Знайти роботу при $0 \leq x \leq 3$ метри.
5. Пружний елемент жорсткістю 850ньютонів на метр деформується на 0,14метра. Визначити роботу.

Варіант 13

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 2 + 4x$, $0 \leq x \leq 5$. Визначити площу профілю.
2. Радіус деталі $r(x) = 3 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 3t^2 + t + 2$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 60 + 40x$ ньютонів. Визначити роботу при переміщенні від 0 до 3метрів.
5. Пружина жорсткістю 950ньютонів на метр стискається на 0,1метра. Знайти роботу.

Варіант 14

1. Контури деталі задані функціями $y = 6x$ і $y = x^2$. Визначити площу між ними.
2. Профіль деталі $y = 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 3$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = 2t^2 + 6t + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4секунди.
4. Змінна сила $F(x) = 40 + 25x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 6$ метрів.

5. Пружний елемент має жорсткість 720ньютонів на метр. Знайти роботу при деформації на 0,25метра.

Варіант 15

1. Профіль плоскої деталі заданий функцією $y = 3x^2 + 2$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити його площу.
2. Радіус заготовки $r(x) = 1 + 3x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 1$. Визначити об'єм.
3. Швидкість механічної ланки $v(t) = 5t + 2$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 6секунд.
4. Сила $F(x) = 15x^2 + 50$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.
5. Пружина жорсткістю 1100ньютонів на метр деформується на 0,08метра. Визначити роботу.

Варіант 16

1. Профіль деталі обмежений функцією $y = 4x + 2$, віссю абсцис та прямими $x = 0$, $x = 4$. Знайти площу.
2. Радіус деталі $r(x) = 2 + \frac{x}{4}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 2t^2 + 2t + 3$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5секунд.
4. Сила $F(x) = 130 + 10x$ ньютонів. Знайти роботу на переміщенні від 0 до 6метрів.
5. Пружний елемент жорсткістю 480ньютонів на метр деформується на 0,3метра. Визначити роботу.

Варіант 17

1. Контури профілю задані функціями $y = 2x + 3$ та $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 4$. Визначити площу між ними.
2. Профіль деталі $y = x + 3$, $0 \leq x \leq 2$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм.
3. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = t^2 + 3t + 4$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 25x^2 + 70$ ньютонів. Визначити роботу на ділянці $0 \leq x \leq 3$ метри.

5. Пружина жорсткістю 580ньютонів на метр розтягується на 0,24метра. Знайти роботу.

Варіант 18

1. Верхній контур плоскої деталі заданий функцією $y = x^2 + 3x + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Знайти площу профілю.
2. Радіус осесиметричної деталі $r(x) = 2 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 5$. Знайти об'єм.
3. Швидкість робочого органа $v(t) = 4t^2 + 2t + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 75 + 35x$ ньютонів. Визначити роботу при переміщенні від 0 до 4метрів.
5. Жорсткість пружного елемента становить 680ньютонів на метр. Визначити роботу при деформації на 0,2метра.

Варіант 19

1. Конттури деталі задані функціями $y = 4x + 1$ і $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити площу між контурами.
2. Радіус заготовки $r(x) = 1 + \frac{x}{3}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 6$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 3t^2 + 4t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 20x^2 + 80$ ньютонів. Знайти роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 4$ метри.
5. Пружина жорсткістю 780ньютонів на метр стискається на 0,16метра. Знайти роботу.

Варіант 20

1. Профіль механічної деталі заданий функцією $y = 5x + 1$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити площу.
2. Профіль деталі $y = 2 + x$, $0 \leq x \leq 4$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = 2t^2 + 7t + 1$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 140 + 20x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 5$ метрів.

5. Пружний елемент жорсткістю 880ньютонів на метр деформується на 0,12метра. Визначити роботу.

Варіант 21

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 25 - x^2$, $0 \leq x \leq 5$, і симетричний відносно осі ординат. Визначити площу всього профілю.
2. Радіус осесиметричної заготовки $r(x) = 3 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 4$. Визначити об'єм.
3. Швидкість механічної ланки $v(t) = t^2 + 5t + 3$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5секунд.
4. Сила опору $F(x) = 30x^2 + 60$ ньютонів. Знайти роботу на ділянці $0 \leq x \leq 3$ метри.
5. Пружина жорсткістю 980ньютонів на метр деформується на 0,1метра. Визначити роботу.

Варіант 22

1. Контури плоского елемента задані функціями $y = 5x$ та $y = x^2$. Визначити площу між ними.
2. Радіус деталі змінюється за законом $r(x) = 1 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 5$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 4t^2 + 3t + 2$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 95 + 15x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 6$ метрів.
5. Пружний елемент жорсткістю 520ньютонів на метр деформується на 0,28метра. Знайти роботу.

Варіант 23

1. Верхня межа профілю задана функцією $y = 2x^2 + 3$, $0 \leq x \leq 3$. Нижня межа збігається з віссю абсцис. Визначити площу.
2. Профіль деталі $y = 1 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм.
3. Швидкість виконавчої ланки $v(t) = 3t^2 + 5t + 1$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 35x^2 + 50$ ньютонів. Визначити роботу при $0 \leq x \leq 3$ метри.

5. Пружина жорсткістю 620ньютонів на метр стискається на 0,22метра. Визначити роботу.

Варіант 24

1. Контури механічної деталі задані функціями $y = 3x + 4$ і $y = x + 2$, $0 \leq x \leq 5$. Визначити площу між ними.
2. Радіус заготовки $r(x) = 2 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 6$. Знайти об'єм.
3. Швидкість робочого органа $v(t) = 2t^2 + 8t + 3$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 150 + 25x$ ньютонів. Знайти роботу на переміщенні від 0 до 4 метрів.
5. Пружний елемент жорсткістю 720ньютонів на метр деформується на 0,18метра. Визначити роботу.

Варіант 25

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 6x + 2$, $0 \leq x \leq 3$. Визначити площу профілю.
2. Профіль осесиметричної деталі $y = x + 2$, $0 \leq x \leq 5$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.
3. Швидкість ланки $v(t) = t^2 + 7t + 4$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5секунд.
4. Сила $F(x) = 40x^2 + 30$ ньютонів. Знайти роботу на ділянці $0 \leq x \leq 3$ метри.
5. Пружина жорсткістю 820ньютонів на метр розтягується на 0,14метра. Знайти роботу.

Варіант 26

1. Контури профілю деталі задані функціями $y = 6x$ та $y = x^2$. Визначити площу обмеженої ними частини.
2. Радіус деталі $r(x) = 2 + \frac{x}{3}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 6$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = 4t^2 + 5t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 3секунди.
4. Сила $F(x) = 105 + 30x$ ньютонів. Знайти роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 5$ метрів.

5. Пружний елемент жорсткістю 920ньютонів на метр деформується на 0,12метра. Визначити роботу.

Варіант 27

1. Профіль деталі заданий функцією $y = 36 - x^2$, $0 \leq x \leq 6$, і є симетричним відносно осі ординат. Визначити площу всього профілю.
2. Радіус заготовки $r(x) = 1 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 6$. Визначити об'єм.
3. Швидкість механічної ланки $v(t) = 2t^2 + 9t + 1$ метрів за секунду. Знайти шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 25x^2 + 90$ ньютонів. Визначити роботу при переміщенні від 0 до 4метрів.
5. Пружина жорсткістю 1020ньютонів на метр стискається на 0,1метра. Визначити роботу.

Варіант 28

1. Верхній контур плоскої деталі описується функцією $y = 3x^2 + 2x + 1$, $0 \leq x \leq 2$. Визначити площу профілю.
2. Профіль деталі $y = 2x + 1$, $0 \leq x \leq 3$, обертається навколо осі абсцис. Визначити об'єм.
3. Швидкість робочого органа $v(t) = 3t^2 + 6t + 2$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 4секунди.
4. Сила $F(x) = 160 + 20x$ ньютонів. Визначити роботу на переміщенні $0 \leq x \leq 5$ метрів.
5. Пружний елемент жорсткістю 560ньютонів на метр деформується на 0,26метра. Визначити роботу.

Варіант 29

1. Конттури профілю механічної деталі задані функціями $y = 4x + 3$ і $y = x + 3$, $0 \leq x \leq 4$. Визначити площу між ними.
2. Радіус осесиметричної деталі $r(x) = 3 + x$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 3$. Визначити об'єм.
3. Швидкість повзуна $v(t) = t^2 + 8t + 5$ метрів за секунду. Визначити шлях за перші 5секунд.
4. Сила $F(x) = 30x^2 + 100$ ньютонів. Визначити роботу на ділянці $0 \leq x \leq 4$ метри.

5. Пружина жорсткістю 660ньютонів на метр розтягується на 0,2метра. Визначити роботу.

Варіант 30

Задача 1. Контури плоскої механічної деталі задані функціями $y = 5x + 2$ та $y = x + 2$, $0 \leq x \leq 5$. Побудувати схематичне зображення профілю, встановити верхню та нижню межі та визначити площу матеріалу між контурами.

Задача 2. Радіус осесиметричної деталі змінюється вздовж її осі за законом $r(x) = 2 + \frac{x}{2}$ сантиметрів, $0 \leq x \leq 8$. Скласти визначений інтеграл та обчислити об'єм деталі.

Задача 3. Швидкість поступального руху виконавчої ланки механізму змінюється за законом $v(t) = 2t^2 + 10t + 4$ метрів за секунду. Визначити шлях, пройдений ланкою за перші 5секунд руху.

Задача 4. Під час переміщення механічного елемента діє змінна сила $F(x) = 40x^2 + 120$ ньютонів. Визначити роботу цієї сили при переміщенні елемента від $x = 0$ до $x = 5$ метрів.

Задача 5. Пружний елемент механізму має жорсткість $k = 760$ ньютонів на метр і підкоряється закону Гука $F(x) = kx$. Визначити роботу, необхідну для деформації пружного елемента від недеформованого стану до величини 0,18метра.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

У кожній задачі необхідно:

1. Записати повну умову та вихідні дані.
2. Визначити шукану величину.
3. Встановити межі інтегрування.
4. Скласти математичну модель задачі.
5. Записати відповідний визначений інтеграл.
6. Знайти первісну.
7. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.
8. Виконати обчислення.
9. Записати одиниці вимірювання.

10. Сформулювати висновок відповідно до фізичного або геометричного змісту задачі прикладної механіки.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Максимальна кількість — **2 бали**.

2 бали — усі п'ять задач виконані правильно та повністю; правильно складені визначені інтеграли, встановлені межі інтегрування, знайдені первісні, правильно застосована формула Ньютона-Лейбніца, наведені одиниці вимірювання та професійні висновки.

1,5 бала — методи розв'язування вибрані правильно, але допущені окремі обчислювальні або оформлювальні помилки.

1 бал — правильно виконана основна частина завдань, але є помилки під час складання інтегралів, визначення меж або обчислень.

0,5 бала — виконані лише окремі елементи завдання, але продемонстровано розуміння способу застосування визначеного інтеграла.

0 балів — завдання не виконано або використані методи не відповідають темі.

Підведення підсумків практичного заняття

Під час практичного заняття здобувачі освіти закріплюють розуміння того, що визначений інтеграл є важливим математичним інструментом прикладної механіки. За його допомогою можна переходити від локальної характеристики процесу до сумарної величини: від швидкості — до переміщення, від змінної сили — до виконаної роботи, від геометричної функції профілю — до площі або об'єму механічного елемента.

Особливу увагу необхідно звертати на **фізичний зміст підінтегральної функції, правильний вибір меж інтегрування та одиниці вимірювання**. Саме вони забезпечують зв'язок математичного обчислення з реальною інженерною задачею.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
3. Який фізичний зміст визначеного інтеграла?

4. Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Як визначити площу криволінійної трапеції?
6. Як обчислити площу між двома графіками?
7. Як знайти точки перетину двох кривих?
8. Як визначити, яка функція є верхньою?
9. Як обчислюється площа симетричного профілю?
10. Як визначається об'єм тіла обертання?
11. Чому у формулі об'єму функція підноситься до квадрата?
12. Як визначити об'єм осесиметричної деталі зі змінним радіусом?
13. Як пов'язані швидкість і переміщення?
14. Як знайти переміщення за відомою швидкістю?
15. За якої умови інтеграл швидкості дорівнює пройденому шляху?
16. Що робити, якщо швидкість змінює знак?
17. Як визначити роботу змінної сили?
18. Який фізичний зміст інтеграла від сили?
19. Як визначається робота пружної сили?
20. Що характеризує коефіцієнт жорсткості пружини?
21. У яких одиницях вимірюється робота?
22. У яких одиницях вимірюється жорсткість пружини?
23. У яких одиницях вимірюється об'єм?
24. Як перевірити розмірність отриманого результату?
25. Чому необхідно враховувати одиниці довжини під час обчислення об'єму?
26. Які задачі прикладної механіки зводяться до обчислення площі?
27. Які задачі прикладної механіки зводяться до обчислення об'єму?
28. Які кінематичні задачі розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла?
29. Які силові задачі розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла?

30. Чому після математичного обчислення необхідно сформулювати інженерний висновок?

Домашнє завдання

Виконати відповідний варіант індивідуального завдання. Для кожної з п'яти задач записати математичну модель, межі інтегрування, визначений інтеграл, послідовність обчислень, результат з одиницями вимірювання та короткий висновок щодо отриманої характеристики механічного об'єкта або процесу.

Література

1. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка». Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. Саме цей збірник містить окрему тему із застосування визначеного інтеграла до задач геометрії та механіки.
2. Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
3. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
4. Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок. У посібнику визначений інтеграл розглядається як засіб розв'язування прикладних задач, зокрема обчислення площ та об'ємів.
5. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

Практичне заняття № 18

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 4

Змістовий модуль 4. Інтегральне числення

Тема: Розв'язування завдань за модулем 4

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 4 бали

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань і практичних умінь із тем змістового модуля 4 «Інтегральне числення»; установити рівень сформованості вмінь знаходити первісні функцій, обчислювати невизначені інтеграли безпосереднім інтегруванням, методом заміни змінної та методом інтегрування частинами, обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца.

Перевірити вміння застосовувати визначений інтеграл до розв'язування прикладних задач та використовувати інтегральне числення у професійно орієнтованих задачах спеціальності G9 «Прикладна механіка»: визначати переміщення точок і ланок механізмів за заданою швидкістю, обчислювати роботу змінної сили, площі профілів і перерізів, об'єми деталей та заготовок.

Таке наповнення відповідає логіці попереднього практичного заняття № 17, для якого робоча програма передбачає застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи.

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, таблиця основних інтегралів, креслярське приладдя.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.

3. Ознайомлення з вимогами до оформлення роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань модульного контролю.
6. Перевірка та оцінювання виконаних робіт.
7. Аналіз типових помилок.
8. Підведення підсумків змістового модуля 4.

Структура модульного контролю

Кожен індивідуальний варіант містить **сім завдань** відповідно до робочої програми:

1. знаходження первісної;
2. обчислення невизначеного інтеграла;
3. застосування методу заміни змінної;
4. застосування методу інтегрування частинами;
5. обчислення визначеного інтеграла;
6. застосування формули Ньютона-Лейбніца;
7. професійно орієнтована задача для спеціальності G9 «Прикладна механіка».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Знаходження первісної.

Знайти загальний вигляд первісної для функції

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5.$$

Завдання 2. Невизначений інтеграл.

Обчислити

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 2x - 5) dx.$$

Завдання 3. Заміна змінної.

Обчислити

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx.$$

Завдання 4. Інтегрування частинами.

Обчислити

$$\int x e^x dx.$$

Завдання 5. Визначений інтеграл.

Обчислити

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x + 1) dx.$$

Завдання 6. Формула Ньютона-Лейбніца.

Знайти значення

$$\int_1^3 (2x + 4) dx,$$

попередньо визначивши первісну підінтегральної функції.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Швидкість поступального переміщення повзуна механізму змінюється за законом

$$v(t) = 2t + 3,$$

де швидкість вимірюється в сантиметрах за секунду. Визначити переміщення повзуна за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 4$ секунд.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти первісну:

$$f(x) = 4x^3 + 2x - 6.$$

Завдання 2. Обчислити:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 7) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 + 2)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (2x + 5) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^2 (3x^2 + 1) dx.$$

Завдання 7. На механічну ланку під час поступального переміщення діє змінна сила

$$F(x) = 3x + 20$$

ньютонів. Визначити роботу цієї сили під час переміщення ланки від $x = 0$ до $x = 5$ метрів.

Варіант 3**Завдання 1.**

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2.$$

Знайти загальний вигляд первісної.

Завдання 2.

$$\int (6x^5 + 4x^3 - 2x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 + 5)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{2x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (x^2 + 2x) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^2 (4x^3 + 2) dx.$$

Завдання 7. Швидкість робочої точки механізму визначається функцією

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 1.$$

Визначити переміщення робочої точки за перші 3 секунди руху.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти первісну:

$$f(x) = 6x^2 - 8x + 3.$$

Завдання 2.

$$\int (3x^4 + 2x^3 - 5x + 4) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x(2x^2 + 1)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (x^3 + 3x) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^4 (2x - 1) dx.$$

Завдання 7. Сила, що діє вздовж напрямної механізму, змінюється за законом

$$F(x) = 4x + 12.$$

Визначити роботу сили під час переміщення механічної ланки від $x = 1$ до $x = 6$ метрів.

Варіант 5

Завдання 1.

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7.$$

Завдання 2.

$$\int (7x^4 - 4x^2 + 3x - 2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 + 4)^2 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \ln x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^1 (4x^3 + 6x) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^4 (x^2 + 3) dx.$$

Завдання 7. Верхня межа плоского профілю механічної деталі в розрахунковій системі координат описується функцією

$$y = 4 - x^2,$$

а нижня межа збігається з віссю абсцис. Визначити площу частини профілю на проміжку $0 \leq x \leq 2$.

Варіант 6

Завдання 1.

$$f(x) = 7x^3 - 6x + 4.$$

Знайти первісну.

Завдання 2.

$$\int (8x^5 - 3x^3 + 2x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 + 7)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{3x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (2x^3 + x + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (5x^2 - 2x) dx.$$

Завдання 7. Швидкість переміщення каретки механізму задається функцією
 $v(t) = t^2 + 4t + 2$.

Визначити переміщення каретки за проміжок часу від 0 до 4 секунд.

Варіант 7**Завдання 1.**

$$f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 6x - 1.$$

Завдання 2.

$$\int (9x^4 + 3x^2 - 6) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 6x(3x^2 + 2)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos 2x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^2 (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^3 (2x^2 + 3x) dx.$$

Завдання 7. Під час переміщення механічного елемента вздовж напрямної сила змінюється за законом

$$F(x) = 2x^2 + 5.$$

Обчислити роботу цієї сили на ділянці від $x = 0$ до $x = 3$ метрів.

Варіант 8

Завдання 1.

$$f(x) = 8x^2 + 3x - 5.$$

Завдання 2.

$$\int (5x^5 - 2x^4 + 4x^2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x^3(x^4 + 1)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin 2x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (4x^2 + 3) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x - 1) dx.$$

Завдання 7. У розрахунковій моделі поперечний профіль деталі обмежений графіком

$$y = 6 - x$$

та віссю абсцис на проміжку $0 \leq x \leq 6$. Визначити площу цього профілю.

Варіант 9

Завдання 1.

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x.$$

Завдання 2.

$$\int (6x^4 + 5x^3 - 3x + 1) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 5x^4(x^5 + 3)^2 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 e^x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (x^2 + 2x + 4) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^5 (2x + 3) dx.$$

Завдання 7. Швидкість руху точки ланки механізму змінюється за законом

$$v(t) = 2t^2 + 3t + 1.$$

Визначити переміщення точки за проміжок часу від $t = 1$ до $t = 4$ секунд.

Варіант 10

Завдання 1.

$$f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5.$$

Завдання 2.

$$\int (4x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 7) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 - 1)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \ln(2x) dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (2x^3 + x) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^2 (5x^2 + 4x + 1) dx.$$

Завдання 7. Змінна сила під час деформування механічного елемента визначається залежністю

$$F(x) = 100x + 20$$

ньютонів, де x вимірюється в метрах. Визначити роботу сили при зміні переміщення від $x = 0$ до $x = 0,04$ метра.

Варіант 11

Завдання 1.

$$f(x) = 5x^4 + 6x^2 - 3x + 2.$$

Завдання 2.

$$\int (3x^5 + 7x^3 - 4x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{-x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (x^3 + 2x^2 + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^4 (x^2 + 2x) dx.$$

Завдання 7. Контур поперечного перерізу деталі в розрахунковій моделі обмежений кривою

$$y = 9 - x^2$$

і віссю абсцис на проміжку $0 \leq x \leq 3$. Визначити площу цієї частини перерізу.

Варіант 12

Завдання 1.

$$f(x) = 6x^5 - 2x^3 + 4x - 3.$$

Завдання 2.

$$\int (8x^4 - 5x^2 + 6x + 2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x(2x^2 + 3)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos 3x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (2x^2 + x + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^2 (4x^3 + 3x^2) dx.$$

Завдання 7. Швидкість поступального переміщення виконавчої ланки механізму визначається функцією

$$v(t) = 4t^2 + 2t + 3.$$

Знайти переміщення ланки за перші 2 секунди руху.

Варіант 13

Завдання 1.

$$f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 5x^2.$$

Завдання 2.

$$\int (7x^5 + 4x^3 - 8x + 3) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 6x^2(2x^3 + 1)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin 3x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (3x^2 - x + 2) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^4 (2x + 5) dx.$$

Завдання 7. Сила опору під час переміщення механічної ланки описується залежністю

$$F(x) = 5x^2 + 10$$

ньютонів. Визначити роботу, яку необхідно виконати для переміщення ланки від $x = 0$ до $x = 2$ метрів.

Варіант 14**Завдання 1.**

$$f(x) = 7x^4 - 5x^3 + 2x - 6.$$

Завдання 2.

$$\int (9x^5 - 6x^3 + 4x^2 - 1) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 + 4)^6 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (5x^2 + 2x + 3) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (4x^2 - 2x + 5) dx.$$

Завдання 7. Поперечний профіль механічної деталі в математичній моделі обмежений лініями

$$y = 8 - 2x, y = 0,$$

на проміжку $0 \leq x \leq 4$. Визначити площу профілю.

Варіант 15

Завдання 1.

$$f(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 8.$$

Завдання 2.

$$\int (5x^6 - 4x^4 + 3x^2 + 2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 - 2)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 e^x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (3x^3 + 2x + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^4 (2x^2 + 3x - 2) dx.$$

Завдання 7. Швидкість переміщення робочого органа механізму задається функцією

$$v(t) = 3t^2 + 4t + 2.$$

Визначити переміщення робочого органа за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 3$ секунд.

Варіант 16

Завдання 1.

$$f(x) = 8x^3 + 5x^2 - 4x + 1.$$

Завдання 2.

$$\int (6x^5 - 2x^3 + 5x - 4) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 8x^3(2x^4 + 5)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \ln(3x) dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (4x^2 + x + 2) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^2 (6x^3 - 2x + 3) dx.$$

Завдання 7. Під час поступального переміщення деталі сила приводу змінюється відповідно до закону

$$F(x) = 6x + 30.$$

Визначити роботу приводу на ділянці переміщення від $x = 0$ до $x = 4$ метрів.

Варіант 17

Завдання 1.

$$f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 5x^2 + 4.$$

Завдання 2.

$$\int (8x^5 + 3x^4 - 7x^2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 5x^4(x^5 + 2)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{2x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (x^2 + 4x + 5) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^4 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

Завдання 7. Профіль плоскої механічної деталі обмежений параболою

$$y = 16 - x^2$$

та віссю абсцис. Визначити площу правої половини профілю, тобто на проміжку $0 \leq x \leq 4$.

Варіант 18**Завдання 1.**

$$f(x) = 9x^4 - 4x^2 + 3x - 7.$$

Завдання 2.

$$\int (4x^7 - 5x^5 + 2x^3 - 6x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x(2x^2 - 1)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin 4x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x^2 + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (5x^2 + 3x - 4) dx.$$

Завдання 7. Швидкість точки механічної системи змінюється за законом

$$v(t) = 2t^3 + t + 1.$$

Визначити переміщення точки за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 2$ секунд.

Варіант 19**Завдання 1.**

$$f(x) = 5x^5 - 6x^3 + 4x - 2.$$

Завдання 2.

$$\int (7x^6 + 3x^4 - 5x^2 + 1) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 6x^2(2x^3 + 5)^2 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos 4x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^2 (4x^3 + 2x^2 + x) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^3 (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

Завдання 7. Змінна сила, що діє на рухому ланку механізму, визначається функцією

$$F(x) = 4x^2 + 8x + 10.$$

Визначити роботу сили під час переміщення ланки від $x = 0$ до $x = 3$ метрів.

Варіант 20

Завдання 1.

$$f(x) = 6x^4 + 7x^2 - 3x + 5.$$

Завдання 2.

$$\int (9x^5 - 4x^3 + 6x - 2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 + 6)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 \ln x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (5x^3 + x + 4) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^5 (2x^2 - x + 3) dx.$$

Завдання 7. У розрахунковій моделі площа поздовжнього профілю елемента визначається областю між кривою

$$y = 10 - 2x$$

та віссю абсцис на проміжку $0 \leq x \leq 5$. Обчислити площу профілю.

Варіант 21**Завдання 1.**

$$f(x) = 4x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1.$$

Завдання 2.

$$\int (5x^7 - 3x^5 + 4x^3 - 2x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 + 6)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{-2x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (2x^2 + 5x + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (4x^3 - 2x + 5) dx.$$

Завдання 7. Швидкість переміщення повзуна механізму задається законом

$$v(t) = 4t^2 + 3t + 2.$$

Визначити переміщення повзуна за проміжок часу від $t = 1$ до $t = 3$ секунд.

Варіант 22

Завдання 1.

$$f(x) = 7x^5 + 2x^3 - 6x + 3.$$

Завдання 2.

$$\int (8x^6 - 5x^4 + 3x^2 + 7) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x^3(x^4 + 5)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin 5x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (3x^3 + 2x + 4) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^2 (5x^2 + 6x + 1) dx.$$

Завдання 7. Під час переміщення механічного елемента змінна сила описується функцією

$$F(x) = 3x^2 + 6x + 15.$$

Визначити роботу цієї сили при переміщенні від $x = 0$ до $x = 4$ метрів.

Варіант 23

Завдання 1.

$$f(x) = 8x^4 - 5x^2 + 4x + 6.$$

Завдання 2.

$$\int (6x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 3x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 6x(3x^2 + 4)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos 5 x \, dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (4x^3 + 3x^2 + 2) \, dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^4 (2x^2 + 5x - 1) \, dx.$$

Завдання 7. Плоский профіль механічної деталі обмежений кривою
 $y = 25 - x^2$

та віссю абсцис. Визначити площу частини профілю на проміжку $0 \leq x \leq 5$.

Варіант 24

Завдання 1.

$$f(x) = 3x^7 - 4x^5 + 5x^3 - 2x.$$

Завдання 2.

$$\int (9x^6 - 7x^4 + 5x^2 - 3) \, dx.$$

Завдання 3.

$$\int 5x^4(x^5 - 2)^3 \, dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 e^{2x} \, dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (x^3 + 3x^2 + 2x) \, dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^4 (4x^2 - 3x + 2) \, dx.$$

Завдання 7. Швидкість руху робочої точки механізму визначається залежністю

$$v(t) = t^3 + 2t^2 + 3.$$

Визначити переміщення точки за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 3$ секунд.

Варіант 25

Завдання 1.

$$f(x) = 9x^5 - 3x^3 + 7x - 4.$$

Завдання 2.

$$\int (5x^8 - 4x^6 + 3x^4 - 2x^2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 4x(2x^2 + 7)^3 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \ln(4x) dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^3 (5x^2 + 2x + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^2 (3x^3 + 4x + 5) dx.$$

Завдання 7. Під час деформування пружного механічного елемента сила в межах розрахункової моделі змінюється за законом

$$F(x) = 800x$$

ньютонів, де x вимірюється в метрах. Визначити роботу, необхідну для деформації від $x = 0$ до $x = 0,05$ метра.

Варіант 26

Завдання 1.

$$f(x) = 5x^6 + 4x^4 - 3x^2 + 2.$$

Завдання 2.

$$\int (7x^7 - 5x^5 + 3x^3 - x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 6x^2(2x^3 + 3)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x e^{4x} dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (6x^2 + 3x + 4) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (2x^3 + 5x^2 - 2) dx.$$

Завдання 7. Поперечний профіль елемента механічної конструкції обмежений функцією

$$y = 12 - 3x$$

та віссю абсцис на проміжку $0 \leq x \leq 4$. Визначити площу профілю.

Варіант 27

Завдання 1.

$$f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 7.$$

Завдання 2.

$$\int (8x^7 + 4x^5 - 6x^3 + 2x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 2x(x^2 + 8)^6 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \sin 6x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_1^4 (2x^2 + 3x + 5) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_0^3 (4x^3 - x + 2) dx.$$

Завдання 7. Швидкість поступального руху каретки верстатного механізму змінюється за законом

$$v(t) = 5t^2 + 2t + 1.$$

Визначити переміщення каретки за перші 3 секунди руху.

Варіант 28**Завдання 1.**

$$f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 5x + 8.$$

Завдання 2.

$$\int (9x^7 - 6x^5 + 4x^3 - 3x) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 3x^2(x^3 + 8)^5 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x \cos 6x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^2 (3x^3 + 5x^2 + 1) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_1^3 (6x^2 - 4x + 5) dx.$$

Завдання 7. Сила, що діє на механічну ланку вздовж її переміщення, змінюється за законом

$$F(x) = 5x^2 + 4x + 20.$$

Визначити роботу сили під час переміщення від $x = 0$ до $x = 3$ метрів.

Варіант 29

Завдання 1.

$$(x) = 8x^5 - 6x^3 + 4x^2 - 2.$$

Завдання 2.

$$\int (4x^8 + 3x^6 - 5x^4 + 2x^2) dx.$$

Завдання 3.

$$\int 8x^3(2x^4 + 1)^4 dx.$$

Завдання 4.

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Завдання 5.

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x + 3) dx.$$

Завдання 6.

$$\int_2^5 (3x^2 + x - 4) dx.$$

Завдання 7. У розрахунковій моделі плоский профіль деталі обмежений параболою

$$y = 36 - x^2$$

і віссю абсцис. Визначити площу правої половини профілю на проміжку $0 \leq x \leq 6$.

Варіант 30

Завдання 1. Знаходження первісної.

Знайти загальний вигляд первісної функції

$$f(x) = 9x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Завдання 2. Обчислення невизначеного інтеграла.

$$\int (6x^8 - 4x^6 + 5x^3 - 3x + 7) dx.$$

Завдання 3. Заміна змінної.

$$\int 5x^4(x^5 + 4)^4 dx.$$

Завдання 4. Інтегрування частинами.

$$\int x^2 e^x dx.$$

Завдання 5. Обчислення визначеного інтеграла.

$$\int_1^3 (5x^3 + 2x^2 + x + 1) dx.$$

Завдання 6. Застосування формули Ньютона-Лейбніца.

$$\int_0^4 (3x^2 + 2x + 5) dx.$$

Необхідно знайти первісну та обчислити різницю її значень на верхній і нижній межах інтегрування.

Завдання 7. Професійно орієнтована задача.

Швидкість переміщення виконавчої ланки механізму змінюється за законом

$$v(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4t + 2,$$

де швидкість вимірюється в сантиметрах за секунду. Визначити переміщення виконавчої ланки за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 3$ секунд. Записати визначений інтеграл, обчислити його та пояснити фізичний зміст отриманого результату.

Вимоги до виконання модульного контролю

У кожному завданні здобувач освіти повинен записати необхідні формули, обґрунтувати вибір способу інтегрування, послідовно виконати математичні перетворення та записати остаточну відповідь.

У завданнях на невизначений інтеграл обов'язково записується стала інтегрування C .

У завданні із заміною змінної необхідно вказати введену нову змінну та її диференціал.

Під час інтегрування частинами необхідно правильно визначити функції u і dv , знайти du і v , після чого застосувати відповідну формулу.

У завданнях на визначений інтеграл необхідно вказати межі інтегрування, знайти первісну та правильно застосувати формулу Ньютона-Лейбніца.

У професійно орієнтованому завданні необхідно не тільки виконати математичні обчислення, але й:

- установити, яка фізична або геометрична величина визначається інтегралом;
- записати математичну модель задачі;
- правильно встановити межі інтегрування;
- обчислити визначений інтеграл;
- указати одиниці вимірювання;
- сформулювати змістовний висновок відповідно до умови задачі прикладної механіки.

Критерії оцінювання модульного контролю № 4

Максимальна кількість балів — 4 бали.

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Знаходження первісної	0,50
2	Обчислення невизначеного інтеграла	0,50
3	Застосування методу заміни змінної	0,50
4	Інтегрування частинами	0,50
5	Обчислення визначеного інтеграла	0,50
6	Застосування формули Ньютона-Лейбніца	0,50
7	Професійно орієнтована задача для спеціальності G9 «Прикладна механіка»	1,00
Разом		4,00

4,00 бали — усі завдання виконано правильно; методи інтегрування вибрано обґрунтовано; математичні перетворення послідовні; у професійному завданні

правильно складено визначений інтеграл, отримано результат, зазначено одиниці вимірювання та сформульовано професійно змістовний висновок.

3,00–3,75 бала — основні завдання виконано правильно, але допущено одну або декілька незначних обчислювальних чи оформлювальних помилок, які не свідчать про нерозуміння методу.

2,00–2,75 бала — здобувач освіти володіє основними способами інтегрування, але допускає суттєві помилки під час заміни змінної, інтегрування частинами або застосування формули Ньютона-Лейбніца.

1,00–1,75 бала — виконано лише частину завдань; алгоритми застосування основних методів інтегрування засвоєно частково.

0–0,75 бала — більшість завдань не виконано або виконано неправильно; відсутнє розуміння основних понять і методів інтегрального числення.

Типові помилки

Під час виконання завдань модуля 4 найчастіше виникають такі помилки: пропуск сталої інтегрування у невизначеному інтегралі; неправильне застосування степеневі формули; неврахування множника під час заміни змінної; неправильний вибір u і dv під час інтегрування частинами; підстановка меж без попереднього знаходження первісної; перестановка значень верхньої та нижньої меж у формулі Ньютона-Лейбніца; неправильне визначення меж інтегрування в прикладній задачі; плутання переміщення зі швидкістю та роботи із силою; відсутність одиниць вимірювання в остаточній відповіді.

Підведення підсумків

Модульний контроль № 4 перевіряє засвоєння повного комплексу основних питань інтегрального числення, передбачених робочою програмою: від знаходження первісної та невизначеного інтеграла до використання визначеного інтеграла в прикладних задачах. Структура із семи завдань безпосередньо відповідає вимогам практичного заняття № 18.

Для спеціальності **G9 «Прикладна механіка»** професійне спрямування реалізовано через задачі на визначення **переміщення ланок і робочих точок механізмів, роботи змінної сили, площ плоских профілів та перерізів механічних деталей**. Це замінює автомобільне професійне спрямування вихідної робочої програми, не змінюючи математичного змісту модуля. У самій вихідній програмі практичне заняття № 17 передбачає геометричні та фізико-технічні застосування визначеного інтеграла — площу, об'єм, шлях і роботу.

Домашнє завдання

Оскільки практичне заняття № 18 є підсумковим модульним контролем, окреме домашнє індивідуальне завдання, що оцінюється у 2 бали, не встановлюється.

Після перевірки роботи здобувач освіти повинен проаналізувати допущені помилки та повторно розв'язати ті завдання свого варіанта, у яких були допущені помилки, з повним записом алгоритму розв'язування.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
4. **Білоус О. А., Кравченко Ю. А.** *Прикладні задачі з вищої математики*. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
5. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння*. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
6. **Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В.** *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка». Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.

Практичне заняття № 19

Тема: Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Мета

Закріпити теоретичні знання про диференціальні рівняння першого порядку; сформувати практичні вміння визначати тип диференціального рівняння, знаходити загальний і частинний розв'язки; навчитися розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими та відокремлюваними змінними; удосконалити навички застосування початкових умов до знаходження частинного розв'язку; закріпити вміння розв'язувати лінійні диференціальні рівняння першого порядку; формувати вміння виконувати перевірку отриманого розв'язку.

Відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Вища математика» практичне заняття 19 входить до змістового модуля 5 «Диференціальні рівняння» і має тему «Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку». Робочою програмою передбачено визначення типу рівняння, відокремлення змінних, інтегрування обох частин, знаходження загального розв'язку, використання початкової умови для знаходження частинного розв'язку та перевірку отриманого результату.

Практичне заняття спирається на матеріал лекції 15 «Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними» та самостійної роботи 8 «Диференціальні лінійні рівняння першого порядку».

Оснащення: опорні конспекти, конспект лекції 15, матеріали самостійної роботи 8, таблиця основних невизначених інтегралів, навчальні посібники.

План проведення практичного заняття

Актуалізація опорних знань (фронтальне опитування)

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Яке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
4. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння першого порядку?
5. Що називається розв'язком диференціального рівняння?

6. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння?
7. Що називається частинним розв'язком?
8. Чим загальний розв'язок відрізняється від частинного?
9. Що називається початковою умовою?
10. Що називається задачею Коші?
11. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними?
12. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними?
13. У чому полягає відокремлення змінних?
14. Якої послідовності дій необхідно дотримуватися під час розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними?
15. Що необхідно зробити після відокремлення змінних?
16. Чому під час інтегрування з'являється довільна стала?
17. Як можна записати сталу після інтегрування двох частин рівняння?
18. Як із загального розв'язку отримати частинний розв'язок?
19. Як використовується початкова умова $y(x_0) = y_0$?
20. Як виконується перевірка отриманого розв'язку?
21. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
22. Що називається коефіцієнтом при невідомій функції у лінійному диференціальному рівнянні?
23. Що називається правою частиною лінійного диференціального рівняння?
24. Яке лінійне диференціальне рівняння називається однорідним?
25. Яке лінійне диференціальне рівняння називається неоднорідним?
26. Чи може лінійне однорідне рівняння першого порядку бути розв'язане відокремленням змінних?
27. Яку роль відіграє інтегрування під час розв'язування диференціальних рівнянь?
28. Чому перед початком розв'язування необхідно визначити тип рівняння?

29. Які способи перевірки розв'язку диференціального рівняння можна застосувати?

30. Якої загальної послідовності доцільно дотримуватися під час розв'язування диференціального рівняння першого порядку?

Короткі теоретичні відомості

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні.

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку можна записати:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо рівняння можна розв'язати відносно похідної, воно набуває вигляду:

$$y' = f(x, y).$$

У навчальних матеріалах з диференціальних рівнянь першого порядку окремо розглядаються основні поняття, рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні рівняння першого порядку.

Загальний розв'язок

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають сім'ю функцій, що залежить від однієї довільної сталої:

$$y = \varphi(x, C).$$

Частинний розв'язок

Якщо задано початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

то з неї визначають значення довільної сталої C . Після підстановки знайденого значення отримують частинний розв'язок.

Знаходження розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє задану початкову умову, становить **задачу Коші**. Поняття задачі Коші входить до програмного матеріалу з диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Для його розв'язування необхідно розмістити вирази, що містять y , разом із dy , а вирази, що містять x , разом із dx .

За умови $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Після цього інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Отримане співвідношення містить довільну сталу C і визначає загальний розв'язок рівняння.

Саме такий алгоритм — **розділити змінні, проінтегрувати обидві частини, знайти загальний розв'язок, використати початкову умову та виконати перевірку** — безпосередньо передбачений робочою програмою для практичного заняття 19.

Розв'язування прикладів

1. Розв'язати найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 3x^2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо диференціальне рівняння першого порядку, в якому похідна безпосередньо задана функцією незалежної змінної:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

2. Запишемо рівняння у диференціальній формі:

$$dy = 3x^2 dx.$$

3. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int dy = \int 3x^2 dx.$$

Отримаємо:

$$y = x^3 + C.$$

Це загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = (x^3 + C)' = 3x^2.$$

Отримана похідна збігається з правою частиною початкового рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y = x^3 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3.$$

2. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 5x^4 - 2x.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y \, dy = 2x \, dx.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Змінні вже відокремлені: вираз із y знаходиться разом із dy , а вираз із x — разом із dx .

2. Інтегруємо обидві частини:

$$\int y \, dy = \int 2x \, dx.$$

Отримаємо:

$$\frac{y^2}{2} = x^2 + C_1.$$

Помножимо обидві частини на 2:

$$y^2 = 2x^2 + 2C_1.$$

Оскільки $2C_1$ також є довільною сталою, позначимо:

$$C = 2C_1.$$

Тоді:

$$y^2 = 2x^2 + C.$$

Це загальний розв'язок у неявній формі.

За потреби можна виразити y :

$$y = \pm\sqrt{2x^2 + C}.$$

Перевірка

Диференціюємо:

$$y^2 = 2x^2 + C.$$

Отримуємо:

$$2yy' = 4x.$$

Звідси:

$$yy' = 2x.$$

Оскільки $y' = dy/dx$, маємо:

$$y dy = 2x dx.$$

Отримано початкове рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = 2x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y dy = 3x^2 dx.$$

2. Розв'язати:

$$2y dy = 4x^3 dx.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y' = xy.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = x dx.$$

3. Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx.$$

Отримаємо:

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

4. Знайдемо функцію y .

Піднесемо обидві частини до степеня з основою e :

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C}.$$

Використаємо властивість показникової функції:

$$|y| = e^C e^{x^2/2}.$$

Довільний ненульовий множник разом зі знаком можна позначити новою сталою C :

$$y = C e^{x^2/2}.$$

Такий запис охоплює також нульовий розв'язок $y = 0$, якщо дозволити $C = 0$.

Перевірка

$$y = C e^{x^2/2}.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = Ce^{x^2/2} \cdot x.$$

Оскільки:

$$Ce^{x^2/2} = y,$$

то:

$$y' = xy.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{x^2/2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = 2xy.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 3x^2y.$$

4. Розв'язати рівняння, у якому необхідно попередньо відокремити змінні

Приклад

Розв'язати:

$$(1 + x^2)y' = 2xy.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1 + x^2} dx.$$

3. Проінтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Ліва частина:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y|.$$

Для правої частини виконаємо заміну:

$$u = 1 + x^2,$$

$$du = 2x dx.$$

Тоді:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

Оскільки $1 + x^2 > 0$, маємо:

$$\ln |y| = \ln(1 + x^2) + C.$$

4. Знайдемо y :

$$y = C(1 + x^2).$$

Перевірка

$$y = C(1 + x^2),$$

тому:

$$y' = 2Cx.$$

Ліва частина початкового рівняння:

$$(1 + x^2)y' = 2Cx(1 + x^2).$$

Права частина:

$$2xy = 2xC(1 + x^2).$$

Ліва і права частини рівні.

Відповідь:

$$\boxed{y = C(1 + x^2)}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$(1 + x^2)y' = xy.$$

2. Розв'язати:

$$(1 + x)y' = 2y.$$

Задача Коші

Якщо разом із диференціальним рівнянням задано початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

необхідно знайти не всю сім'ю розв'язків, а конкретний частинний розв'язок, який проходить через задану точку (x_0, y_0) .

5. Розв'язати задачу Коші

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = 2xy$$

за початкової умови:

$$y(0) = 3.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 2x \, dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx.$$

Отримуємо:

$$\ln |y| = x^2 + C.$$

Звідси:

$$y = Ce^{x^2}.$$

Це загальний розв'язок.

4. Використаємо початкову умову.

При:

$$x = 0, y = 3$$

маємо:

$$3 = Ce^0.$$

Оскільки:

$$e^0 = 1,$$

одержимо:

$$C = 3.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$y = 3e^{x^2}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = 3e^{x^2} \cdot 2x = 6xe^{x^2}.$$

Перевіримо праву частину:

$$2xy = 2x \cdot 3e^{x^2} = 6xe^{x^2}.$$

Отже:

$$y' = 2xy.$$

Перевіримо початкову умову:

$$y(0) = 3e^0 = 3.$$

Початкова умова виконується.

Відповідь:

$$\boxed{y = 3e^{x^2}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 2.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y, y(0) = 4.$$

6. Розв'язати рівняння з добутком функцій від різних змінних

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Запишемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$y \, dy = x \, dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int y \, dy = \int x \, dx.$$

Отримуємо:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C.$$

Перевірка

Диференціюємо:

$$2yy' = 2x.$$

Отже:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y^2 = x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{y}.$$

2. Розв'язати:

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

7. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{1+y}.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+y}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$(1+y) dy = 2x dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int (1+y) dy = \int 2x dx.$$

Отримаємо:

$$y + \frac{y^2}{2} = x^2 + C.$$

Це загальний розв'язок рівняння у неявній формі.

Перевірка

Диференціюємо обидві частини за x :

$$y' + y y' = 2x.$$

Винесемо y' :

$$(1 + y)y' = 2x.$$

Отже:

$$y' = \frac{2x}{1 + y}.$$

Відповідь:

$$\boxed{y + \frac{y^2}{2} = x^2 + C}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x^2}{1 + y}.$$

2. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{2 + y}.$$

8. Розв'язати диференціальне рівняння з тригонометричною функцією

Приклад

Розв'язати:

$$y' = y \cos x.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні.

Для $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \cos x \, dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \, dx.$$

Отримуємо:

$$\ln |y| = \sin x + C.$$

4. Знайдемо y :

$$y = Ce^{\sin x}.$$

Значення $C = 0$ також дає розв'язок $y = 0$.

Перевірка

$$y' = Ce^{\sin x} \cos x.$$

Оскільки:

$$y = Ce^{\sin x},$$

отримаємо:

$$y' = y \cos x.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{\sin x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' = y \sin x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 2y \cos x.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Відповідно до робочої програми перед практичним заняттям 19 здобувачі освіти опрацьовують самостійну роботу 8 «**Диференціальні лінійні рівняння першого порядку**». У переліку програмного матеріалу окремо передбачено лінійні диференціальні рівняння першого порядку та загальний підхід до їх розв'язування.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку записують у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Для практичного опрацювання використаємо метод Бернуллі, за яким шукану функцію подаємо як добуток:

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Після підстановки до початкового рівняння функції $u(x)$ та $v(x)$ добирають так, щоб послідовно звести задачу до інтегрування простіших рівнянь.

Навчальні джерела, використані в курсі, окремо розглядають лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

9. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння

Приклад

Розв'язати:

$$y' + 2y = 0.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку.

Перепишемо:

$$y' = -2y.$$

Це рівняння також є рівнянням з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = -2 dx.$$

3. Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx.$$

Отримуємо:

$$\ln |y| = -2x + C.$$

Звідси:

$$y = Ce^{-2x}.$$

Перевірка

$$y' = -2Ce^{-2x}.$$

Підставимо до початкового рівняння:

$$y' + 2y = -2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{-2x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' + 3y = 0.$$

2. Розв'язати:

$$y' - 4y = 0.$$

10. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

Приклад

Розв'язати:

$$y' + y = x.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де:

$$P(x) = 1, Q(x) = x.$$

2. Виконаємо підстановку:

$$y = uv.$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо:

$$u'v + uv' + uv = x.$$

Згрупуємо:

$$u'v + u(v' + v) = x.$$

3. Виберемо функцію v так, щоб:

$$v' + v = 0.$$

Тоді:

$$\frac{dv}{dx} = -v.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dv}{v} = -dx.$$

Інтегруємо:

$$\ln |v| = -x.$$

Для зручності одну сталу під час визначення допоміжної функції беремо рівною одиниці:

$$v = e^{-x}.$$

4. Знайдемо функцію u .

Після вибору v рівняння набуває вигляду:

$$u'v = x.$$

Отже:

$$u'e^{-x} = x.$$

Звідси:

$$u' = xe^x.$$

Інтегруємо:

$$u = \int x e^x dx.$$

Застосуємо інтегрування частинами:

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Тому:

$$u = e^x(x - 1) + C.$$

5. Повернемося до функції y :

$$y = uv.$$

Отже:

$$y = [e^x(x - 1) + C]e^{-x}.$$

Розкриємо:

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = 1 - Ce^{-x}.$$

Підставимо:

$$y' + y = 1 - Ce^{-x} + x - 1 + Ce^{-x}.$$

Отже:

$$y' + y = x.$$

Рівняння виконується.

Відповідь:

$$\boxed{y = x - 1 + Ce^{-x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати:

$$y' + y = 1.$$

2. Розв'язати:

$$y' + 2y = 2.$$

11. Розв'язати лінійне рівняння та знайти частинний розв'язок

Приклад

Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 1,$$

$$y(0) = 2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.

2. Знайдемо загальний розв'язок.

Виконаємо підстановку:

$$y = uv.$$

Тоді:

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставимо:

$$u'v + uv' + uv = 1.$$

Згрупуємо:

$$u'v + u(v' + v) = 1.$$

Виберемо:

$$v' + v = 0.$$

Звідси:

$$v = e^{-x}.$$

Тоді:

$$u'e^{-x} = 1.$$

Отже:

$$u' = e^x.$$

Інтегруємо:

$$u = e^x + C.$$

Повертаємося до y :

$$y = (e^x + C)e^{-x}.$$

Отже:

$$y = 1 + Ce^{-x}.$$

3. Використаємо початкову умову.

При:

$$x = 0, y = 2$$

маємо:

$$2 = 1 + Ce^0.$$

Отже:

$$C = 1.$$

Тому частинний розв'язок:

$$y = 1 + e^{-x}.$$

Перевірка

$$y' = -e^{-x}.$$

Тоді:

$$y' + y = -e^{-x} + 1 + e^{-x} = 1.$$

Початкова умова:

$$y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 1 + e^{-x}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 2, y(0) = 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 2y = 4, y(0) = 1.$$

12. Розв'язати задачу Коші для рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад

Розв'язати:

$$y' = \frac{x}{y}, y(0) = 2.$$

Розв'язання

1. Визначимо тип рівняння.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

2. Відокремимо змінні:

$$y \, dy = x \, dx.$$

3. Проінтегруємо:

$$\int y \, dy = \int x \, dx.$$

Отримуємо:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Помножимо на 2:

$$y^2 = x^2 + C.$$

4. Використаємо початкову умову:

$$y(0) = 2.$$

Підставимо:

$$2^2 = 0^2 + C.$$

Отже:

$$C = 4.$$

Маємо:

$$y^2 = x^2 + 4.$$

Звідси:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 4}.$$

Оскільки початкова умова вимагає:

$$y(0) = 2 > 0,$$

вибираємо додатну гілку:

$$y = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Перевірка

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Оскільки:

$$y = \sqrt{x^2 + 4},$$

то:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Крім того:

$$y(0) = \sqrt{4} = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 4}}.$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{2x}{y}, y(0) = 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{x}{1+y}, y(0) = 1.$$

Загальний алгоритм розв'язування диференціального рівняння першого порядку

Під час виконання практичної роботи доцільно дотримуватися такої послідовності:

1. Записати задане диференціальне рівняння.
2. Визначити його порядок.
3. Визначити тип рівняння.
4. Вибрати відповідний метод розв'язування.
5. Якщо змінні відокремлюються — розмістити вирази з y і dy в одній частині, а вирази з x і dx — в іншій.
6. Проінтегрувати обидві частини.
7. Записати довільну сталу.
8. За можливості виразити шукану функцію y .
9. Записати загальний розв'язок.
10. Якщо задана початкова умова — визначити сталу C .
11. Записати частинний розв'язок.
12. Виконати перевірку підстановкою або диференціюванням.

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайдіть загальні розв'язки найпростіших диференціальних рівнянь:

$$y' = 6x^2;$$

- 2.

$$y' = 4x^3 - 2x;$$

3.

$$y' = \cos x;$$

4.

$$y' = e^x.$$

2. Розв'яжіть рівняння з відокремленими або відокремлюваними змінними:

$$y' = 2xy;$$

2.

$$y' = \frac{3x^2}{y};$$

3.

$$y' = \frac{x}{1+y};$$

4.

$$y' = y \sin x;$$

5.

$$(1 + x^2)y' = 2xy.$$

3. Розв'яжіть задачі Коші:

$$y' = xy, y(0) = 3;$$

2.

$$y' = \frac{x}{y}, y(0) = 2;$$

3.

$$y' = 2xy, y(0) = 1;$$

4.

$$y' = y \cos x, y(0) = 2.$$

4. Розв'яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

$$y' + y = 0;$$

2.

$$y' + 2y = 0;$$

3.

$$y' + y = 2;$$

4.

$$y' + 2y = 4.$$

Підведення підсумків практичного заняття

Виставлення балів та оцінок

Під час практичного заняття перевіряється вміння здобувача освіти:

- визначати порядок диференціального рівняння;
- розпізнавати диференціальне рівняння першого порядку;
- визначати тип диференціального рівняння;
- розрізняти загальний і частинний розв'язки;
- правильно використовувати початкову умову;
- розуміти зміст задачі Коші;
- розпізнавати рівняння з відокремленими змінними;
- розпізнавати рівняння з відокремлюваними змінними;
- правильно відокремлювати змінні;
- інтегрувати обидві частини диференціального рівняння;
- знаходити загальний розв'язок;
- визначати довільну сталу за початковою умовою;
- знаходити частинний розв'язок;
- розпізнавати лінійні диференціальні рівняння першого порядку;
- розв'язувати найпростіші лінійні диференціальні рівняння першого порядку;
- перевіряти отриманий розв'язок;
- правильно і послідовно оформлювати математичні перетворення.

Робоча програма визначає для практичного заняття 19 форму звітності як **письмове розрахункове завдання**, а індивідуальна робота повинна передбачати

визначення типу та розв'язування заданих диференціальних рівнянь першого порядку.

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Поняття диференціального рівняння.
2. Порядок диференціального рівняння.
3. Диференціальне рівняння першого порядку.
4. Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку.
5. Розв'язок диференціального рівняння.
6. Загальний розв'язок.
7. Частинний розв'язок.
8. Початкова умова.
9. Задача Коші.
10. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
11. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
12. Алгоритм відокремлення змінних.
13. Інтегрування обох частин диференціального рівняння.
14. Довільна стала у загальному розв'язку.
15. Знаходження сталої за початковою умовою.
16. Перехід від загального розв'язку до частинного.
17. Перевірка розв'язку диференціального рівняння.
18. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
19. Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку.
20. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.
21. Загальний підхід до розв'язування лінійного рівняння.
22. Роль невизначеного інтеграла у розв'язуванні диференціальних рівнянь.
23. Вибір методу розв'язування залежно від типу рівняння.
24. Послідовність перевірки отриманого розв'язку.

Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал лекції 15 «Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними» та самостійної роботи 8 «Диференціальні лінійні рівняння першого порядку». Робоча програма саме в такій послідовності передбачає опрацювання цих тем перед практичним заняттям 19.

Індивідуальне завдання — 2 бали

Кожний здобувач освіти виконує **один із 30 варіантів**, визначений викладачем.

Кожний варіант містить **п'ять повністю сформульованих завдань різного рівня складності**. Біля порядкового номера завдання кількість балів не зазначається. Критерії оцінювання наведено після всіх тридцяти варіантів.

У кожному варіанті необхідно не лише записати відповідь, а **визначити тип рівняння, показати основні етапи розв'язування, знайти загальний або частинний розв'язок відповідно до умови та виконати перевірку одного з отриманих розв'язків**. Це відповідає послідовності виконання індивідуального завдання, установленій робочою програмою.

Варіант 1

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3.$$

2. Визначити тип диференціального рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2xy.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = \frac{2x}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші та знайти частинний розв'язок:

$$y' = xy, y(0) = 2.$$

5. Визначити тип і розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Виконати перевірку отриманого загального розв'язку:

$$y' + y = 1.$$

Варіант 2

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = 3x^2.$$

2. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 3xy.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2xy, y(0) = 3.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку та перевірити отриманий розв'язок:

$$y' + 2y = 2.$$

Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = 5x^4.$$

2. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = x^2y.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{3x^2}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 4.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 3.$$

Варіант 4

1. Визначити тип та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2x + 3.$$

2. Відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2x^2 y.$$

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{2x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3xy, y(0) = 1.$$

5. Визначити тип і розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 4y = 4.$$

Виконати перевірку отриманого розв'язку.

Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 6x^2 - 2x.$$

2. Визначити тип і розв'язати:

$$y' = y \cos x.$$

3. Відокремити змінні та знайти загальний розв'язок:

$$y' = \frac{x^2}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2xy, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + y = 2.$$

Варіант 6

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3 + 2x.$$

2. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x}{2+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = x^2 y, y(0) = 2.$$

5. Розв'язати та перевірити лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + 2y = 4.$$

Варіант 7

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 7x^2.$$

2. Відокремити змінні та розв'язати:

$$y' = 4xy.$$

3. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = \frac{4x^3}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \cos x, y(0) = 3.$$

5. Розв'язати лінійне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 6.$$

Варіант 8

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 2y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x}{2 + y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2 y, y(0) = 2.$$

5. Визначити тип, розв'язати та перевірити:

$$y' + 4y = 8.$$

Варіант 9

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 5x^4 - 3x^2.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 3y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{x^3}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати лінійне рівняння та перевірити результат:

$$y' + 5y = 5.$$

Варіант 10

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 2x^5.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 5xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{4x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y, y(0) = 3.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 2y = 6.$$

Варіант 11

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 6x^5.$$

2. Відокремити змінні та розв'язати:

$$y' = 2x^3y.$$

3. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = \frac{5x^4}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \sin x, y(0) = 2.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 3y = 9.$$

Варіант 12

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 4x^3 - 6x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 3x^2y.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x^2}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 4xy, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 4y = 12.$$

Варіант 13

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 8x^3.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 4y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x^2}{2+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 6.$$

5. Визначити тип, розв'язати рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 5y = 10.$$

Варіант 14

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 3x^4 + 2x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 5y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{6x}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y, y(0) = 4.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 6y = 6.$$

Варіант 15

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 10x^4.$$

2. Відокремити змінні та розв'язати:

$$y' = 6xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{4x^3}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \cos x, y(0) = 4.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку:

$$y' + 2y = 8.$$

Варіант 16

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 7x^6.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 2x^4y.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{5x}{2+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3xy, y(0) = 2.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 3y = 12.$$

Варіант 17

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 5x^3 - 2x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 2y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x^3}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = x^2y, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати та перевірити лінійне рівняння:

$$y' + 4y = 16.$$

Варіант 18

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 9x^2 - 3.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 7xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{4x^2}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2xy, y(0) = 6.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 5y = 15.$$

Варіант 19

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 6x^4 + 2x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 3y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{8x^3}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y, y(0) = 1.$$

5. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння та перевірити результат:

$$y' + 6y = 12.$$

Варіант 20

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 4x^5 - 2x^3.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 8xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \sin x, y(0) = 3.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 2y = 10.$$

Варіант 21

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 11x^2.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 4x^2y.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{5x^4}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 7.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 3y = 15.$$

Варіант 22

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 3x^5 + 4x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 5y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{6x^2}{2 + y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y, y(0) = 2.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 4y = 20.$$

Варіант 23

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 12x^3.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 9xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{4x}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \cos x, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 5y = 20.$$

Варіант 24

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 8x^4 - 4x^2.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 6y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{2x^4}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 4xy, y(0) = 3.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 6y = 18.$$

Варіант 25

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 15x^2 - 5x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 10xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{7x^2}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3x^2y, y(0) = 4.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 2y = 12.$$

Варіант 26

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 5x^6.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 7y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{8x}{2+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = xy, y(0) = 8.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 3y = 18.$$

Варіант 27

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 7x^4 + 3x^2.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 8y \sin x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{3x^3}{1+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 2x^2y, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 4y = 24.$$

Варіант 28

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 16x^3 - 2x.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 11xy.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{5x^2}{2+y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = y \cos x, y(0) = 6.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 5y = 25.$$

Варіант 29

1. Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 9x^5 - 3x^2.$$

2. Розв'язати:

$$y' = 9y \cos x.$$

3. Розв'язати:

$$y' = \frac{6x^3}{y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3xy, y(0) = 5.$$

5. Розв'язати та перевірити:

$$y' + 6y = 24.$$

Варіант 30

1. Визначити тип диференціального рівняння першого порядку та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = 10x^4 - 4x.$$

2. Визначити тип диференціального рівняння, відокремити змінні, проінтегрувати обидві частини та знайти загальний розв'язок:

$$y' = 12xy.$$

3. Визначити тип рівняння, відокремити змінні та знайти його загальний розв'язок:

$$y' = \frac{4x^3}{2 + y}.$$

4. Розв'язати задачу Коші, тобто знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задану початкову умову:

$$y' = 2x^2y, y(0) = 6.$$

5. Визначити тип і розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Записати загальний розв'язок та виконати його перевірку підстановкою у початкове рівняння:

$$y' + 5y = 30.$$

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Критерії оцінювання є однаковими для всіх 30 варіантів. **Максимальна кількість балів — 2 бали.**

Завдання	Зміст завдання	Максимальна кількість балів
1	Визначення типу та знаходження загального розв'язку найпростішого диференціального рівняння першого порядку	0,25
2	Розв'язування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними	0,25
3	Відокремлення змінних, інтегрування та знаходження загального розв'язку	0,50
4	Розв'язування задачі Коші та знаходження частинного розв'язку	0,50
5	Розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку та перевірка	0,50
Разом		2,00

2,00 бали

Усі п'ять завдань виконано правильно і повністю. Здобувач освіти правильно визначає тип диференціального рівняння, обґрунтовано вибирає метод розв'язування, правильно відокремлює змінні, інтегрує обидві частини, записує довільну сталу, знаходить загальний розв'язок, правильно використовує початкову умову, знаходить частинний розв'язок та виконує перевірку. Лінійне диференціальне рівняння розв'язано послідовно і математично правильно.

1,50–1,75 бала

Основні методи розв'язування засвоєно правильно. Здобувач освіти правильно визначає тип більшості рівнянь та правильно обирає спосіб розв'язування, але допускає окремі незначні арифметичні, алгебраїчні або інтеграційні помилки. Загальний хід розв'язування правильний.

1,00–1,25 бала

Правильно виконано завдання базового рівня та частину складніших завдань. Здобувач освіти розуміє принцип відокремлення змінних і знаходження загального розв'язку, але допускає помилки під час інтегрування, використання початкової умови або розв'язування лінійного рівняння.

0,50–0,75 бала

Правильно виконано лише окремі прості етапи. Здобувач освіти частково визначає тип рівняння, але має суттєві труднощі з відокремленням змінних, інтегруванням, визначенням довільної сталої або знаходженням частинного розв'язку.

0–0,25 бала

Виконано лише окремі елементи завдань. Здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння поняття диференціального рівняння першого порядку та алгоритмів його розв'язування.

Література

1. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. У посібнику окремо розглянуто загальні поняття та задачу Коші, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
2. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок. У першому розділі посібника розглянуто диференціальні рівняння першого порядку, зокрема основні поняття, рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні й лінійні рівняння першого порядку.
3. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
4. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
5. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум* : навчальний посібник для здобувачів ступеня

бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.

6. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності G9 «Прикладна механіка».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026. Практичне заняття 19 — «Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку».

Практичне заняття № 20

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема: Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. Моделювання коливальних процесів. Математичне моделювання механічних процесів

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Час — 2 години

Мета

Закріпити теоретичні знання та сформувати практичні вміння розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку, визначати загальний і частинний розв'язки, використовувати початкові умови для знаходження сталих інтегрування.

Сформувати вміння будувати найпростіші математичні моделі механічних процесів за допомогою диференціальних рівнянь другого порядку; застосовувати математичний апарат до опису прямолінійного руху матеріальної точки, переміщення механічних ланок, руху за заданим прискоренням, вільних коливань механічної системи, коливань вантажу на пружині.

Навчити здобувачів освіти встановлювати зв'язок між математичною моделлю та фізичними параметрами механічної системи, правильно використовувати початкові умови, аналізувати отриманий розв'язок і формулювати висновок щодо характеру механічного процесу.

Розвивати інженерне мислення, навички математичного моделювання та здатність використовувати диференціальні рівняння для розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки.

Оснащення

Опорні конспекти, матеріали лекцій з диференціальних рівнянь, навчальні посібники з вищої математики, схеми механічних систем, картки з професійно орієнтованими завданнями, калькулятор, мультимедійні засоби.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.

2. Перевірка домашнього завдання.
3. Повідомлення теми та мети практичного заняття.
4. Мотивація навчальної діяльності.
5. Актуалізація опорних знань.
6. Повторення основних понять диференціальних рівнянь другого порядку.
7. Розв'язування найпростіших диференціальних рівнянь другого порядку.
8. Розв'язування задач Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.
9. Математичне моделювання руху механічних систем.
10. Математичне моделювання вільних коливань.
11. Визначення параметрів коливального руху.
12. Розв'язування професійно орієнтованих задач прикладної механіки.
13. Самостійне виконання завдань.
14. Аналіз типових помилок.
15. Підведення підсумків практичного заняття.
16. Повідомлення індивідуального домашнього завдання.

Актуалізація опорних знань

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням другого порядку?
4. Який вигляд має диференціальне рівняння другого порядку в загальній формі?
5. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
6. Що називається загальним розв'язком?
7. Що називається частинним розв'язком?
8. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку?
9. Що називається початковими умовами?
10. Що називається задачею Коші?

11. Які початкові умови необхідні для рівняння другого порядку?
12. Який фізичний зміст має перша похідна координати за часом?
13. Який фізичний зміст має друга похідна координати за часом?
14. Як пов'язані координата, швидкість і прискорення?
15. Як знайти швидкість за відомим прискоренням?
16. Як знайти координату за відомою швидкістю?
17. Як використати початкову швидкість?
18. Як використати початкову координату?
19. Що називається механічними коливаннями?
20. Які коливання називаються вільними?
21. Що називається амплітудою коливань?
22. Що називається періодом коливань?
23. Що називається частотою коливань?
24. Що називається циклічною частотою?
25. Який вигляд має рівняння гармонічних коливань?
26. Від яких параметрів залежить частота коливань системи «вантаж — пружина»?
27. Як маса впливає на власну частоту коливань?
28. Як жорсткість пружного елемента впливає на власну частоту?
29. Чому диференціальні рівняння використовуються для математичного моделювання механічних процесів?
30. Який практичний зміст має перевірка отриманого розв'язку підстановкою в початкове рівняння?

Короткі теоретичні відомості

Диференціальне рівняння другого порядку в загальному вигляді можна записати:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

У задачах механіки незалежною змінною часто є час t , а функцією — координата $x(t)$. Тоді

$$v(t) = x'(t),$$

а

$$a(t) = x''(t).$$

Отже, якщо відоме прискорення механічного елемента,

$$x''(t) = a(t),$$

то послідовним інтегруванням можна визначити швидкість та закон руху.

Для вільних незатухаючих коливань системи «маса — пружний елемент» математична модель має вигляд

$$mx'' + kx = 0,$$

де m — маса, k — коефіцієнт жорсткості пружного елемента.

Поділивши рівняння на m , отримуємо

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Вводимо циклічну частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

а його загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Період власних коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Частота:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Розв'язування професійно орієнтованих прикладів

Приклад 1. Рух механічної ланки за сталого прискорення

Механічна ланка рухається прямолінійно з прискоренням

$$x''(t) = 4.$$

У початковий момент

$$x(0) = 2 \text{ м}, x'(0) = 3 \text{ м/с}.$$

Визначити закон руху ланки.

Розв'язання

Маємо:

$$x''(t) = 4.$$

Інтегруємо один раз:

$$x'(t) = 4t + C_1.$$

Використаємо початкову умову

$$x'(0) = 3.$$

Отже:

$$3 = C_1.$$

Тому

$$x'(t) = 4t + 3.$$

Інтегруємо ще раз:

$$x(t) = 2t^2 + 3t + C_2.$$

Використаємо умову

$$x(0) = 2.$$

Отримуємо:

$$C_2 = 2.$$

Отже, закон руху:

$$\boxed{x(t) = 2t^2 + 3t + 2.}$$

Перевірка

$$x'(t) = 4t + 3,$$

$$x''(t) = 4.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 2, x'(0) = 3.$$

Усі умови виконуються.

Відповідь

$$x(t) = 2t^2 + 3t + 2 \text{ м.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1.1. Рухом ланка механізму має прискорення $x''(t) = 6$ метрів за секунду в квадраті. Відомо, що $x(0) = 1$ метр, $x'(0) = 2$ метри за секунду. Визначити закон руху.

1.2. Повзун механізму рухається з прискоренням $x''(t) = 8$ метрів за секунду в квадраті. У початковий момент $x(0) = 3$ метри, $x'(0) = 1$ метр за секунду. Визначити закон руху.

Приклад 2. Рух за змінного прискорення

Прискорення виконавчої ланки механізму змінюється за законом

$$x''(t) = 6t.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Знайти закон руху.

Розв'язання

Інтегруємо:

$$x'(t) = 3t^2 + C_1.$$

За умовою

$$x'(0) = 2,$$

тому

$$C_1 = 2.$$

Отже:

$$x'(t) = 3t^2 + 2.$$

Інтегруємо ще раз:

$$x(t) = t^3 + 2t + C_2.$$

За умовою

$$x(0) = 1,$$

тому

$$C_2 = 1.$$

Відповідь

$$x(t) = t^3 + 2t + 1.$$

Перевірка

$$x'(t) = 3t^2 + 2,$$

$$x''(t) = 6t.$$

Початкові умови також виконуються.

Завдання для самостійного виконання за зразком

2.1. Прискорення механічної ланки задано законом $x''(t) = 4t$. Початкові умови: $x(0) = 2$ метри, $x'(0) = 1$ метр за секунду. Знайти закон руху.

2.2. Прискорення повзуна змінюється за законом $x''(t) = 8t$. Відомо, що $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$ метри за секунду. Визначити закон руху.

Приклад 3. Рух за лінійно змінного прискорення

Прискорення робочого органа механізму:

$$x''(t) = 2t + 4.$$

Відомо:

$$x(0) = 0, x'(0) = 2.$$

Знайти закон руху.

Розв'язання

Перше інтегрування:

$$x'(t) = t^2 + 4t + C_1.$$

Із початкової умови:

$$x'(0) = C_1 = 2.$$

Тому:

$$x'(t) = t^2 + 4t + 2.$$

Друге інтегрування:

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 2t + C_2.$$

Оскільки

$$x(0) = 0,$$

маємо

$$C_2 = 0.$$

Відповідь

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 2t.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

3.1. Прискорення ланки задано функцією $x''(t) = 4t + 2$. Початкові умови: $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$. Визначити закон руху.

3.2. Прискорення механічного елемента $x''(t) = 6t + 4$. У початковий момент $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Визначити закон руху.

Приклад 4. Вільні коливання механічної системи

Механічна система здійснює вільні незатухаючі коливання, які описуються рівнянням

$$x'' + 9x = 0.$$

Знайти загальний закон коливань.

Розв'язання

Складаємо характеристичне рівняння:

$$r^2 + 9 = 0.$$

Звідси:

$$r^2 = -9,$$

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

Тому загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Циклічна частота:

$$\omega = 3.$$

Період:

$$T = \frac{2\pi}{3}.$$

Відповідь

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t, T = \frac{2\pi}{3}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

4.1. Вільні коливання механічної системи описуються рівнянням $x'' + 16x = 0$. Знайти загальний закон руху та період.

4.2. Коливання механічного елемента описуються рівнянням $x'' + 25x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період коливань.

Приклад 5. Коливання за заданих початкових умов

Коливання механічної системи описуються рівнянням

$$x'' + 4x = 0.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 3, x'(0) = 0.$$

Знайти закон коливань.

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 4 = 0.$$

Корені:

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Використаємо першу початкову умову:

$$x(0) = C_1 = 3.$$

Отже,

$$C_1 = 3.$$

Знайдемо похідну:

$$x'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

При $t = 0$:

$$x'(0) = 2C_2 = 0.$$

Тому:

$$C_2 = 0.$$

Відповідь

$$\boxed{x(t) = 3 \cos 2 t.}$$

Перевірка

$$x''(t) = -12 \cos 2 t.$$

Тоді:

$$x'' + 4x = -12 \cos 2 t + 12 \cos 2 t = 0.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

5.1. Розв'язати задачу $x'' + 9x = 0$, якщо $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

5.2. Розв'язати задачу $x'' + 16x = 0$, якщо $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$.

Приклад 6. Коливання за ненульової початкової швидкості

Механічний елемент здійснює коливання:

$$x'' + 4x = 0.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 6.$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 2 t + C_2 \sin 2 t.$$

Із першої умови:

$$C_1 = 0.$$

Похідна:

$$x'(t) = 2C_2 \cos 2 t.$$

При $t = 0$:

$$2C_2 = 6.$$

Отже:

$$C_2 = 3.$$

Відповідь

$$\boxed{x(t) = 3 \sin 2 t.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

6.1. Для системи $x'' + 9x = 0$ задано $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$. Визначити закон коливань.

6.2. Для системи $x'' + 25x = 0$ задано $x(0) = 0$, $x'(0) = 10$. Визначити закон коливань.

Приклад 7. Визначення параметрів системи «маса — пружина»

Маса рухомої частини механічної системи становить

$$m = 4 \text{ кг},$$

а жорсткість пружного елемента

$$k = 100 \text{ Н/м}.$$

Визначити циклічну частоту та період власних коливань.

Розв'язання

Рівняння руху:

$$mx'' + kx = 0.$$

Підставляємо:

$$4x'' + 100x = 0.$$

Ділимо на 4:

$$x'' + 25x = 0.$$

Отже:

$$\omega^2 = 25,$$

$$\omega = 5 \text{ рад/с}.$$

Період:

$$T = \frac{2\pi}{5}.$$

Чисельно:

$$T \approx 1,257 \text{ с}.$$

Відповідь

$\omega = 5 \text{ рад/с}, T \approx 1,257 \text{ с}.$
--

Завдання для самостійного виконання за зразком

7.1. Маса рухомого елемента $m = 2$ кілограми, жорсткість пружини $k = 50$ ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.

7.2. Маса механічного елемента $m = 5$ кілограмів, жорсткість пружного елемента $k = 125$ ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.

Приклад 8. Закон руху вантажу на пружині

Вантаж масою

$$m = 2 \text{ кг}$$

закріплено на пружині жорсткістю

$$k = 18 \text{ Н/м.}$$

У початковий момент вантаж відхилено від положення рівноваги на 0,1 метра та відпущено без початкової швидкості.

Знайти закон коливань.

Розв'язання

Рівняння:

$$mx'' + kx = 0.$$

Підставимо значення:

$$2x'' + 18x = 0.$$

Ділимо на 2:

$$x'' + 9x = 0.$$

Тому:

$$\omega = 3.$$

Загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 0,1, \quad x'(0) = 0.$$

З першої умови:

$$C_1 = 0,1.$$

З другої:

$$C_2 = 0.$$

Відповідь

$$x(t) = 0,1 \cos 3 t \text{ м.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

8.1. Вантаж масою 4 кілограми закріплений на пружині жорсткістю 64 ньютони на метр. Початкове відхилення становить 0,05 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти закон коливань.

8.2. Маса рухомого елемента дорівнює 3 кілограми, жорсткість пружини — 75 ньютонів на метр. Елемент відхилено на 0,08 метра та відпущено без початкової швидкості. Знайти закон коливань.

Приклад 9. Визначення жорсткості за заданою частотою

Механічна система масою $m = 5$ кілограмів повинна мати циклічну частоту власних коливань

$$\omega = 4 \text{ рад/с.}$$

Визначити необхідну жорсткість пружного елемента.

Розв'язання

Використаємо співвідношення:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Піднесемо до квадрата:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Звідси:

$$k = m\omega^2.$$

Підставимо значення:

$$k = 5 \cdot 4^2 = 80.$$

Відповідь

$$k = 80 \text{ Н/м.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

9.1. Маса механічної системи $m = 3$ кілограми, необхідна циклічна частота $\omega = 5$ рад/с. Визначити жорсткість пружини.

9.2. Маса рухомого елемента $m = 8$ кілограмів, циклічна частота $\omega = 5$ рад/с. Визначити необхідну жорсткість пружного елемента.

Приклад 10. Визначення маси механічної системи

Жорсткість пружного елемента становить

$$k = 200 \text{ Н/м},$$

а циклічна частота власних коливань системи

$$\omega = 5 \text{ рад/с}.$$

Визначити масу рухомого елемента.

Розв'язання

Маємо:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Звідси:

$$m = \frac{k}{\omega^2}.$$

Підставляємо:

$$m = \frac{200}{25} = 8.$$

Відповідь

$$\boxed{m = 8 \text{ кг.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

10.1. Жорсткість пружини $k = 144$ ньютони на метр, циклічна частота $\omega = 5$ рад/с. Визначити масу.

10.2. Жорсткість пружного елемента $k = 300$ ньютонів на метр, циклічна частота $\omega = 5$ рад/с. Визначити масу рухомої частини.

Приклад 11. Коливання з ненульовим початковим зміщенням і швидкістю

Механічна система описується рівнянням

$$x'' + 4x = 0.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 4.$$

Визначити закон коливань.

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Перша умова:

$$x(0) = C_1 = 2.$$

Отже:

$$C_1 = 2.$$

Знайдемо похідну:

$$x'(t) = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t.$$

При $t = 0$:

$$x'(0) = 2C_2 = 4.$$

Отже:

$$C_2 = 2.$$

Відповідь

$$x(t) = 2 \cos 2t + 2 \sin 2t.$$

Перевірка

Підстановка у рівняння дає:

$$x'' + 4x = 0.$$

Початкові умови також виконуються.

Завдання для самостійного виконання за зразком

11.1. Розв'язати задачу $x'' + 9x = 0$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$.

11.2. Розв'язати задачу $x'' + 16x = 0$, якщо $x(0) = 2$, $x'(0) = 8$.

Приклад 12. Комплексна професійна задача

Рухомий елемент механізму масою

$$m = 4 \text{ кг}$$

закріплений на пружному елементі жорсткістю

$$k = 36 \text{ Н/м.}$$

У початковий момент його зміщено на 0,2метра від положення рівноваги та надано початкову швидкість 0,3метра за секунду.

Визначити диференціальне рівняння руху, циклічну частоту, період та закон коливань.

Розв'язання

Математична модель:

$$mx'' + kx = 0.$$

Підставимо параметри:

$$4x'' + 36x = 0.$$

Після ділення на 4:

$$x'' + 9x = 0.$$

Отже:

$$\omega = 3 \text{ рад/с.}$$

Період:

$$T = \frac{2\pi}{3} \approx 2,094 \text{ с.}$$

Загальний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Початкові умови:

$$x(0) = 0,2, \quad x'(0) = 0,3.$$

Із першої умови:

$$C_1 = 0,2.$$

Похідна:

$$x'(t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t.$$

При $t = 0$:

$$3C_2 = 0,3.$$

Тому:

$$C_2 = 0,1.$$

Отже:

$$x(t) = 0,2 \cos 3 t + 0,1 \sin 3 t.$$

Відповідь

Диференціальне рівняння:

$$x'' + 9x = 0.$$

Циклічна частота:

$$\omega = 3 \text{ рад/с.}$$

Період:

$$T \approx 2,094 \text{ с.}$$

Закон руху:

$$x(t) = 0,2 \cos 3 t + 0,1 \sin 3 t \text{ м.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

12.1. Рухомий елемент масою 2кілограми закріплений на пружині жорсткістю 32ньютони на метр. Початкове зміщення 0,1метра, початкова швидкість 0,4метра за секунду. Скласти диференціальне рівняння, визначити циклічну частоту, період та закон коливань.

12.2. Механічна система має масу 5кілограмів і жорсткість пружного елемента 125ньютонів на метр. Початкове зміщення становить 0,08метра, початкова швидкість — 0,5метра за секунду. Визначити рівняння руху, циклічну частоту, період і закон коливань.

Завдання для самостійного розв'язування на занятті

1. Рухома ланка має прискорення $x'' = 6$. Відомо, що $x(0) = 2$, $x'(0) = 4$. Знайти закон руху.
2. Прискорення повзуна задано функцією $x''(t) = 4t$. Відомо $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. Визначити закон руху.
3. Знайти загальний розв'язок рівняння $x'' + 16x = 0$.
4. Розв'язати задачу $x'' + 9x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

5. Маса механічної системи $m = 4$ кілограми, жорсткість $k = 64$ ньютони на метр. Визначити циклічну частоту та період.
6. Жорсткість пружини $k = 180$ ньютонів на метр, циклічна частота $\omega =$ брадіанів за секунду. Визначити масу системи.
7. Маса механічної системи $m = 6$ кілограмів, необхідна циклічна частота $\omega = 5$ брадіанів за секунду. Визначити жорсткість.
8. Система описується рівнянням $x'' + 25x = 0$, $x(0) = 0,1$, $x'(0) = 0$. Визначити закон коливань.

Типові помилки

1. Неправильне визначення порядку диференціального рівняння.
2. Втрата однієї довільної сталої під час дворазового інтегрування.
3. Неправильне використання початкових умов.
4. Підстановка початкової координати замість початкової швидкості.
5. Неправильне диференціювання тригонометричних функцій.
6. Помилка під час складання характеристичного рівняння.
7. Неправильне визначення циклічної частоти.
8. Плутання циклічної частоти та звичайної частоти.
9. Неправильне визначення періоду.
10. Плутання маси та жорсткості у формулі власної частоти.
11. Відсутність одиниць вимірювання.
12. Неправильне складання математичної моделі механічної системи.
13. Відсутність перевірки початкових умов.
14. Відсутність перевірки розв'язку підстановкою у диференціальне рівняння.
15. Відсутність фізичного висновку щодо отриманого результату.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

У кожному варіанті міститься **п'ять професійно орієнтованих задач зі спеціальності G9 «Прикладна механіка»:**

1. визначення закону руху механічної ланки за заданим прискоренням;

2. розв'язування рівняння вільних коливань;
3. розв'язування задачі Коші для коливальної системи;
4. визначення параметрів системи «маса — пружний елемент»;
5. комплексне математичне моделювання механічного процесу.

Варіант 1

Задача 1. Прискорення повзуна механізму є сталим і дорівнює $x''(t) = 4$ метри за секунду в квадраті. У початковий момент $x(0) = 2$ метри, $x'(0) = 3$ метри за секунду. Визначити закон руху повзуна.

Задача 2. Вільні коливання механічного елемента описуються рівнянням $x'' + 9x = 0$. Знайти загальний закон коливань, циклічну частоту та період.

Задача 3. Механічна система описується рівнянням $x'' + 4x = 0$. Відомо, що $x(0) = 3$ метри, $x'(0) = 0$. Визначити частинний закон коливань.

Задача 4. Маса рухомого елемента дорівнює 4 кілограми, жорсткість пружини — 100 ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період власних коливань.

Задача 5. Вантаж масою 2 кілограми закріплений на пружині жорсткістю 18 ньютонів на метр. Початкове зміщення становить 0,1 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон коливань.

Варіант 2

Задача 1. Прискорення механічної ланки $x''(t) = 6$ метрів за секунду в квадраті. Відомо $x(0) = 1$ метр, $x'(0) = 2$ метри за секунду. Визначити закон руху.

Задача 2. Вільні коливання системи описуються рівнянням $x'' + 16x = 0$. Знайти загальний закон коливань, циклічну частоту і період.

Задача 3. Розв'язати задачу $x'' + 9x = 0$, якщо $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

Задача 4. Маса механічного елемента $m = 2$ кілограми, жорсткість пружини $k = 50$ ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту і період.

Задача 5. Маса рухомого елемента становить 4 кілограми, жорсткість пружини — 64 ньютони на метр. Початкове зміщення 0,05 метра, початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти рівняння руху та визначити закон коливань.

Варіант 3

Задача 1. Повзун рухається з прискоренням $x''(t) = 8$ метрів за секунду в квадраті. Відомо $x(0) = 3$ метри, $x'(0) = 1$ метр за секунду. Знайти закон руху.

Задача 2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 25x = 0$. Визначити загальний розв'язок, циклічну частоту та період.

Задача 3. Розв'язати $x'' + 16x = 0$, якщо $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$.

Задача 4. Маса системи 5 кілограмів, жорсткість 125 ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.

Задача 5. Механічна система масою 3 кілограми має пружину жорсткістю 75 ньютонів на метр. Початкове зміщення 0,08 метра, початкова швидкість нульова. Знайти закон коливань.

Варіант 4

1. Прискорення ланки задано функцією $x''(t) = 4t$. Початкові умови: $x(0) = 2$ метри, $x'(0) = 1$ метр за секунду. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання задані рівнянням $x'' + 36x = 0$. Визначити загальний закон коливань та період.
3. Розв'язати задачу $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$.
4. Маса системи 3 кілограми, жорсткість пружини 75 ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса елемента 5 кілограмів, жорсткість 80 ньютонів на метр, початкове зміщення 0,1 метра, початкова швидкість нульова. Скласти рівняння та знайти закон коливань.

Варіант 5

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 8t$. Початкові умови: $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$ метри за секунду. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 49x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 9x = 0$, якщо $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$.
4. Маса системи 4 кілограми, жорсткість 144 ньютони на метр. Визначити циклічну частоту і період.
5. Рухомий елемент масою 2 кілограми закріплений на пружині жорсткістю 32 ньютони на метр. Початкове зміщення 0,1 метра, початкова швидкість 0,4 метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 6

1. Прискорення робочого органа $x''(t) = 2t + 4$. Відомо $x(0) = 0$, $x'(0) =$
2. Знайти закон руху.
2. Коливання системи описуються рівнянням $x'' + 64x = 0$. Визначити загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 25x = 0$, якщо $x(0) = 0$, $x'(0) = 10$.
4. Маса механічного елемента 8кілограмів, жорсткість 200ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту і період.
5. Механічна система масою 5кілограмів має пружину жорсткістю 125ньютонів на метр. Початкове зміщення 0,08метра, початкова швидкість 0,5метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 7

1. Прискорення ланки $x''(t) = 4t + 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 81x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 9x = 0$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$.
4. Маса системи 6кілограмів, жорсткість 150ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Система масою 4кілограми має пружний елемент жорсткістю 100ньютонів на метр. Початкове зміщення 0,12метра, початкова швидкість нульова. Знайти закон коливань.

Варіант 8

1. Прискорення механічного елемента $x''(t) = 6t + 4$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 100x = 0$. Знайти загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 16x = 0$, якщо $x(0) = 2$, $x'(0) = 8$.
4. Маса системи 5кілограмів, жорсткість 180ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.

5. Вантаж масою 3кілограми закріплено на пружині жорсткістю 48ньютонів на метр. Початкове зміщення 0,15метра, початкова швидкість нульова. Визначити закон коливань.

Варіант 9

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 3t + 6$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 121x = 0$. Визначити загальний розв'язок і період.
3. Розв'язати $x'' + 25x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$.
4. Маса системи 4кілограми, жорсткість 196ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса рухомого елемента 6кілограмів, жорсткість пружини 216ньютонів на метр, початкове зміщення 0,05метра, початкова швидкість 0,3метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 10

1. Прискорення механічної ланки $x''(t) = 5t + 5$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання задані рівнянням $x'' + 144x = 0$. Визначити загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 36x = 0$, якщо $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
4. Маса системи 8кілограмів, жорсткість 288ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса елемента 2кілограми, жорсткість пружини 50ньютонів на метр, початкове зміщення 0,2метра, початкова швидкість нульова. Визначити закон коливань.

Варіант 11

1. Прискорення робочого органа $x''(t) = 2t + 6$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 4$. Знайти закон руху.
2. Система описується рівнянням $x'' + 16x = 0$. Знайти загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 4$.

4. Маса 5кілограмів, жорсткість 245ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса системи 4кілограми, жорсткість 64ньютони на метр, початкове зміщення 0,1метра, початкова швидкість 0,2метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 12

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 4t + 8$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$. Визначити закон руху.
2. Коливання задані рівнянням $x'' + 25x = 0$. Визначити загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 9x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 3$.
4. Маса 7кілограмів, жорсткість 175ньютонів на метр. Визначити параметри коливань.
5. Система масою 5кілограмів має пружину жорсткістю 180ньютонів на метр; $x(0) = 0,08$ метра, $x'(0) = 0$. Скласти рівняння і знайти закон коливань.

Варіант 13

1. Прискорення ланки $x''(t) = 6t + 2$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 1$. Визначити закон руху.
2. Рівняння коливань $x'' + 36x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 16x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 4$.
4. Маса 3кілограми, жорсткість 108ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса 2кілограми, жорсткість 72ньютони на метр, початкове зміщення 0,12метра, початкова швидкість 0,3метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 14

1. Прискорення механічного елемента $x''(t) = 8t + 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 49x = 0$. Знайти загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 25x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 5$.

4. Маса 4кілограми, жорсткість 144ньютони на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса 3кілограми, жорсткість 147ньютонів на метр, $x(0) = 0,1$ метра, $x'(0) = 0$. Знайти закон коливань.

Варіант 15

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 10t + 2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 64x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 36x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$.
4. Маса 5кілограмів, жорсткість 320ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту і період.
5. Маса системи 4кілограми, жорсткість 256ньютонів на метр, $x(0) = 0,05$ метра, $x'(0) = 0,4$ метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 16

1. Прискорення робочого органа $x''(t) = 3t + 3$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$. Визначити закон руху.
2. Рівняння коливань $x'' + 81x = 0$. Знайти загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 49x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
4. Маса 6кілограмів, жорсткість 216ньютонів на метр. Визначити параметри власних коливань.
5. Маса 5кілограмів, жорсткість 245ньютонів на метр, початкове зміщення 0,1метра, початкова швидкість 0,7метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 17

1. Прискорення механічної ланки $x''(t) = 5t + 10$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$. Знайти закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 100x = 0$. Визначити загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 64x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 8$.
4. Маса 8кілограмів, жорсткість 392ньютони на метр. Визначити циклічну частоту і період.

5. Система масою 2кілограми має пружину жорсткістю 128ньютонів на метр. Початкове зміщення 0,08метра, початкова швидкість нульова. Визначити закон коливань.

Варіант 18

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 7t + 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. Визначити закон руху.
2. Рівняння вільних коливань $x'' + 121x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 81x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 9$.
4. Маса 3кілограми, жорсткість 192ньютони на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса 4кілограми, жорсткість 324ньютони на метр, $x(0) = 0,06$ метра, $x'(0) = 0,3$ метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 19

1. Прискорення робочого елемента $x''(t) = 9t + 2$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 144x = 0$. Визначити загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 100x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 10$.
4. Маса 5кілограмів, жорсткість 405ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса системи 6кілограмів, жорсткість 600ньютонів на метр, початкове зміщення 0,05метра, початкова швидкість нульова. Знайти закон коливань.

Варіант 20

1. Прискорення ланки $x''(t) = 4t + 6$, $x(0) = 5$, $x'(0) = 2$. Знайти закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 169x = 0$. Знайти загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 121x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
4. Маса 7кілограмів, жорсткість 343ньютони на метр. Визначити параметри коливань.

5. Маса 3кілограми, жорсткість 300ньютонів на метр, $x(0) = 0,1$ метра, $x'(0) = 0,5$ метра за секунду. Визначити закон коливань.

Варіант 21

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 6t + 8$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$. Визначити закон руху.
2. Рівняння коливань $x'' + 196x = 0$. Визначити загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 144x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 12$.
4. Маса 4кілограми, жорсткість 400ньютонів на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса 5кілограмів, жорсткість 720ньютонів на метр, початкове зміщення 0,04метра, початкова швидкість нульова. Визначити закон коливань.

Варіант 22

1. Прискорення механічної ланки $x''(t) = 8t + 6$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 4$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 225x = 0$. Знайти загальний розв'язок та період.
3. Розв'язати $x'' + 169x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 13$.
4. Маса 6кілограмів, жорсткість 600ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту і період.
5. Маса 2кілограми, жорсткість 450ньютонів на метр, $x(0) = 0,08$ метра, $x'(0) = 0,3$ метра за секунду. Визначити закон коливань.

Варіант 23

1. Прискорення робочого органа $x''(t) = 10t + 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$. Знайти закон руху.
2. Рівняння коливань $x'' + 256x = 0$. Визначити загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 196x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 14$.
4. Маса 8кілограмів, жорсткість 800ньютонів на метр. Визначити параметри власних коливань.
5. Маса системи 4кілограми, жорсткість 1024ньютони на метр, $x(0) = 0,03$ метра, $x'(0) = 0$. Знайти закон коливань.

Варіант 24

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 12t + 2$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 324x = 0$. Визначити загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 225x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
4. Маса 5кілограмів, жорсткість 720ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса 3кілограми, жорсткість 972ньютони на метр, початкове зміщення 0,05метра, початкова швидкість 0,2метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 25

1. Прискорення ланки $x''(t) = 5t + 8$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 1$. Визначити закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 400x = 0$. Знайти загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 256x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 16$.
4. Маса 4кілограми, жорсткість 576ньютонів на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса 6кілограмів, жорсткість 1536ньютонів на метр, $x(0) = 0,04$ метра, $x'(0) = 0$. Визначити закон коливань.

Варіант 26

1. Прискорення механічного елемента $x''(t) = 7t + 6$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$. Визначити закон руху.
2. Рівняння коливань $x'' + 64x = 0$. Знайти загальний закон і період.
3. Розв'язати $x'' + 36x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 12$.
4. Маса 9кілограмів, жорсткість 441ньютон на метр. Визначити циклічну частоту та період.
5. Маса системи 5кілограмів, жорсткість 320ньютонів на метр, $x(0) = 0,12$ метра, $x'(0) = 0,4$ метра за секунду. Знайти закон коливань.

Варіант 27

1. Прискорення повзуна $x''(t) = 9t + 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 6$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 81x = 0$. Визначити загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 49x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 7$.
4. Маса 7кілограмів, жорсткість 448ньютонів на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса 4кілограми, жорсткість 324ньютони на метр, початкове зміщення 0,09метра, початкова швидкість нульова. Знайти закон коливань.

Варіант 28

1. Прискорення робочого органа $x''(t) = 11t + 2$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$. Знайти закон руху.
2. Вільні коливання описуються рівнянням $x'' + 100x = 0$. Визначити загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 64x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 8$.
4. Маса 8кілограмів, жорсткість 648ньютонів на метр. Визначити циклічну частоту і період.
5. Маса 2кілограми, жорсткість 200ньютонів на метр, $x(0) = 0,1$ метра, $x'(0) = 0,5$ метра за секунду. Визначити закон коливань.

Варіант 29

1. Прискорення механічної ланки $x''(t) = 4t + 10$, $x(0) = 5$, $x'(0) = 1$. Визначити закон руху.
2. Коливання описуються рівнянням $x'' + 121x = 0$. Знайти загальний закон та період.
3. Розв'язати $x'' + 81x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 18$.
4. Маса 6кілограмів, жорсткість 600ньютонів на метр. Визначити параметри коливань.
5. Маса системи 5кілограмів, жорсткість 605ньютонів на метр, початкове зміщення 0,06метра, початкова швидкість 0,22метра за секунду. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон коливань.

Варіант 30

Задача 1. Прискорення виконавчої ланки механізму змінюється за законом $x''(t) = 6t + 12$ метрів за секунду в квадраті. У початковий момент координата ланки дорівнює $x(0) = 2$ метри, а її швидкість $x'(0) = 4$ метри за секунду. Визначити функцію швидкості та закон руху ланки.

Задача 2. Вільні незатухаючі коливання механічної системи описуються диференціальним рівнянням $x'' + 144x = 0$. Знайти загальний закон коливань, циклічну частоту та період власних коливань.

Задача 3. Рух механічного елемента описується рівнянням $x'' + 100x = 0$. У початковий момент $x(0) = 2$ метри, $x'(0) = 10$ метрів за секунду. Визначити частинний закон коливань та перевірити виконання початкових умов.

Задача 4. Маса рухомого елемента механічної системи становить 10 кілограмів, а жорсткість пружного елемента — 1000 ньютонів на метр. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань, визначити циклічну частоту та період.

Задача 5. Рухомий елемент масою 4 кілограми закріплений на пружному елементі жорсткістю 576 ньютонів на метр. У початковий момент елемент зміщений від положення рівноваги на 0,08 метра та має початкову швидкість 0,24 метра за секунду. Скласти диференціальне рівняння руху, визначити циклічну частоту, період та закон вільних коливань.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

У кожній задачі здобувач освіти повинен:

1. Записати повну умову та вихідні дані.
2. Визначити шукані величини.
3. Скласти або правильно записати диференціальне рівняння.
4. Визначити тип рівняння.
5. Обрати відповідний спосіб розв'язування.
6. Знайти загальний розв'язок.
7. За наявності початкових умов визначити довільні сталі.
8. Отримати частинний розв'язок.
9. Для коливального процесу визначити циклічну частоту та період, якщо це передбачено умовою.

- 10.Перевірити виконання початкових умов.
- 11.За можливості перевірити розв'язок підстановкою в початкове диференціальне рівняння.
- 12.Записати одиниці вимірювання фізичних величин.
- 13.Сформулювати короткий висновок про фізичний зміст отриманого результату.

Критерії оцінювання індивідуального завдання

Максимальна кількість — **2 бали**.

2 бали — усі п'ять завдань виконано правильно та повністю; математичні моделі складено правильно; диференціальні рівняння розв'язано послідовно; початкові умови використано правильно; визначено необхідні параметри механічних систем; результати перевірено; наведено одиниці вимірювання та сформульовано професійні висновки.

1,5 бала — способи розв'язування обрано правильно, основні математичні моделі складено правильно, але допущено окремі обчислювальні або оформлювальні помилки.

1 бал — правильно виконано основну частину завдань, але є помилки у використанні початкових умов, знаходженні сталих, визначенні параметрів коливань або оформленні результатів.

0,5 бала — виконано лише окремі елементи завдань, але здобувач освіти демонструє розуміння принципу побудови та розв'язування математичної моделі механічного процесу.

0 балів — завдання не виконано або використані математичні методи не відповідають поставленим задачам.

Підведення підсумків практичного заняття

У результаті виконання практичного заняття здобувачі освіти повинні усвідомити, що диференціальне рівняння другого порядку є не лише математичним об'єктом, а й важливим інструментом опису механічних процесів.

У задачах поступального руху друга похідна координати визначає прискорення:

$$x''(t) = a(t),$$

а послідовне інтегрування дозволяє перейти від прискорення до швидкості та закону руху.

У задачах про вільні коливання система «маса — пружний елемент» приводить до математичної моделі

$$mx'' + kx = 0,$$

параметри якої безпосередньо визначають характер коливального процесу.

Таким чином, математичне моделювання дозволяє встановити кількісний зв'язок між **масою, жорсткістю, початковим положенням, початковою швидкістю та характером руху механічної системи.**

Питання для підготовки до практичного заняття

1. Що називається диференціальним рівнянням другого порядку?
2. Що називається загальним розв'язком?
3. Що називається частинним розв'язком?
4. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок рівняння другого порядку?
5. Що називається задачею Коші?
6. Які початкові умови задають для рівняння другого порядку?
7. Який механічний зміст має перша похідна координати?
8. Який механічний зміст має друга похідна координати?
9. Як знайти швидкість за заданим прискоренням?
10. Як знайти закон руху за заданою швидкістю?
11. Навіщо використовуються початкові умови?
12. Як перевірити отриманий закон руху?
13. Що називається механічними коливаннями?
14. Які коливання називаються вільними?
15. Які коливання називаються гармонічними?
16. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань?
17. Який вигляд має характеристичне рівняння для $x'' + \omega^2 x = 0$?

18. Який загальний розв'язок цього рівняння?
19. Що називається циклічною частотою?
20. Як визначається період коливань?
21. Як визначається частота коливань?
22. Як пов'язані циклічна частота і період?
23. Як визначити циклічну частоту системи «маса — пружина»?
24. Як визначити жорсткість пружини за заданою масою і циклічною частотою?
25. Як визначити масу системи за жорсткістю і циклічною частотою?
26. Як збільшення маси впливає на власну частоту коливань?
27. Як збільшення жорсткості впливає на власну частоту коливань?
28. Як початкове зміщення впливає на закон коливань?
29. Як початкова швидкість впливає на закон коливань?
30. Чому диференціальні рівняння є важливим засобом математичного моделювання у прикладній механіці?

Домашнє завдання

Виконати **відповідний варіант індивідуального завдання**. Усі п'ять задач оформити повністю: записати вихідні дані, математичну модель, диференціальне рівняння, послідовність розв'язування, використання початкових умов, отриманий результат, перевірку та короткий професійний висновок.

Література

1. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка». Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. Збірник безпосередньо призначений для здобувачів спеціальності «Прикладна механіка».
2. Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А. *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум* : навчальний посібник для здобувачів ступеня

бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.

3. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
4. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
5. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.

Практичне заняття № 21

МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ № 5

Змістовий модуль 5. Диференціальні рівняння

Тема: Розв’язування завдань за модулем 5

Навчальна дисципліна: «Вища математика»

Спеціальність: G9 «Прикладна механіка»

Вид заняття: практичне заняття, модульний контроль

Тривалість: 2 години

Максимальна кількість балів: 4 бали

Мета

Перевірити рівень засвоєння здобувачами освіти теоретичних знань і практичних умінь із тем змістового модуля 5 «Диференціальні рівняння»; установити рівень сформованості вмінь визначати тип диференціального рівняння, розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, лінійні диференціальні рівняння першого порядку, задачі Коші, найпростіші диференціальні рівняння другого порядку та задачі з початковими умовами.

Особливу увагу приділити вмінню застосовувати диференціальні рівняння для математичного моделювання механічних процесів, характерних для спеціальності G9 «Прикладна механіка»: поступального руху ланок і повзунів механізмів, зміни швидкості та прискорення, руху робочих органів машин, вільних коливань механічних систем, пружних елементів і систем «маса — пружина».

Оснащення

Індивідуальні картки модульного контролю, аркуші для виконання розрахунків, калькулятор, довідкові матеріали з основних формул диференціювання та інтегрування.

План проведення практичного заняття

1. Організаційний момент.
2. Повідомлення теми, мети та порядку проведення модульного контролю.

3. Ознайомлення здобувачів освіти з вимогами до виконання роботи.
4. Отримання індивідуальних варіантів.
5. Самостійне виконання завдань модульного контролю.
6. Перевірка правильності отриманих результатів.
7. Оцінювання виконаних робіт.
8. Аналіз типових помилок.
9. Підведення підсумків змістового модуля 5.

Структура модульного контролю

Кожний індивідуальний варіант містить **шість завдань**:

1. диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними;
2. лінійне диференціальне рівняння першого порядку;
3. задача Коші для диференціального рівняння першого порядку;
4. диференціальне рівняння другого порядку;
5. задача Коші для диференціального рівняння другого порядку;
6. професійно орієнтована задача для спеціальності G9 «Прикладна механіка».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

Завдання 1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = 2xy.$$

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y' + 2y = 4x.$$

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = 3xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' = 6x.$$

Завдання 5. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' = 4, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Прискорення повзуна механізму є сталим і дорівнює

$$a(t) = 4 \text{ м/с}^2.$$

У початковий момент часу повзун знаходився в положенні $x(0) = 2\text{м}$ і мав швидкість $x'(0) = 3\text{м/с}$. Скласти та розв'язати диференціальне рівняння руху. Визначити закон руху $x(t)$.

Варіант 2

Завдання 1.

$$y' = 3xy.$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 6x.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 3.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Робоча ланка механізму здійснює прямолінійний рух із прискоренням

$$a(t) = 6t.$$

У початковий момент $x(0) = 1\text{м}$, $x'(0) = 2\text{м/с}$. Скласти диференціальне рівняння руху та визначити закон переміщення ланки $x(t)$.

Варіант 3

Завдання 1.

$$y' = 4xy.$$

Завдання 2.

$$y' + y = 2x.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 1.$$

Завдання 4.

$$y'' = 4x + 2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Завдання 6. Переміщення виконавчої ланки механізму описується рівнянням

$$x''(t) = 2t + 4.$$

Відомо, що $x(0) = 0$ м, $x'(0) = 2$ м/с. Визначити закон руху виконавчої ланки.

Варіант 4**Завдання 1.**

$$y' = 5xy.$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 6x.$$

Завдання 3.

$$y' = xy, y(0) = 4.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 8, y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Механічна система здійснює вільні гармонічні коливання, які описуються рівнянням

$$x'' + 9x = 0.$$

Знайти загальний закон коливального руху, циклічну частоту та період коливань.

Варіант 5**Завдання 1.**

$$y' = 2x(1 + y).$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 8x.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 1.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x + 4.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4, y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

Завдання 6. Коливання робочого органа механізму описуються рівнянням

$$x'' + 4x = 0.$$

У початковий момент $x(0) = 3\text{см}$, $x'(0) = 0$. Визначити закон коливального руху робочого органа.

Варіант 6**Завдання 1.**

$$y' = 3x(1 + y).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 2x.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4.

$$y'' = 12x^2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Коливальний рух механічної ланки описується рівнянням

$$x'' + 4x = 0.$$

Відомо, що $x(0) = 0\text{см}$, $x'(0) = 6\text{см/с}$. Визначити закон руху ланки та період її коливань.

Варіант 7**Завдання 1.**

$$y' = 4x(2 + y).$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 3x.$$

Завдання 3.

$$y' = xy, y(0) = 5.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x^2 + 2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t + 4, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Механічна система «маса — пружина» має масу $m = 4$ кг та жорсткість пружини $k = 100$ Н/м. Опором середовища знехтувати. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань, визначити циклічну частоту та період коливань.

Варіант 8**Завдання 1.**

$$y' = 2x(y + 3).$$

Завдання 2.

$$y' + 5y = 10x.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 4.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t, y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Механічна система має масу $m = 2$ кг та жорсткість пружини $k = 18$ Н/м. Початкове відхилення становить $x(0) = 0,1$ м, початкова швидкість $x'(0) = 0$. Скласти та розв'язати рівняння вільних коливань.

Варіант 9**Завдання 1.**

$$y' = 5x(y + 1).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 8x.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x^2 + 2x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

Завдання 6. Маса рухомої ланки механічної системи становить $m = 5$ кг. Необхідно забезпечити власну циклічну частоту коливань $\omega = 4$ рад/с. Визначити необхідну жорсткість пружного елемента k та записати диференціальне рівняння вільних коливань системи.

Варіант 10**Завдання 1.**

$$y' = 2xy^2.$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 4x.$$

Завдання 3.

$$y' = xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4.

$$y'' = 4x^3.$$

Завдання 5.

$$y'' = 3t^2, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Жорсткість пружного елемента механічної системи становить $k = 200$ Н/м. Власна циклічна частота повинна дорівнювати $\omega = 5$ рад/с. Визначити масу рухомої частини системи та записати рівняння її вільних коливань.

Варіант 11**Завдання 1.**

$$y' = 3xy^2.$$

Завдання 2.

$$y' + y = 4x.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 5.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^3.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t^2, y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Коливання механічного елемента описуються рівнянням

$$x'' + 4x = 0.$$

Початкові умови мають вигляд $x(0) = 2\text{см}$, $x'(0) = 4\text{см/с}$. Визначити закон коливального руху та період коливань.

Варіант 12**Завдання 1.**

$$y' = 4xy^2.$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 9x.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 1.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x^3 + 2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t^2 + 2, y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Маса робочої ланки коливальної системи дорівнює $m = 4\text{кг}$, жорсткість пружного елемента $k = 36\text{Н/м}$. Початкові умови: $x(0) = 0,2\text{м}$, $x'(0) = 0,3\text{м/с}$. Скласти диференціальне рівняння та визначити закон вільних коливань, циклічну частоту і період.

Варіант 13**Завдання 1.**

$$y' = x(y + 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 10x.$$

Завдання 3.

$$y' = 5xy, y(0) = 1.$$

Завдання 4.

$$y'' = 12x^3.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t^2, y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

Завдання 6. Повзун механізму рухається з прискоренням

$$a(t) = 3t^2 + 2.$$

У початковий момент $x(0) = 0\text{м}$, $x'(0) = 1\text{м/с}$. Скласти диференціальне рівняння руху та визначити закон переміщення повзуна.

Варіант 14**Завдання 1.**

$$y' = 2x(y + 4).$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 12x.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 3.$$

Завдання 4.

$$y'' = 5x^2 + 4x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t + 6, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Механічна система масою $m = 3\text{кг}$ з'єднана з пружним елементом жорсткістю $k = 48\text{Н/м}$. Опором знехтувати. Записати диференціальне рівняння вільних коливань, визначити власну циклічну частоту та період коливань.

Варіант 15**Завдання 1.**

$$y' = 3x(y + 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 5y = 5x.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 3.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x^2 + 8x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t + 6, y(0) = 2, y'(0) = 4.$$

Завдання 6. Вільні коливання робочої ланки описуються рівнянням

$$x'' + 16x = 0.$$

Початкові умови: $x(0) = 0,05\text{м}$, $x'(0) = 0$. Визначити закон коливань, власну циклічну частоту та період.

Варіант 16**Завдання 1.**

$$y' = 4x(y + 1).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 4x + 2.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 4.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^2 + 6x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t + 2, y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

Завдання 6. Виконавча ланка механізму рухається з прискоренням

$$a(t) = 4t + 2.$$

У початковий момент ланка знаходиться в положенні $x(0) = 0,5\text{м}$ та має швидкість $x'(0) = 2\text{м/с}$. Визначити закон руху ланки.

Варіант 17**Завдання 1.**

$$y' = 5x(y + 3).$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 6x + 3.$$

Завдання 3.

$$y' = xy, y(0) = 6.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x^2 - 4x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t - 2, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Маса коливальної механічної системи становить $m = 5\text{кг}$, жорсткість пружини $k = 125\text{Н/м}$. Визначити диференціальне рівняння руху, власну циклічну частоту та період вільних коливань.

Варіант 18**Завдання 1.**

$$y' = 2x(y - 1).$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 8x + 4.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 6.$$

Завдання 4.

$$y'' = 12x^2 - 6x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 8t - 4, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Вільні коливання рухомого елемента механізму описуються рівнянням

$$x'' + 25x = 0.$$

Відомо, що $x(0) = 0$, а $x'(0) = 0,5\text{м/с}$. Визначити закон коливального руху, циклічну частоту та період.

Варіант 19**Завдання 1.**

$$y' = 3x(y - 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 6x + 4.$$

Завдання 3.

$$y' = 5xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4.

$$y'' = 4x^3 + 2x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 3t^2 + 2t, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Прискорення робочого органа машини змінюється за законом

$$a(t) = 3t^2 + 2t.$$

Початкове положення $x(0) = 0$ м, початкова швидкість $x'(0) = 2$ м/с.
Скласти диференціальне рівняння та визначити закон руху робочого органа.

Варіант 20**Завдання 1.**

$$y' = 4x(y - 1).$$

Завдання 2.

$$y' + 5y = 10x + 5.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 5.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^3 + 4x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t^2 + 2t, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Механічна коливальна система має масу $m = 2$ кг і жорсткість пружного елемента $k = 32$ Н/м. Початкове зміщення становить $x(0) = 0,08$ м, а початкова швидкість дорівнює нулю. Скласти та розв'язати диференціальне рівняння вільних коливань.

Варіант 21**Завдання 1.**

$$y' = 5x(y - 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 9x + 6.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 2.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x^3 - 2x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t^2 - 2t, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

Завдання 6. Для механічної системи «маса — пружина» відомо: $m = 6$ кг, $k = 150$ Н/м. Визначити диференціальне рівняння вільних коливань, власну циклічну частоту та період системи.

Варіант 22**Завдання 1.**

$$y' = 2x(y + 5).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 8x + 2.$$

Завдання 3.

$$y' = xy, y(0) = 7.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x^3 + 6x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t^2 + 4t, y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Завдання 6. Прискорення поступального руху механічної ланки задається функцією

$$a(t) = 2t^2 + 4t.$$

У початковий момент $x(0) = 1$ м, $x'(0) = 4$ м/с. Визначити швидкість та закон руху механічної ланки.

Варіант 23**Завдання 1.**

$$y' = 3x(y + 4).$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 12x + 8.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 7.$$

Завдання 4.

$$y'' = 12x^3 + 4x^2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t^2 + 6t, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Коливальний рух виконавчого механізму описується диференціальним рівнянням

$$x'' + 36x = 0.$$

Початкове відхилення становить $x(0) = 0,04\text{м}$, початкова швидкість $x'(0) = 0$. Визначити закон руху, власну циклічну частоту та період коливань.

Варіант 24**Завдання 1.**

$$y' = 4x(y + 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 5y = 15x + 5.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 6.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^4.$$

Завдання 5.

$$y'' = 5t^2 + 2, y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Маса рухомого елемента механічної системи дорівнює $m = 8\text{кг}$, а жорсткість пружини $k = 200\text{Н/м}$. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань та визначити власну циклічну частоту і період.

Варіант 25**Завдання 1.**

$$y' = 5x(y + 1).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 10x + 4.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 4.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x^4.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t^3, y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Прискорення повзуна механізму визначається залежністю

$$a(t) = 4t^3.$$

Початкові умови: $x(0) = 2\text{м}$, $x'(0) = 2\text{м/с}$. Визначити закон зміни швидкості та закон переміщення повзуна.

Варіант 26**Завдання 1.**

$$y' = 2x(y + 6).$$

Завдання 2.

$$y' + 3y = 12x + 3.$$

Завдання 3.

$$y' = 5xy, y(0) = 3.$$

Завдання 4.

$$y'' = 6x^4 + 2x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 3t^3 + 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Завдання 6. Вільні коливання механічного елемента описуються рівнянням

$$x'' + 49x = 0.$$

У початковий момент $x(0) = 0$, $x'(0) = 0,7\text{м/с}$. Визначити закон коливань, власну циклічну частоту та період.

Варіант 27**Завдання 1.**

$$y' = 3x(y + 5).$$

Завдання 2.

$$y' + 4y = 16x + 4.$$

Завдання 3.

$$y' = 2xy, y(0) = 8.$$

Завдання 4.

$$y'' = 8x^4 + 4x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 2t^3 + 4t, y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Механічна система складається з рухомої маси $m = 3\text{кг}$ і пружного елемента жорсткістю $k = 75\text{Н/м}$. Визначити диференціальне рівняння вільних коливань, циклічну частоту та період системи.

Варіант 28**Завдання 1.**

$$y' = 4x(y + 3).$$

Завдання 2.

$$y' + 5y = 20x + 10.$$

Завдання 3.

$$y' = 3xy, y(0) = 8.$$

Завдання 4.

$$y'' = 12x^4 - 2x.$$

Завдання 5.

$$y'' = 4t^3 - 2t, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Завдання 6. Прискорення виконавчого органа машини змінюється за законом

$$a(t) = 4t^3 - 2t.$$

У початковий момент $x(0) = 2\text{м}$, $x'(0) = 1\text{м/с}$. Визначити швидкість і закон переміщення виконавчого органа.

Варіант 29**Завдання 1.**

$$y' = 5x(y + 2).$$

Завдання 2.

$$y' + 2y = 12x + 6.$$

Завдання 3.

$$y' = 4xy, y(0) = 5.$$

Завдання 4.

$$y'' = 10x^4 + 6x^2.$$

Завдання 5.

$$y'' = 6t^3 + 2t^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Завдання 6. Коливання рухомої ланки механізму описуються рівнянням

$$x'' + 64x = 0.$$

Початкове зміщення дорівнює $x(0) = 0,03\text{м}$, початкова швидкість $x'(0) = 0$. Визначити закон вільних коливань, власну циклічну частоту та період.

Варіант 30**Завдання 1.** Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Знайти загальний розв'язок:

$$y' = 6x(y + 1).$$

Завдання 2. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Знайти загальний розв'язок:

$$y' + 3y = 15x + 6.$$

Завдання 3. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку.

Знайти частинний розв'язок:

$$y' = 5xy, y(0) = 4.$$

Завдання 4. Диференціальне рівняння другого порядку.

Знайти загальний розв'язок:

$$y'' = 12x^4 + 8x^2.$$

Завдання 5. Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку.

Знайти частинний розв'язок:

$$y'' = 8t^3 + 4t, y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

Завдання 6. Професійно орієнтована задача.

Рухомий елемент механізму масою $m = 4\text{ кг}$ з'єднаний із пружним елементом жорсткістю $k = 144\text{ Н/м}$. Опором середовища знехтувати. У початковий момент рухомий елемент відхилено від положення рівноваги на $x(0) = 0,05\text{ м}$ і відпущено без початкової швидкості, тобто $x'(0) = 0$.

Необхідно:

1. скласти диференціальне рівняння вільних коливань механічної системи;
2. визначити власну циклічну частоту;
3. знайти загальний розв'язок диференціального рівняння;
4. використати початкові умови;
5. визначити закон коливального руху $x(t)$;
6. визначити період вільних коливань механічної системи.

Вимоги до виконання модульного контролю

Під час виконання кожного завдання здобувач освіти повинен визначити тип диференціального рівняння, обґрунтовано вибрати метод його розв'язування, виконати необхідні математичні перетворення та записати загальний або частинний розв'язок відповідно до умови.

Для рівнянь із відокремлюваними змінними необхідно правильно розділити змінні, проінтегрувати обидві частини рівняння та врахувати довільну сталу.

Для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку необхідно правильно застосувати відповідний алгоритм розв'язування.

У задачах Коші необхідно спочатку знайти загальний розв'язок, а потім використати задані початкові умови для визначення довільних сталих.

Під час розв'язування професійно орієнтованої задачі необхідно встановити зв'язок між математичною моделлю та відповідним механічним процесом.

Для поступального руху використовуються співвідношення

$$v(t) = x'(t), \quad a(t) = x''(t).$$

Для найпростішої моделі вільних коливань механічної системи «маса — пружина» без урахування опору середовища використовується рівняння

$$mx'' + kx = 0,$$

де m — маса рухомого елемента, k — жорсткість пружного елемента, $x(t)$ — відхилення від положення рівноваги.

Власна циклічна частота визначається співвідношенням

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

а період вільних коливань —

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Критерії оцінювання модульного контролю № 5

Максимальна кількість балів — 4 бали.

Завдання	Зміст	Максимальна кількість балів
1	Диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними	0,50
2	Лінійне диференціальне рівняння першого порядку	0,50
3	Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку	0,50
4	Диференціальне рівняння другого порядку	0,50
5	Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку	0,75
6	Професійно орієнтована задача для G9 «Прикладна механіка»	1,25
Разом		4,00

4,00 бали — усі завдання виконано правильно та в повному обсязі; типи диференціальних рівнянь визначено правильно; методи розв’язування застосовано обґрунтовано; початкові умови використано без помилок; професійно орієнтовану задачу правильно математично змодельовано, отриманий результат має коректний фізичний зміст.

3,00–3,75 бала — здобувач освіти правильно володіє основними методами розв’язування диференціальних рівнянь, але допускає окремі незначні обчислювальні або алгебраїчні помилки.

2,00–2,75 бала — основні поняття засвоєно, однак допущено суттєві помилки під час інтегрування, визначення довільних сталих, застосування початкових умов або побудови математичної моделі механічного процесу.

1,00–1,75 бала — правильно виконано лише частину завдань; методи розв’язування диференціальних рівнянь засвоєно частково.

0–0,75 бала — більшість завдань не виконано або виконано неправильно; здобувач освіти не демонструє достатнього розуміння основних методів розв’язування диференціальних рівнянь.

Типові помилки

Під час виконання модульного контролю необхідно звернути увагу на правильне відокремлення змінних; наявність довільної сталої після інтегрування; правильне використання початкових умов; послідовне дворазове інтегрування рівнянь виду $y'' = f(x)$; правильне розуміння зв’язків між переміщенням, швидкістю та прискоренням; правильне складання рівняння вільних коливань; недопущення плутанини між жорсткістю пружного елемента, масою, циклічною частотою та періодом коливань; обов’язкове зазначення одиниць вимірювання в професійних задачах.

Підведення підсумків

Модульний контроль № 5 завершує вивчення змістового модуля «Диференціальні рівняння» і перевіряє як безпосередню техніку розв’язування диференціальних рівнянь першого та другого порядків, так і здатність використовувати їх як математичний апарат для опису механічних процесів.

Для спеціальності **G9 «Прикладна механіка»** професійна складова всіх варіантів пов’язана з рухом механічних ланок, повзунів, робочих органів, визначенням законів руху за заданим прискоренням та моделюванням вільних коливань механічних систем.

Домашнє завдання

Оскільки практичне заняття № 21 є **підсумковим модульним контролем**, окреме домашнє індивідуальне завдання, яке оцінюється у 2 бали, не передбачається.

Після перевірки модульного контролю здобувачам освіти необхідно проаналізувати допущені помилки, повторити відповідні теми змістового модуля 5 та повторно розв’язати завдання, у яких були допущені помилки, з повним записом алгоритму розв’язування.

Література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння : практикум.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння : навчальний посібник.* Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
6. **Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В.** *Вища математика. Частина 2. Збірник задач : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю G9 «Прикладна механіка».* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка.