

ЗАТВЕРДЖЕНО

Директор ЗПО «ДПТК»

Олександр СТРИЛЕЦЬ

« 28 » серпня 2026 р.

ПОГОДЖЕНО

Заступник директора з ТМР ЗПО «ДПТК»

Сергій ГОРДІЄНКО

« 28 » серпня 2026 р.



МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

з дисципліни вища математика
для здобувачів освіти рівня «фаховий молодший бакалавр»
Спеціальність G9 «Прикладна механіка»

О.В. Чопенко

Зміст

СРС 1. Властивості визначників	3
СРС 2. Матричний метод розв'язування систем рівнянь	17
СРС 3. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	36
СРС 4. Види рівнянь площини та прямої в просторі	59
СРС 5. Диференціал.....	87
СРС 6. Первісна та невизначений інтеграл	117
СРС 7. Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца.....	148
СРС 8. Диференціальні лінійні рівняння першого порядку	176
СРС 9. Диференціальні рівняння другого порядку. Математичні моделі механічних процесів	207

План самостійного вивчення теми № 1

з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 1. Властивості визначників

Тема: Властивості визначників. Обчислення визначників за допомогою їх властивостей.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри» і спрямована на поглиблення знань про визначники та формування вміння використовувати їх властивості для спрощення обчислень. У навчальних матеріалах з лінійної алгебри матриці та визначники розглядаються як складова першого розділу курсу.

Мета

Знати:

- означення визначника квадратної матриці;
- правила обчислення визначників другого порядку;
- правила обчислення визначників третього порядку;
- основні властивості визначників;
- наслідки з властивостей визначників;
- способи перетворення визначника з використанням його властивостей;
- умови, за яких визначник дорівнює нулю.

Вміти:

- обчислювати визначники другого та третього порядків;
- розпізнавати властивості визначників, які доцільно застосувати в конкретному прикладі;
- використовувати властивості визначників для спрощення обчислень;
- виносити спільний множник за знак визначника;
- виконувати елементарні перетворення рядків і стовпців визначника;
- встановлювати, не виконуючи повного обчислення, випадки, коли визначник дорівнює нулю;

- перевіряти правильність отриманого результату.

Навчальні питання

1. Основні властивості визначників.
2. Застосування властивостей визначників під час їх обчислення.
3. Спрощення визначників третього порядку за допомогою елементарних перетворень.
4. Використання властивостей визначників для встановлення їх значення без безпосереднього розкладання.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: повторити означення визначника та правила обчислення визначників другого і третього порядків. Необхідно розуміти, що властивості визначників не замінюють основних способів обчислення, а дають можливість суттєво спростити обчислення.

По-друге: вивчити основні властивості визначників і навчитися розпізнавати ситуації, у яких кожному з них доцільно застосовувати.

По-третє: особливу увагу необхідно звернути на зміну визначника під час перестановки двох рядків або стовпців, множення рядка або стовпця на число та додавання до одного рядка іншого рядка, помноженого на деяке число.

По-четверте: перед безпосереднім обчисленням визначника необхідно проаналізувати його структуру. Якщо визначник містить однакові або пропорційні рядки, нульовий рядок або спільний множник, застосування відповідної властивості може значно скоротити розрахунки.

По-п'яте: під час виконання самостійних завдань необхідно не лише отримати числове значення визначника, але й зазначити, яку саме властивість було використано.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. **Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне**

числення : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.

2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. **Вища математика. Практикум** : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. **Математика в технічному університеті**. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
4. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. **Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики** : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт»**. Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Поняття визначника

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **визначником**, або **детермінантом**, цієї матриці.

Для квадратної матриці другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

визначник обчислюється за правилом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

За формулою визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2.$$

Відповідь: 2.

2. Основні властивості визначників

Властивість 1. Визначник при транспонуванні не змінюється

Якщо в заданому визначнику всі рядки замінити відповідними стовпцями, то значення визначника не зміниться:

$$\det A = \det A^T.$$

Приклад

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2.$$

Після транспонування:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta_1 = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.$$

Отже,

$$\Delta = \Delta_1 = -2.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків або стовпців змінює знак визначника

Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки або два стовпці, то його абсолютна величина не зміниться, але знак зміниться на протилежний.

Приклад

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -7.$$

Поміняємо рядки місцями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7.$$

Отже,

$$\Delta_1 = -\Delta.$$

Властивість 3. Визначник з двома однаковими рядками або стовпцями дорівнює нулю

Якщо два рядки або два стовпці визначника однакові, то

$$\Delta = 0.$$

Приклад

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Перший і третій рядки однакові. Тому без будь-яких додаткових обчислень отримуємо:

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Властивість 4. Спільний множник рядка або стовпця можна винести за знак визначника

Якщо всі елементи певного рядка або стовпця мають спільний множник, цей множник можна винести за знак визначника.

Приклад

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

У першому рядку винесемо спільний множник 2:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо визначник:

$$\Delta = 2(2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = 2(10 - 9) = 2.$$

Відповідь: 2.

Властивість 5. Визначник із нульовим рядком або стовпцем дорівнює нулю

Якщо всі елементи хоча б одного рядка або стовпця дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

Приклад

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Другий рядок складається тільки з нулів.

Тому

$$\Delta = 0.$$

Властивість 6. Якщо два рядки або стовпці пропорційні, визначник дорівнює нулю

Приклад

Розглянемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Третій рядок отриманий множенням першого рядка на 2:

$$R_3 = 2R_1.$$

Отже, перший і третій рядки пропорційні, тому

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Властивість 7. Властивість лінійності відносно рядка або стовпця

Якщо всі елементи певного рядка визначника є сумами двох доданків, то цей визначник можна подати як суму двох визначників.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад

Розглянемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + 3 & 4 \\ 1 + 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

За властивістю лінійності першого стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta = (10 - 4) + (15 - 8) = 6 + 7 = 13.$$

Перевіримо безпосередньо:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 12 = 13.$$

Результати збігаються.

Властивість 8. Додавання до одного рядка іншого рядка, помноженого на число, не змінює визначник

Якщо до елементів одного рядка або стовпця додати відповідні елементи іншого рядка або стовпця, попередньо помножені на одне й те саме число, то значення визначника не зміниться.

Ця властивість особливо важлива для спрощення визначників третього і вищих порядків.

Приклад

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - 2R_1, \\ R_3 &\rightarrow R_3 - R_1. \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Другий і третій рядки однакові. За властивістю визначника:

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

3. Застосування властивостей визначників при їх обчисленні

Головна мета застосування властивостей — **спростити визначник до такого вигляду, щоб його обчислення потребувало якомога меншої кількості арифметичних операцій.**

Перед початком обчислення доцільно:

1. перевірити наявність нульового рядка або стовпця;
2. перевірити, чи немає однакових рядків або стовпців;
3. перевірити, чи немає пропорційних рядків або стовпців;
4. знайти спільні множники;
5. за необхідності виконати елементарні перетворення для отримання нулів;
6. лише після цього виконувати безпосереднє обчислення.

4. Приклади для розв'язання

Приклад 1. Використання спільного множника

Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Елементи першого рядка мають спільний множник 6. Виносимо його за знак визначника:

$$\Delta = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\Delta = 6(1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = 6(5 - 4) = 6.$$

Відповідь: 6.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити визначник, попередньо винісши спільний множник із першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначник, використовуючи винесення спільного множника:

$$\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Пропорційні рядки

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Другий рядок є результатом множення першого рядка на 3:

$$R_2 = 3R_1.$$

Отже, два рядки визначника пропорційні.

За властивістю визначника:

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Не виконуючи повного розкладання, визначити значення:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Використовуючи властивості визначників, обчислити:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \end{vmatrix}.$$

Приклад 3. Однакові рядки

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Перший і третій рядки однакові.

Отже,

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Визначити значення:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. Використання елементарних перетворень

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - 2R_1, \\ R_3 &\rightarrow R_3 - 3R_1. \end{aligned}$$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки другий і третій рядки однакові,

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити визначник, використовуючи елементарні перетворення рядків:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначник, попередньо утворивши нулі в першому стовпці:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Приклад 5. Комплексне застосування властивостей

Обчислити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Виконаємо перетворення третього рядка:

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1.$$

Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Другий і третій рядки стали однаковими.

Отже,

$$\Delta = 0.$$

Відповідь: 0.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити визначник, використовуючи його властивості:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначник найбільш раціональним способом:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається квадратною матрицею?
2. Що називається визначником квадратної матриці?

3. Як обчислюється визначник другого порядку?
4. Якими способами можна обчислити визначник третього порядку?
5. Як змінюється визначник при транспонуванні матриці?
6. Як змінюється знак визначника при перестановці двох рядків?
7. Чому дорівнює визначник, який має два однакові рядки?
8. Чому дорівнює визначник, який має два пропорційні рядки?
9. Чому дорівнює визначник, якщо один із його рядків складається лише з нулів?
10. Як винести спільний множник елементів рядка за знак визначника?
11. Чи зміниться визначник, якщо до одного рядка додати інший рядок, помножений на число?
12. Як властивості визначників допомагають скоротити кількість обчислень?
13. Чи справедливі властивості рядків визначника для його стовпців?
14. У яких випадках значення визначника можна встановити без безпосереднього обчислення?
15. Які властивості доцільно перевірити перед початком розкладання визначника третього порядку?

Завдання для виконання

Завдання 1

Обчислити визначник другого порядку безпосередньо:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Після обчислення перевірити результат за основною формулою визначника другого порядку.

Завдання 2

Обчислити визначник, використовуючи винесення спільного множника:

$$\begin{vmatrix} 12 & 18 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Указати, з якого рядка або стовпця винесено спільний множник.

Завдання 3

Не виконуючи повного розкладання, визначити значення:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Пояснити, яка властивість визначника дає можливість одразу отримати відповідь.

Завдання 4

Не виконуючи повного розкладання, визначити значення:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обґрунтувати відповідь відповідною властивістю визначника.

Завдання 5

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix},$$

використовуючи елементарні перетворення рядків. Намагатися утворити якомога більше нульових елементів перед остаточним обчисленням.

Завдання 6

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & 11 & 9 \end{vmatrix}$$

найбільш раціональним способом. У розв'язанні обов'язково зазначити всі використані властивості визначників.

Завдання 7

Порівняти два визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислити їх та пояснити зв'язок між отриманими значеннями на основі властивості перестановки рядків.

Завдання 8

Дано визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Не виконуючи повного обчислення, визначити його значення. Пояснити, які рядки є пропорційними та яку властивість використано.

Підсумок самостійної роботи

Після самостійного опрацювання теми здобувач освіти повинен уміти не тільки обчислювати визначники другого та третього порядків безпосередньо, але й **аналізувати структуру визначника перед початком обчислень**. Найважливішим результатом самостійної роботи є вміння вибрати таку властивість визначника, яка дає можливість спростити розрахунок, зменшити кількість арифметичних дій та уникнути зайвих обчислень.

Особливу увагу необхідно приділити властивостям, пов'язаним з однаковими і пропорційними рядками, винесенням спільного множника, перестановкою рядків та додаванням до одного рядка іншого рядка, помноженого на певне число. Саме ці властивості найчастіше використовуються під час практичного обчислення визначників.

План самостійного вивчення теми № 2 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 2. Матричний метод розв'язування систем рівнянь

Тема: Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри» та продовжує вивчення систем лінійних алгебраїчних рівнянь після опрацювання матриць, визначників, оберненої матриці та методу Крамера. Матричний метод ґрунтується на поданні системи рівнянь у матричній формі та використанні оберненої матриці. Усі наведені нижче завдання мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- поняття матриці коефіцієнтів системи;
- поняття матриці-стовпця невідомих;
- поняття матриці-стовпця вільних членів;
- матричну форму запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- означення оберненої матриці;
- умову існування оберненої матриці;
- формулу знаходження оберненої матриці;
- алгоритм розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом;
- способи перевірки отриманого розв'язку.

Вміти:

- записувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі;
- скласти матрицю коефіцієнтів системи;

- складати матрицю-стовпець невідомих та матрицю-стовпець вільних членів;
- обчислювати визначник матриці коефіцієнтів;
- перевіряти умову існування оберненої матриці;
- знаходити алгебраїчні доповнення елементів матриці;
- складати приєднану матрицю;
- знаходити обернену матрицю;
- виконувати множення матриць;
- знаходити розв'язок системи матричним методом;
- перевіряти правильність отриманого розв'язку підстановкою.

Навчальні питання

1. Матрична форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Умова застосування матричного методу.
3. Обернена матриця та її використання під час розв'язування систем рівнянь.
4. Алгоритм розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.
5. Перевірка отриманого розв'язку.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: необхідно повторити поняття матриці, визначника та оберненої матриці. Матричний метод безпосередньо спирається на знання цих тем.

По-друге: потрібно навчитися правильно переходити від звичайного запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь до матричного запису. При цьому особливо важливо не змінювати порядок невідомих у різних рівняннях.

По-третє: перед застосуванням матричного методу обов'язково необхідно обчислити визначник матриці коефіцієнтів. Якщо визначник матриці

коефіцієнтів не дорівнює нулю, обернена матриця існує і систему можна розв'язати матричним методом.

По-четверте: необхідно правильно визначати порядок множення матриць. У матричному методі матриця-стовпець невідомих знаходиться множенням оберненої матриці коефіцієнтів на матрицю-стовпець вільних членів.

По-п'яте: після знаходження значень невідомих необхідно виконати перевірку. Для цього знайдені значення підставляють у початкову систему рівнянь.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. **Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення** : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахо І. В. **Вища математика. Практикум** : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клєсова. **Математика в технічному університеті. Том 2.** Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
4. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. **Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики** : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Система лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Числа a_{ij} називаються **коефіцієнтами системи**, числа b_1, b_2, b_3 — **вільними членами**, а x, y, z — **невідомими**.

Розв'язком системи називається така сукупність значень невідомих x, y, z , яка перетворює кожне рівняння системи на правильну числову рівність.

2. Матрична форма запису системи

Для застосування матричного методу систему записують у вигляді

$$AX = B,$$

де A — матриця коефіцієнтів системи, X — матриця-стовпець невідомих, B — матриця-стовпець вільних членів.

Для наведеної вище системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді початкова система набуває компактного матричного вигляду:

$$AX = B.$$

3. Основна ідея матричного методу

Маємо матричне рівняння

$$AX = B.$$

Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1} , то помножимо обидві частини рівняння зліва на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки

$$A^{-1}A = E,$$

де E — одинична матриця, то

$$EX = A^{-1}B.$$

А оскільки

$$EX = X,$$

отримуємо основну формулу матричного методу:

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Отже, для знаходження невідомих необхідно знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів і помножити її на матрицю-стовпець вільних членів.

4. Умова застосування матричного методу

Обернена матриця існує тільки для невинродженої квадратної матриці, тобто для матриці, визначник якої не дорівнює нулю:

$$\det A \neq 0.$$

Тому перед застосуванням матричного методу обов'язково необхідно обчислити визначник матриці коефіцієнтів.

Якщо

$$\det A \neq 0,$$

то матриця A^{-1} існує, а система має єдиний розв'язок, який можна знайти матричним методом.

Якщо

$$\det A = 0,$$

то оберненої матриці A^{-1} не існує і формулу $X = A^{-1}B$ застосувати неможливо.

5. Алгоритм розв'язування системи матричним методом

Під час розв'язування системи необхідно дотримуватися такої послідовності:

1. Записати систему у вигляді $AX = B$.
2. Скласти матрицю коефіцієнтів A .
3. Скласти матрицю-стовпець невідомих X .
4. Скласти матрицю-стовпець вільних членів B .
5. Обчислити визначник $\det A$.
6. Перевірити умову $\det A \neq 0$.
7. Знайти обернену матрицю A^{-1} .

8. Обчислити добуток $A^{-1}B$.
9. Записати значення невідомих.
10. Виконати перевірку підстановкою в початкову систему.

6. Приклади розв'язування

Приклад 1. Система двох лінійних рівнянь

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Крок 1. Записуємо систему у матричній формі.

Матриця коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця-стовпець невідомих:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матриця-стовпець вільних членів:

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$AX = B.$$

Крок 2. Обчислюємо визначник матриці коефіцієнтів.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3.$$

Оскільки

$$\det A = -3 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 3. Знаходимо обернену матрицю.

Для матриці другого порядку:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Знаходимо матрицю невідомих.

$$X = A^{-1}B.$$

Тому

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо множення:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x = 2, y = 1.$$

Крок 5. Перевірка.

Перше рівняння:

$$2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Отримуємо:

$$5 = 5.$$

Друге рівняння:

$$2 - 1 = 1.$$

Отримуємо:

$$1 = 1.$$

Обидва рівняння виконуються.

Відповідь: $x = 2, y = 1$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати матричним методом систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

2. Розв'язати матричним методом систему:

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Приклад 2. Система двох рівнянь з іншими коефіцієнтами

Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Оскільки

$$\det A = 1 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Знаходимо її:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо множення:

$$X = \begin{pmatrix} 8 - 6 \\ -8 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x = 2, y = 1.$$

Перевірка

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8,$$

$$2 + 1 = 3.$$

Обидві рівності правильні.

Відповідь: $x = 2, y = 1$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

2. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 4x + y = 9, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Приклад 3. Система трьох лінійних рівнянь

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + 3z = 14. \end{cases}$$

Розв'язання

Крок 1. Складаємо матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$AX = B.$$

Крок 2. Обчислюємо визначник матриці коефіцієнтів.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо за першим рядком:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \det A &= (3 - 2) - (6 - 1) + (4 - 1). \\ \det A &= 1 - 5 + 3 = -1. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\det A = -1 \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Крок 3. Знаходимо алгебраїчні доповнення.

Отримуємо матрицю алгебраїчних доповнень:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо її:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det A = -1$, маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} C^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Знаходимо невідомі.

$$X = A^{-1}B.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\begin{aligned} x &= -6 + 7 = 1, \\ y &= 30 - 14 - 14 = 2, \\ z &= -18 + 7 + 14 = 3. \end{aligned}$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка

Перше рівняння:

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Друге рівняння:

$$2 \cdot 1 + 2 + 3 = 7.$$

Третє рівняння:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14.$$

Усі рівності виконуються.

Відповідь: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

2. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7, \\ 2x + y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Приклад 4. Визначення можливості застосування матричного методу

Дослідити, чи можна застосувати матричний метод до системи

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Матриця коефіцієнтів має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо її визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Отже,

$$\det A = 0.$$

Обернена матриця A^{-1} не існує.

Тому формулу

$$X = A^{-1}B$$

для цієї системи застосувати неможливо.

Звернемо увагу: на цьому етапі ми робимо висновок саме про **неможливість застосування матричного методу через обернену матрицю**. Для повного дослідження самої системи необхідно застосовувати інші методи.

Відповідь: матричний метод через обернену матрицю застосувати неможливо, оскільки $\det A = 0$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Визначити, чи можна застосувати матричний метод:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x + 6y = 10. \end{cases}$$

2. Визначити можливість застосування матричного методу:

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 6x + 2y = 9. \end{cases}$$

Приклад 5. Повний алгоритм матричного методу

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо систему у матричному вигляді:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$\det A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$

Оскільки

$$\det A \neq 0,$$

обернена матриця існує.

Знаходимо її:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Застосовуємо формулу:

$$X = A^{-1}B.$$

Отримуємо:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 7 - 11 = 3, \\ y &= -3 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$x = 3, y = 1.$$

Перевірка

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 1 &= 7, \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 &= 11. \end{aligned}$$

Обидві рівності правильні.

Відповідь: $x = 3, y = 1$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 3x + y = 10, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

2. Розв'язати матричним методом:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. Яку матрицю називають матрицею коефіцієнтів системи?
4. Як складається матриця-стовпець невідомих?
5. Як складається матриця-стовпець вільних членів?
6. Як записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді?
7. Що означає запис $AX = B$?
8. Яку матрицю називають оберненою?
9. За якої умови існує обернена матриця?
10. Чому перед застосуванням матричного методу необхідно обчислити визначник матриці коефіцієнтів?
11. Якою формулою визначається обернена матриця?
12. Яка основна формула матричного методу розв'язування систем рівнянь?
13. Чому у формулі $X = A^{-1}B$ важливий порядок множення матриць?
14. Якою є послідовність розв'язування системи матричним методом?
15. Що необхідно зробити, якщо визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю?
16. Як перевірити знайдений розв'язок системи?
17. Скільки довільних значень невідомих містить матриця X для системи трьох рівнянь із трьома невідомими?
18. Чим матриця коефіцієнтів відрізняється від матриці вільних членів?
19. Чому матричний метод тісно пов'язаний із темою «Обернена матриця»?
20. Які знання з попередніх тем необхідні для застосування матричного методу?

Завдання для виконання

Завдання 1

Записати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

у матричній формі $AX = B$.

Окремо записати матрицю коефіцієнтів A , матрицю-стовпець невідомих X та матрицю-стовпець вільних членів B .

Завдання 2

Для системи

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

скласти матрицю коефіцієнтів та обчислити її визначник. Зробити висновок про можливість застосування матричного методу.

Завдання 3

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

Обов'язково:

- записати систему у матричній формі;
- обчислити визначник матриці коефіцієнтів;
- знайти обернену матрицю;
- виконати множення $A^{-1}B$;
- записати відповідь;
- виконати перевірку.

Завдання 4

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 4x + y = 11, \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$$

Виконати повний запис усіх етапів розв'язування та перевірити отримані значення невідомих.

Завдання 5

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Для розв'язування скласти матрицю коефіцієнтів, перевірити умову існування оберненої матриці, знайти A^{-1} , обчислити $X = A^{-1}B$ та виконати перевірку.

Завдання 6

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Усі етапи знаходження оберненої матриці та множення матриць записати повністю.

Завдання 7

Дослідити можливість застосування матричного методу до системи

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

Обчислити визначник матриці коефіцієнтів і пояснити отриманий результат.

Завдання 8

Для системи

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

самостійно виконати повний алгоритм матричного методу: скласти матриці A , X , B , обчислити визначник матриці A , знайти обернену матрицю, визначити невідомі та виконати перевірку.

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Для закріплення теми розв'язати **одну систему відповідно до номера варіанта**. Усі системи є загальнономатематичними та не пов'язані з конкретною спеціальністю.

Варіант	Система рівнянь
1	$2x + y = 5; x - y = 1$
2	$3x + y = 7; x + y = 3$
3	$2x + 3y = 8; x + 2y = 5$
4	$4x + y = 9; x + y = 3$
5	$3x + 2y = 12; x + y = 5$
6	$5x + y = 11; 2x + y = 5$
7	$2x - y = 4; x + 2y = 3$
8	$3x - y = 7; 2x + y = 8$
9	$4x - 2y = 6; x + y = 6$
10	$2x + 5y = 9; 3x + y = 7$
11	$x + y + z = 6; 2x + y + z = 7; x + 2y + 3z = 14$
12	$x + 2y + z = 7; 2x + y + z = 8; x + y + 2z = 9$
13	$2x + y + z = 7; x + 2y + z = 8; x + y + 2z = 9$
14	$x + y + 2z = 9; 2x + y + z = 8; x + 3y + z = 10$
15	$2x - y + z = 3; x + 2y + z = 6; x + y - z = 0$
16	$x + 2y - z = 2; 2x + y + z = 7; 3x - y + 2z = 7$
17	$2x + y - z = 1; x - y + 2z = 5; x + 2y + z = 8$
18	$3x + y + z = 9; x + 2y - z = 2; 2x - y + 3z = 9$
19	$x + 3y + z = 8; 2x + y + 2z = 8; 3x + 2y - z = 4$
20	$2x + 2y + z = 9; x + 3y + 2z = 11; 3x + y + z = 8$
21	$x + y + 3z = 12; 2x + 3y + z = 11; 3x + y + 2z = 11$
22	$2x + y + 2z = 10; x + 3y + z = 10; 3x + 2y + z = 11$
23	$3x + y - z = 4; x + 2y + z = 7; 2x - y + 2z = 4$

Варіант	Система рівнянь
24	$x - y + z = 2; 2x + y + 3z = 9; 3x + 2y - z = 4$
25	$2x + 3y + z = 9; x + y + 2z = 8; 3x - y + z = 5$
26	$x + 2y + 3z = 10; 2x - y + z = 3; 3x + y - z = 4$
27	$3x + 2y + z = 10; x + 3y + 2z = 11; 2x + y + 3z = 11$
28	$2x - y + 3z = 9; x + 2y + z = 7; 3x + y - z = 5$
29	$x + 3y - 2z = 2; 2x + y + z = 7; 3x - 2y + 2z = 5$
30	$2x + y + 3z = 13; x + 2y - z = 4; 3x - y + 2z = 9$

Для свого варіанта необхідно **повністю оформити розв'язання матричним методом**, а саме: записати систему у матричному вигляді, скласти матриці A , X , B , знайти визначник матриці коефіцієнтів, перевірити можливість застосування методу, знайти обернену матрицю, обчислити добуток $A^{-1}B$, записати значення невідомих та виконати перевірку підстановкою у початкову систему.

Питання для підсумкового самоконтролю

Після виконання роботи здобувач освіти повинен уміти пояснити, чому систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна подати у вигляді $AX = B$, за якої умови існує матриця A^{-1} , чому при $\det A = 0$ формула матричного методу не застосовується та яким чином із матричного рівняння отримують формулу $X = A^{-1}B$.

Підсумок самостійної роботи

Після самостійного опрацювання теми здобувач освіти повинен уміти послідовно виконувати всі етапи матричного методу розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Особливу увагу необхідно приділяти **правильному складанню матриці коефіцієнтів**, оскільки перестановка коефіцієнтів або зміна порядку невідомих призводить до неправильного результату.

Перед знаходженням оберненої матриці необхідно обов'язково перевірити умову

$$\det A \neq 0.$$

Основна формула, яку необхідно засвоїти під час самостійного вивчення теми:

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

При цьому недостатньо лише отримати числові значення невідомих. Правильно оформлена самостійна робота повинна містити **повний математичний запис розв'язування та перевірку отриманої відповіді.**

План самостійного вивчення теми № 3 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 3. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Тема: Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 1 «Елементи лінійної та векторної алгебри» і продовжує вивчення способів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь після методу Крамера та матричного методу. Відповідно до попередньо прийнятого принципу, усі приклади та завдання нижче мають загальноматематичний характер і придатні для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- поняття розширеної матриці системи;
- сутність методу Гаусса;
- допустимі елементарні перетворення рядків розширеної матриці;
- поняття прямого ходу методу Гаусса;
- поняття зворотного ходу методу Гаусса;
- ступінчастий вигляд системи;
- послідовність розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса;
- ознаки сумісності та несумісності системи, що виявляються у процесі перетворень;
- спосіб перевірки отриманого розв'язку.

Вміти:

- складати розширену матрицю системи;
- виконувати елементарні перетворення рядків;

- зводити розширену матрицю до ступінчастого вигляду;
- виконувати прямий хід методу Гаусса;
- виконувати зворотний хід методу Гаусса;
- послідовно знаходити значення невідомих;
- розпізнавати суперечливий рядок;
- визначати випадок, коли система має єдиний розв'язок;
- правильно оформлювати розв'язування системи;
- перевіряти знайдені значення невідомих підстановкою в початкову систему.

Навчальні питання

1. Сутність методу Гаусса.
2. Розширена матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Елементарні перетворення рядків розширеної матриці.
4. Прямий хід методу Гаусса.
5. Зворотний хід методу Гаусса.
6. Розв'язування систем двох і трьох лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.
7. Перевірка отриманого розв'язку.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: необхідно повторити поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці та розширеної матриці системи. Під час складання розширеної матриці потрібно суворо дотримуватися однакового порядку невідомих у всіх рівняннях.

По-друге: необхідно засвоїти допустимі елементарні перетворення рядків розширеної матриці. Такі перетворення не змінюють множину розв'язків системи.

По-третє: потрібно чітко розрізняти **прямий хід** і **зворотний хід** методу Гаусса. Під час прямого ходу система послідовно зводиться до ступінчастого, або трикутного, вигляду. Під час зворотного ходу невідомі знаходять послідовно, починаючи з останнього рівняння.

По-четверте: під час перетворення рядків бажано вибирати такі операції, які дозволяють уникати дробів або принаймні зменшувати їх кількість. Це спрощує обчислення та знижує ймовірність арифметичних помилок.

По-п'яте: кожне перетворення необхідно записувати. Не слід переходити від початкової матриці безпосередньо до кінцевої, пропускаючи проміжні етапи.

По-шосте: після отримання розв'язку необхідно виконати перевірку підстановкою знайдених значень невідомих у початкову систему.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. **Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення** : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. **Вища математика. Практикум** : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. **Математика в технічному університеті. Том 2.** Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
4. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. **Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики** : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Сутність методу Гаусса

Метод Гаусса є послідовним методом виключення невідомих із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Основна ідея методу полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень початкову систему замінюють рівносильною системою простішого вигляду.

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Для застосування методу Гаусса складають розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Вертикальна риска відокремлює коефіцієнти при невідомих від вільних членів.

2. Елементарні перетворення рядків

Під час застосування методу Гаусса можна виконувати такі елементарні перетворення.

1. Переставляти два рядки місцями

Наприклад:

$$R_1 \leftrightarrow R_2.$$

Це означає, що перший і другий рядки міняють місцями.

2. Множити всі елементи рядка на ненульове число

Наприклад:

$$R_2 \rightarrow 3R_2.$$

3. Додавати до одного рядка інший рядок, помножений на певне число

Наприклад:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Саме третє перетворення найчастіше використовується для послідовного утворення нулів під головною діагоналлю.

3. Прямий хід методу Гаусса

Мета прямого ходу — перетворити систему до ступінчастого або трикутного вигляду.

Наприклад, розширена матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

у результаті елементарних перетворень повинна набути вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix}.$$

Цьому відповідає система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2, \\ a''_{33}z = b''_3. \end{cases}$$

Така система значно простіша для розв'язування.

4. Зворотний хід методу Гаусса

Після завершення прямого ходу починають з останнього рівняння.

Спочатку знаходять z :

$$z = \frac{b''_3}{a''_{33}}.$$

Потім знайдене значення z підставляють у друге рівняння і знаходять y .

Після цього значення y і z підставляють у перше рівняння та знаходять x .

Таким чином, невідомі визначаються у зворотному порядку.

5. Алгоритм розв'язування системи методом Гаусса

Під час виконання завдань рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Записати початкову систему.
2. Скласти розширену матрицю системи.
3. За необхідності переставити рядки для спрощення обчислень.
4. За допомогою першого рядка утворити нулі під першим елементом головної діагоналі.
5. За допомогою другого рядка утворити нулі під другим елементом головної діагоналі.
6. Продовжувати перетворення до отримання ступінчастої матриці.
7. Записати відповідну систему рівнянь.
8. Виконати зворотний хід.
9. Знайти всі невідомі.
10. Виконати перевірку отриманого розв'язку.

6. Приклади розв'язування

Приклад 1. Система двох лінійних рівнянь

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Крок 1. Складаємо розширену матрицю системи.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Крок 2. Виконуємо прямий хід.

Необхідно виключити x із другого рівняння.

Виконуємо перетворення:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Отримуємо:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \end{array} \right).$$

Цій матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ -3y = -9. \end{cases}$$

Крок 3. Виконуємо зворотний хід.

З другого рівняння:

$$-3y = -9.$$

Звідси:

$$y = 3.$$

Підставляємо $y = 3$ перше рівняння:

$$x + 3 = 5.$$

Отже:

$$x = 2.$$

Крок 4. Перевірка.

Перше рівняння:

$$2 + 3 = 5.$$

Друге рівняння:

$$2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Обидві рівності правильні.

Відповідь: $x = 2, y = 3$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

2. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 8, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Приклад 2. Використання перестановки рядків

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для спрощення обчислень поміняємо рядки місцями:

$$R_1 \leftrightarrow R_2.$$

Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Тоді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

З другого рівняння:

$$-y = -1,$$

тому

$$y = 1.$$

Підставимо у перше рівняння:

$$x + 1 = 4.$$

Отже:

$$x = 3.$$

Перевірка

$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$3 + 1 = 4.$$

Відповідь: $x = 3, y = 1$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + y = 8, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

2. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x + y = 11, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Приклад 3. Система трьох лінійних рівнянь

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Крок 1. Складаємо розширену матрицю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Крок 2. Виконуємо прямий хід.

Виключаємо хіз другого рядка:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Отримуємо:

$$R_2 = (0, -, 1, -3 - 11).$$

Виключаємо хіз третього рядка:

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1.$$

Отримуємо:

$$R_3 = (0, -, 2, 0 - 4).$$

Таким чином:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тепер необхідно виключити уіз третього рядка.

Виконаємо:

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2.$$

Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Прямий хід завершено.

Крок 3. Виконуємо зворотний хід.

З третього рівняння:

$$6z = 18.$$

Отже:

$$z = 3.$$

З другого рівняння:

$$-y - 3z = -11.$$

Підставляємо $z = 3$:

$$-y - 9 = -11.$$

$$-y = -2.$$

$$y = 2.$$

З першого рівняння:

$$x + y + z = 6.$$

Підставляємо $y = 2, z = 3$:

$$x + 2 + 3 = 6.$$

$$x = 1.$$

Перевірка

Перше рівняння:

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Друге рівняння:

$$2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1.$$

Третє рівняння:

$$1 - 2 + 3 = 2.$$

Усі рівності виконуються.

Відповідь: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

2. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7, \\ 2x + y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Приклад 4. Система, для якої доцільно виконати перестановку рядків

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2y + z = 5, \\ x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У першій позиції першого рядка знаходиться нуль. Тому для зручності поміняємо перший і другий рядки місцями:

$$R_1 \leftrightarrow R_2.$$

Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виключаємо x із третього рядка:

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1.$$

Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

Для уникнення дробів виконаємо:

$$R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2.$$

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -17 \end{pmatrix}.$$

З третього рівняння:

$$-5z = -17,$$

тому

$$z = \frac{17}{5}.$$

З другого рівняння:

$$2y + z = 5.$$

Підставляємо:

$$2y + \frac{17}{5} = 5.$$

$$2y = \frac{8}{5}.$$

$$y = \frac{4}{5}.$$

З першого рівняння:

$$x + y + z = 6.$$

$$x + \frac{4}{5} + \frac{17}{5} = 6.$$

$$x + \frac{21}{5} = \frac{30}{5}.$$

$$x = \frac{9}{5}.$$

Перевірка

$$2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{17}{5} = 5,$$

$$\frac{9}{5} + \frac{4}{5} + \frac{17}{5} = 6,$$

$$2 \cdot \frac{9}{5} + \frac{4}{5} - \frac{17}{5} = 1.$$

Усі рівності виконуються.

Відповідь:

$$x = \frac{9}{5}, y = \frac{4}{5}, z = \frac{17}{5}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3. \end{cases}$$

2. Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2y - z = 1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

Приклад 5. Виявлення несумісної системи

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок відповідає рівнянню:

$$0x + 0y = 1,$$

тобто

$$0 = 1.$$

Отримали неправильну рівність.

Це означає, що не існує жодної пари чисел x та y , яка одночасно задовольняла б обидва рівняння.

Відповідь: система несумісна, розв'язків немає.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Дослідити методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

2. Дослідити методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 5. \end{cases}$$

Приклад 6. Система з нескінченною кількістю розв'язків

Дослідити методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1.$$

Отримуємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок відповідає тотожній рівності:

$$0 = 0.$$

Фактично залишилося лише одне незалежне рівняння:

$$x + y = 3.$$

Одна з невідомих може набувати довільного значення.

Нехай

$$y = t,$$

де t — довільне дійсне число.

Тоді:

$$x = 3 - t.$$

Отже, система має нескінченну кількість розв'язків:

$$x = 3 - t, y = t.$$

Відповідь: система має нескінченну кількість розв'язків

$$(x, y) = (3, -tt),$$

де t — довільне дійсне число.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Дослідити методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

2. Дослідити методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 4x + 6y = 12. \end{cases}$$

7. Як розпізнати результат після прямого ходу

Під час застосування методу Гаусса можуть виникнути три основні випадки.

Перший випадок — система має єдиний розв'язок

Після прямого ходу отримуємо достатню кількість незалежних рівнянь для послідовного визначення всіх невідомих.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тут можна знайти z , потім y , а потім x .

Другий випадок — система несумісна

Якщо після перетворень отримано рядок виду

$$(0 \ 0 \ 0 \ b), \ b \neq 0,$$

то він відповідає неправильній рівності

$$0 = b.$$

Отже, система не має розв'язків.

Третій випадок — система має нескінченну кількість розв'язків

Якщо після перетворень з'являються нульові рядки

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

і кількість незалежних рівнянь є меншою за кількість невідомих, виникають вільні невідомі. У такому випадку система може мати нескінченну кількість розв'язків.

Питання для самоконтролю

1. Що називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. У чому полягає основна ідея методу Гаусса?
4. Що називається розширеною матрицею системи?
5. Як скласти розширену матрицю системи?
6. Які елементарні перетворення рядків можна виконувати?
7. Чи можна міняти рядки розширеної матриці місцями?
8. Чи можна помножити всі елементи рядка на ненульове число?
9. Чи можна до одного рядка додати інший рядок, помножений на число?
10. Що називається прямим ходом методу Гаусса?
11. Яка мета прямого ходу?
12. Що називається ступінчастим виглядом матриці?
13. Що називається зворотним ходом методу Гаусса?
14. З якого рівняння починають зворотний хід?
15. У якому порядку знаходять невідомі під час зворотного ходу?
16. Що означає поява рядка, якому відповідає рівність $0 = 0$?
17. Що означає поява рядка, якому відповідає рівність $0 = b$, де $b \neq 0$?
18. Як за допомогою методу Гаусса встановити, що система несумісна?
19. У якому випадку система може мати нескінченну кількість розв'язків?

20. Як перевірити отриманий розв'язок системи?

Завдання для виконання

Завдання 1

Скласти розширену матрицю системи:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Визначити, яке перетворення доцільно виконати першим для виключення невідомої x .

Завдання 2

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Записати розширену матрицю, виконати прямий та зворотний ходи, після чого перевірити отриманий результат.

Завдання 3

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

Усі елементарні перетворення рядків записати повністю.

Завдання 4

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

Необхідно скласти розширену матрицю, привести її до ступінчастого вигляду, виконати зворотний хід та перевірити відповідь.

Завдання 5

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7, \\ 2x + y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Під час розв'язування пояснити, які елементарні перетворення використовуються для утворення нулів під головною діагоналлю.

Завдання 6

Дослідити методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$$

Визначити, скільки розв'язків має система, та обґрунтувати висновок за виглядом розширеної матриці після перетворень.

Завдання 7

Дослідити систему:

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + 6y = 10. \end{cases}$$

За допомогою методу Гаусса встановити, чи є система сумісною.

Завдання 8

Розв'язати методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ x + 2y - z = 1, \\ 3x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Оформити повний прямий та зворотний ходи методу Гаусса і виконати перевірку знайдених значень невідомих.

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Для закріплення теми кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**. Усі завдання є загальноматематичними та призначені для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Варіант 1

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Варіант 2

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Варіант 3

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Варіант 4

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Варіант 5

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Варіант 6

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 4x + y = 9, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Варіант 7

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Варіант 8

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 5x + y = 11, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

Варіант 9

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Варіант 10

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x - y = 7, \\ 2x + y = 8. \end{cases}$$

Варіант 11

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Варіант 12

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7, \\ 2x + y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Варіант 13

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Варіант 14

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9, \\ 2x + y + z = 8, \\ x + 3y + z = 10. \end{cases}$$

Варіант 15

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + 2y + z = 6, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Варіант 16

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y + z = 7, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$$

Варіант 17

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 5, \\ x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

Варіант 18

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 9, \\ x + 2y - z = 2, \\ 2x - y + 3z = 9. \end{cases}$$

Варіант 19

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 8, \\ 2x + y + 2z = 8, \\ 3x + 2y - z = 4. \end{cases}$$

Варіант 20

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 9, \\ x + 3y + 2z = 11, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

Варіант 21

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 12, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ 3x + y + 2z = 11. \end{cases}$$

Варіант 22

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 10, \\ x + 3y + z = 10, \\ 3x + 2y + z = 11. \end{cases}$$

Варіант 23

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x + 2y + z = 7, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

Варіант 24

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 9, \\ 3x + 2y - z = 4. \end{cases}$$

Варіант 25

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 9, \\ x + y + 2z = 8, \\ 3x - y + z = 5. \end{cases}$$

Варіант 26

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$$

Варіант 27

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 10, \\ x + 3y + 2z = 11, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

Варіант 28

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ x + 2y + z = 7, \\ 3x + y - z = 5. \end{cases}$$

Варіант 29

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2, \\ 2x + y + z = 7, \\ 3x - 2y + 2z = 5. \end{cases}$$

Варіант 30

Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ x + 2y - z = 4, \\ 3x - y + 2z = 9. \end{cases}$$

Для свого варіанта необхідно **повністю оформити розв’язання**, а саме: записати початкову систему; скласти розширену матрицю; записати всі елементарні перетворення рядків; виконати прямий хід методу Гаусса; отримати ступінчасту систему; виконати зворотний хід; знайти всі невідомі; записати відповідь; виконати перевірку підстановкою в початкову систему.

Підсумок самостійної роботи

Після самостійного опрацювання теми здобувач освіти повинен розуміти, що метод Гаусса ґрунтується не на безпосередньому використанні формул для знаходження кожної невідомої, а на **послідовному перетворенні системи до простішого ступінчастого вигляду**.

Особливу увагу необхідно приділити правильному виконанню елементарних перетворень. Помилка хоча б в одному елементі рядка під час перетворення може призвести до неправильного розв’язку всієї системи.

Під час оформлення розв’язання необхідно чітко розділяти два етапи:

прямий хід — послідовне виключення невідомих та приведення розширеної матриці до ступінчастого вигляду;

зворотний хід — послідовне знаходження невідомих, починаючи з останнього рівняння.

Важливою перевагою методу Гаусса є те, що в процесі перетворень можна не тільки знайти єдиний розв’язок системи, але й виявити випадки, коли система **не має розв’язків або має нескінченну кількість розв’язків**.

Правильно виконана самостійна робота повинна містити не тільки кінцеві значення невідомих, а **всі етапи перетворення розширеної матриці, прямий і зворотний ходи та перевірку отриманого результату**

План самостійного вивчення теми № 4 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 4. Види рівнянь площини та прямої в просторі

Тема: Види рівнянь площини та прямої в просторі.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 2 «Елементи аналітичної геометрії» та продовжує вивчення методу координат і рівнянь прямої. Під час самостійного опрацювання основна увага приділяється способам задання площини і прямої у тривимірному просторі, складанню їх рівнянь за заданими геометричними умовами та визначенню взаємного розміщення геометричних об'єктів.

Усі приклади та завдання в цій самостійній роботі мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття прямокутної декартової системи координат у просторі;
- поняття координат точки у просторі;
- поняття площини у просторі;
- поняття нормального вектора площини;
- загальне рівняння площини;
- рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора;
- рівняння площини, що проходить через три задані точки;
- поняття прямої у просторі;
- поняття напрямного вектора прямої;
- векторне рівняння прямої;
- параметричні рівняння прямої;
- канонічні рівняння прямої;
- рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;

- спосіб задання прямої у просторі як лінії перетину двох площин;
- основні умови паралельності та перпендикулярності геометричних об'єктів у просторі.

Вміти:

- визначати нормальний вектор площини за її загальним рівнянням;
- складати рівняння площини за точкою та нормальним вектором;
- перевіряти належність точки площині;
- складати рівняння площини за трьома заданими точками;
- визначати напрямний вектор прямої;
- складати параметричні рівняння прямої;
- складати канонічні рівняння прямої;
- складати рівняння прямої за двома заданими точками;
- переходити від параметричного запису прямої до канонічного;
- визначати взаємне розміщення площин;
- визначати взаємне розміщення прямої та площини;
- перевіряти правильність складених рівнянь.

Навчальні питання

1. Загальне рівняння площини у просторі.
2. Нормальний вектор площини.
3. Рівняння площини, що проходить через задану точку.
4. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
5. Напрямний вектор прямої у просторі.
6. Векторне, параметричне та канонічне рівняння прямої у просторі.
7. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
8. Пряма як лінія перетину двох площин.
9. Взаємне розміщення площин, прямої та площини.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: необхідно повторити поняття координат точки та вектора у просторі, координат вектора, колінеарності векторів, скалярного та векторного добутків.

По-друге: потрібно чітко розрізняти два основні вектори, які використовуються під час складання рівнянь: **нормальний вектор площини** та **напрямний вектор прямої**. Нормальний вектор перпендикулярний до площини, а напрямний вектор паралельний прямій.

По-третє: під час роботи із загальним рівнянням площини необхідно пам'ятати, що коефіцієнти при координатах x , y , зодногочасно є координатами нормального вектора цієї площини.

По-четверте: під час складання рівняння прямої у просторі необхідно правильно визначити точку, через яку проходить пряма, та її напрямний вектор.

По-п'яте: потрібно навчитися переходити від одного виду рівняння прямої до іншого. Одна й та сама пряма може бути задана векторним, параметричним, канонічним рівнянням або як перетин двох площин.

По-шосте: після складання рівняння необхідно виконувати перевірку: координати заданої точки повинні задовольняти отримане рівняння площини або прямої.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. **Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення** : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. **Вища математика. Практикум** : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
3. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клєсова. **Математика в технічному університеті**. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.

4. Гречко А. Л., Дудкін М. Є. **Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики** : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 280 сторінок.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Прямокутна декартова система координат у просторі

Положення точки у тривимірному просторі визначається трьома координатами:

$$M(x; y; z).$$

Координатні осі позначають:

$$Ox, Oy, Oz.$$

Три координатні площини мають рівняння:

$$Oxy: z = 0,$$

$$Oxz: y = 0,$$

$$Oyz: x = 0.$$

Наприклад, точка

$$A(2; -; 13)$$

має координату $x = 2$, координату $y = -1$ і координату $z = 3$.

2. Площина у просторі

Площина у тривимірному просторі може бути задана різними способами.

Для однозначного задання площини достатньо, наприклад:

- точки та нормального вектора;
- трьох точок, які не лежать на одній прямій;
- двох прямих, що перетинаються;
- двох паралельних прямих;
- прямої та точки, яка не належить цій прямій.

В аналітичній геометрії положення площини описується рівнянням.

3. Загальне рівняння площини

Загальне рівняння площини у просторі має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C, D — сталі числа, причому числа A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Вектор

$$\vec{n} = (A; B; C)$$

називається **нормальним вектором площини**.

Він перпендикулярний до будь-якого напрямного вектора, що лежить у цій площині.

Приклад 1. Визначення нормального вектора площини

Дано площину

$$2x - 3y + 4z - 7 = 0.$$

Визначити її нормальний вектор.

Розв'язання

Порівняємо задане рівняння із загальним рівнянням площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Маємо:

$$A = 2, B = -3, C = 4.$$

Отже, нормальний вектор:

$$\vec{n} = (2; -; 34).$$

Відповідь:

$$\vec{n} = (2; -; 34).$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Визначити нормальний вектор площини

$$3x + 2y - z + 5 = 0.$$

2. Визначити нормальний вектор площини

$$-2x + 4y + 5z - 8 = 0.$$

4. Перевірка належності точки площині

Щоб перевірити, чи належить точка

$$M(x_0; y_0; z_0)$$

площині

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

необхідно підставити координати точки в рівняння площини.

Якщо після підстановки отримано правильну рівність, точка належить площині.

Якщо рівність неправильна, точка площині не належить.

Приклад 2. Перевірка належності точки площині

Визначити, чи належить точка

$$M(1; 2; 1)$$

площині

$$2x + y - z - 3 = 0.$$

Розв'язання

Підставимо координати точки:

$$x = 1, y = 2, z = 1.$$

Отримуємо:

$$2 \cdot 1 + 2 - 1 - 3 = 0.$$

$$2 + 2 - 1 - 3 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Отримали правильну рівність.

Отже, точка $M(1; 2; 1)$ належить заданій площині.

Відповідь: точка $M(1; 2; 1)$ належить площині.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Перевірити, чи належить точка $A(1; 1; 2)$ площині

$$x + 2y + z - 5 = 0.$$

2. Перевірити, чи належить точка $B(2; -; 13)$ площині

$$2x - y + z - 8 = 0.$$

5. Рівняння площини, що проходить через задану точку

Нехай площина проходить через точку

$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

і має нормальний вектор

$$\vec{n} = (A; B; C).$$

Тоді її рівняння має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Це одна з найважливіших форм рівняння площини.

Приклад 3. Складання рівняння площини за точкою та нормальним вектором

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку

$$M(1; 2; -1)$$

і має нормальний вектор

$$\vec{n} = (2; -; 13).$$

Розв'язання

Використовуємо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

У нашому випадку:

$$\begin{aligned} A &= 2, B = -1, C = 3, \\ x_0 &= 1, y_0 = 2, z_0 = -1. \end{aligned}$$

Підставляємо:

$$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 1) = 0.$$

Розкриваємо дужки:

$$2x - 2 - y + 2 + 3z + 3 = 0.$$

Зводимо подібні доданки:

$$2x - y + 3z + 3 = 0.$$

Перевірка

Підставимо координати точки $M(1; 2; -1)$:

$$2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) + 3 = 0.$$

$$2 - 2 - 3 + 3 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Отже, точка належить отриманій площині.

Відповідь:

$$2x - y + 3z + 3 = 0.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 1; -1)$ і має нормальний вектор

$$\vec{n} = (1; 2; 3).$$

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $B(-; 1; 23)$ і має нормальний вектор

$$\vec{n} = (2; -; 11).$$

6. Площина, що проходить через три точки

Нехай задано три точки:

$$M_1(x_1; y_1; z_1),$$

$$M_2(x_2; y_2; z_2),$$

$$M_3(x_3; y_3; z_3).$$

Якщо ці точки не лежать на одній прямій, через них можна провести єдину площину.

Складемо два вектори:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Нормальний вектор площини можна знайти як векторний добуток:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Після цього використовується рівняння площини через точку та нормальний вектор.

Приклад 4. Складання рівняння площини через три точки

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки

$$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1).$$

Розв'язання

Знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1).$$

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюємо:

$$\vec{n} = (1; 1; 1).$$

Отже, нормальний вектор площини:

$$\vec{n} = (1; 1; 1).$$

Використовуємо точку $A(1; 0; 0)$:

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Отримуємо:

$$x - 1 + y + z = 0.$$

Тобто:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Перевірка

Для точки $A(1; 0; 0)$:

$$1 + 0 + 0 - 1 = 0.$$

Для точки $B(0; 1; 0)$:

$$0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Для точки $C(0; 0; 1)$:

$$0 + 0 + 1 - 1 = 0.$$

Усі три точки належать отриманій площині.

Відповідь:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 1), C(0; 1; 1).$$

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$$A(1; 1; 0), B(2; 0; 1), C(0; 2; 1).$$

7. Пряма у просторі

Для задання прямої у просторі необхідно **Знати:**

- одну точку, через яку проходить пряма;
- напрямний вектор цієї прямої.

Нехай пряма проходить через точку

$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

і має напрямний вектор

$$\vec{s} = (m; n; p).$$

Вектор $\vec{s}$ визначає напрям прямої.

8. Векторне рівняння прямої

Векторне рівняння прямої має вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

де:

- $\vec{r}$ — радіус-вектор довільної точки прямої;
- $\vec{r}_0$ — радіус-вектор заданої точки прямої;
- $\vec{s}$ — напрямний вектор;
- t — параметр, який може набувати будь-якого дійсного значення.

9. Параметричні рівняння прямої

Із векторного рівняння отримуємо параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Приклад 5. Складання параметричних рівнянь прямої

Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку

$$M(1; -; 23)$$

і має напрямний вектор

$$\vec{s} = (2; 1; -3).$$

Розв'язання

Маємо:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, y_0 = -2, z_0 = 3, \\ m &= 2, n = 1, p = -3. \end{aligned}$$

Підставляємо у параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Скласти параметричні рівняння прямої через точку $A(2; 1; -1)$ з напрямним вектором

$$\vec{s} = (1; -; 23).$$

2. Скласти параметричні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 32)$ з напрямним вектором

$$\vec{s} = (2; 1; -1).$$

10. Канонічні рівняння прямої

Якщо компоненти напрямного вектора не дорівнюють нулю, параметр t можна виключити.

Із рівнянь

$$\begin{aligned}x &= x_0 + mt, \\y &= y_0 + nt, \\z &= z_0 + pt\end{aligned}$$

отримуємо:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Тому канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Приклад 6. Складання канонічного рівняння прямої

Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку

$$A(2; -; 13)$$

і має напрямний вектор

$$\vec{s} = (3; 2; -1).$$

Розв'язання

Використовуємо формулу:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Підставляємо координати точки та напрямного вектора:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 13}{-1}.$$

Відповідь:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 13}{-1}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Скласти канонічні рівняння прямої через точку $M(1; 2; -3)$ з напрямним вектором

$$\vec{s} = (2; -; 14).$$

2. Скласти канонічні рівняння прямої через точку $N(-; 2; 14)$ з напрямним вектором

$$\vec{s} = (1; 3; -2).$$

11. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1)$$

і

$$M_2(x_2; y_2; z_2).$$

Напрямним вектором прямої можна взяти вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Приклад 7. Пряма через дві точки

Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки

$$A(1; 2; 3), B(3; 1; 5).$$

Розв'язання

Знайдемо напрямний вектор:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 1 - 2; 5 - 3).$$

Отже:

$$\overrightarrow{AB} = (2; -; 2).$$

Беремо точку $A(1; 2; 3)$ і напрямний вектор $(2; -; 2)$.

Канонічні рівняння:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

Відповідь:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Скласти рівняння прямої через точки

$$A(0; 1; 2), B(2; 3; 1).$$

2. Скласти рівняння прямої через точки

$$C(-; 1; 20), D(2; 1; 3).$$

12. Пряма як лінія перетину двох площин

Пряму у просторі можна задати системою двох рівнянь площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо площини не паралельні та не збігаються, вони перетинаються по прямій.

Нормальні вектори площин:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (A_1; B_1; C_1), \\ \vec{n}_2 &= (A_2; B_2; C_2). \end{aligned}$$

Напрямний вектор їхньої лінії перетину перпендикулярний до обох нормальних векторів, тому його можна знайти за допомогою векторного добутку:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Приклад 8. Пряма як перетин двох площин

Дано пряму:

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор прямої.

Розв'язання

Нормальний вектор першої площини:

$$\vec{n}_1 = (1; 1; 1).$$

Нормальний вектор другої площини:

$$\vec{n}_2 = (1; -; 11).$$

Знаходимо векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Отримуємо:

$$\vec{s} = (2; 0; -2).$$

Скоротимо координати на 2:

$$\vec{s} = (1; 0; -1).$$

Відповідь:

$$\vec{s} = (1; 0; -1).$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти напрямний вектор прямої:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

2. Знайти напрямний вектор прямої:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

13. Взаємне розміщення двох площин

Нехай задано площини:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Їх нормальні вектори:

$$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2).$$

Якщо нормальні вектори колінеарні, площини паралельні або збігаються.

Умова паралельності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо нормальні вектори перпендикулярні, площини перпендикулярні.

Тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Приклад 9. Визначення взаємного розміщення площин

Дослідити взаємне розміщення площин:

$$\begin{aligned}2x - y + 3z - 4 &= 0, \\4x - 2y + 6z + 5 &= 0.\end{aligned}$$

Розв'язання

Нормальні вектори:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (2; -; 13), \\ \vec{n}_2 &= (4; -; 26).\end{aligned}$$

Бачимо:

$$\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1.$$

Отже, нормальні вектори колінеарні, тому площини паралельні або збігаються.

Порівняємо всі коефіцієнти:

$$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{-2}{-1} = 2, \quad \frac{6}{3} = 2.$$

Але для вільних членів відповідної пропорційності немає:

$$\frac{5}{-4} \neq 2.$$

Отже, площини не збігаються.

Відповідь: площини паралельні.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Дослідити взаємне розміщення площин:

$$\begin{aligned}x + 2y - z + 3 &= 0, \\2x + 4y - 2z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

2. Дослідити взаємне розміщення площин:

$$\begin{aligned}x + y + z - 2 &= 0, \\x - y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

14. Взаємне розміщення прямої та площини

Нехай пряма має напрямний вектор

$$\vec{s} = (m; n; p),$$

а площина — нормальний вектор

$$\vec{n} = (A; B; C).$$

Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = Am + Bn + Cp.$$

Якщо

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

то напрямний вектор прямої перпендикулярний до нормального вектора площини. Отже, пряма **паралельна площині або лежить у ній**. Для розрізнення цих двох випадків потрібно перевірити, чи належить точка прямої площині.

Якщо напрямний вектор прямої колінеарний нормальному вектору площини, то пряма перпендикулярна до площини.

Приклад 10. Пряма та площина

Дано пряму

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3, \end{cases}$$

і площину

$$x + y + 2z - 10 = 0.$$

Визначити їх взаємне розміщення.

Розв'язання

Напрямний вектор прямої:

$$\vec{s} = (1; -; 10).$$

Нормальний вектор площини:

$$\vec{n} = (1; 1; 2).$$

Обчислюємо скалярний добуток:

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2.$$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 0.$$

Отже, пряма паралельна площині або лежить у ній.

Перевіримо точку прямої, що відповідає $t = 0$:

$$M(1; 2; 3).$$

Підставляємо її координати в рівняння площини:

$$1 + 2 + 2 \cdot 3 - 10 = -1.$$

Отримали:

$$-1 \neq 0.$$

Точка прямої площині не належить.

Отже, пряма не лежить у площині.

Відповідь: пряма паралельна площині.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Визначити взаємне розміщення прямої

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3, \end{cases}$$

та площини

$$x + y + z - 5 = 0.$$

2. Визначити взаємне розміщення прямої

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

та площини

$$x + 3y + z - 8 = 0.$$

Питання для самоконтролю

1. Як задається положення точки у тривимірному просторі?
2. Які координатні площини існують у прямокутній декартовій системі координат?
3. Який вигляд має загальне рівняння площини?
4. Який вектор називається нормальним вектором площини?

5. Як визначити координати нормального вектора за загальним рівнянням площини?
6. Як перевірити, чи належить задана точка площині?
7. Як записується рівняння площини, що проходить через задану точку та має заданий нормальний вектор?
8. Якими даними можна однозначно задати площину?
9. Як скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки?
10. Для чого під час складання рівняння площини через три точки використовується векторний добуток?
11. Який вектор називається напрямним вектором прямої?
12. Які дані необхідні для задання прямої у просторі?
13. Як записується векторне рівняння прямої?
14. Як записуються параметричні рівняння прямої?
15. Як записуються канонічні рівняння прямої?
16. Як скласти напрямний вектор прямої, що проходить через дві задані точки?
17. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві точки?
18. Як пряму у просторі можна задати за допомогою двох площин?
19. Як знайти напрямний вектор лінії перетину двох площин?
20. За якої умови дві площини паралельні?
21. За якої умови дві площини перпендикулярні?
22. Як визначити, що пряма паралельна площині?
23. Як відрізнити пряму, яка паралельна площині, від прямої, яка лежить у площині?
24. За якої умови пряма перпендикулярна до площини?
25. Чому після складання рівняння площини або прямої доцільно виконувати перевірку?

Завдання для виконання

Завдання 1

Для площини

$$3x - 2y + 4z - 7 = 0$$

визначити координати нормального вектора. Перевірити, чи належить цій площині точка

$$A(1; 2; 2).$$

Завдання 2

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку

$$M(2; -; 13)$$

і має нормальний вектор

$$\vec{n} = (1; 2; -2).$$

Отримане рівняння привести до загального вигляду та виконати перевірку.

Завдання 3

Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки:

$$A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3).$$

Необхідно знайти два вектори, що лежать у площині, визначити їх векторний добуток, знайти нормальний вектор та записати загальне рівняння площини.

Завдання 4

Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку

$$A(1; -; 23)$$

і має напрямний вектор

$$\vec{s} = (2; 3; -1).$$

Завдання 5

Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої, яка проходить через точки

$$A(1; 2; -1), B(3; -; 12).$$

Спочатку визначити напрямний вектор прямої.

Завдання 6

Дано пряму як лінію перетину площин:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0. \end{cases}$$

Визначити нормальні вектори обох площин та знайти напрямний вектор заданої прямої.

Завдання 7

Дослідити взаємне розміщення площин:

$$\begin{aligned} 2x - y + z - 3 &= 0, \\ 4x - 2y + 2z + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Обґрунтувати відповідь за допомогою нормальних векторів.

Завдання 8

Визначити взаємне розміщення прямої

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -1 - t \end{cases}$$

та площини

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

Знайти напрямний вектор прямої, нормальний вектор площини, обчислити їх скалярний добуток і зробити висновок.

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**. Усі варіанти є загальноматематичними та не пов'язані з конкретною спеціальністю.

У кожному варіанті необхідно виконати **три завдання**:

1. скласти рівняння площини через задану точку із заданим нормальним вектором;
2. скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через задану точку із заданим напрямним вектором;
3. перевірити, чи належить задана точка заданій площині.

Варіант 1

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; 2; 1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; -; 13)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; -; 13)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; -1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 1; 1)$ площині $x + 2y + z - 4 = 0$.

Варіант 2

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 1; -1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 3; 2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 21)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 1; 3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 0; 1)$ площині $2x - y + z - 5 = 0$.

Варіант 3

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 1; 23)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; -1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; 3; -2)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; -; 22)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; 0)$ площині $x + y + 2z - 3 = 0$.

Варіант 4

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; -; 12)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 2; 1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; 1; -3)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; -; 12)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(0; 1; 2)$ площині $2x + y + z - 3 = 0$.

Варіант 5

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; -; 22)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; 1; -2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 2; 13)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 3; 1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 1)$ площині $x - y + 2z - 3 = 0$.

Варіант 6

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 3; 1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; -; 23)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; -; 12)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 1; -3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 0; 2)$ площині $3x + y - z - 1 = 0$.

Варіант 7

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 2; 12)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 3; 1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(3; 2; -1)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; -; 12)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; 1)$ площині $2x + y - z - 3 = 0$.

Варіант 8

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; 3; -2)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 2; -3)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 24)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; 1; -2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; -; 11)$ площині $x + 2y + z - 1 = 0$.

Варіант 9

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; -; 14)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; -; 21)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; 3; 2)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; 3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 1; 2)$ площині $2x - y + z - 3 = 0$.

Варіант 10

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; 2; -1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; 1; 2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; -; 21)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; -; 11)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(0; 2; 1)$ площині $x + y + 2z - 4 = 0$.

Варіант 11

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; 1; 3)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; 2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 32)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 3; -2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 0)$ площині $x + 2y + z - 4 = 0$.

Варіант 12

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; -; 21)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 3; -1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(3; 1; -2)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 1; 2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; 2)$ площині $2x + y - z - 2 = 0$.

Варіант 13

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 1; 32)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; 2; 1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; -; 11)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; -; 23)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 0; 1)$ площині $x + y + z - 3 = 0$.

Варіант 14

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 1; 3)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; -; 12)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; 2; -1)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; 2; 1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; -; 12)$ площині $2x - y + z - 5 = 0$.

Варіант 15

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; -; 21)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 2; 3)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 2; 12)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 3; -1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; -1)$ площині $x - y + 2z + 1 = 0$.

Варіант 16

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; 4; -1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; -2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; -; 13)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; 2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 1; 3)$ площині $x + 2y - z = 0$.

Варіант 17

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 2; 21)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; -; 12)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; 3; -1)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; -; 21)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 1)$ площині $x + y + z - 4 = 0$.

Варіант 18

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 3; -2)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; -; 32)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 23)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; 1; 2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; -1)$ площині $2x - y + z + 1 = 0$.

Варіант 19

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; 1; 2)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 3; -1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; -; 31)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; -2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(0; 1; 2)$ площині $3x + y + z - 3 = 0$.

Варіант 20

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; -; 14)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; 2; 1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 2; 21)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 1; 3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 0; 2)$ площині $2x + y + z - 4 = 0$.

Варіант 21

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 2; 3)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 2; -1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(3; -; 12)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 3; 1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 1)$ площині $x + 2y - z - 3 = 0$.

Варіант 22

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 1; 13)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; 3)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; 2; -2)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 3; 2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; 1)$ площині $2x - y + z - 1 = 0$.

Варіант 23

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; -; 11)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 3; 2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 32)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; -; 13)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 0)$ площині $x + y + 2z - 3 = 0$.

Варіант 24

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; 3; 2)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; -; 21)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(2; 1; -1)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; 3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; -; 12)$ площині $x - y + z - 4 = 0$.

Варіант 25

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; -; 13)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; -3)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 2; 14)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; 2; 1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 0; 1)$ площині $x + 3y + z - 3 = 0$.

Варіант 26

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 1; 24)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 3; -2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(3; 1; -2)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; -; 11)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 1; 2)$ площині $2x + y - z - 1 = 0$.

Варіант 27

1. Скласти рівняння площини через точку $A(3; 2; 1)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; -; 31)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; -; 23)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (1; 2; -3)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(0; 2; 1)$ площині $x + y + z - 3 = 0$.

Варіант 28

1. Скласти рівняння площини через точку $A(1; -; 32)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (3; 1; 2)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(-; 1; 23)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 3; -1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 1)$ площині $2x - y + z - 4 = 0$.

Варіант 29

1. Скласти рівняння площини через точку $A(2; 1; -3)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (1; 2; 3)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(3; -; 21)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (2; 1; -2)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(1; 2; 0)$ площині $x + y + z - 3 = 0$.

Варіант 30

1. Скласти рівняння площини через точку $A(-; 2; 31)$ з нормальним вектором $\vec{n} = (2; 1; -1)$.
2. Скласти параметричні та канонічні рівняння прямої через точку $B(1; -; 12)$ з напрямним вектором $\vec{s} = (3; 2; 1)$.
3. Перевірити, чи належить точка $C(2; 1; 1)$ площині $x + 2y + z - 5 = 0$.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

У першому завданні необхідно записати координати заданої точки та нормального вектора, використати рівняння площини через точку з заданим нормальним вектором, розкрити дужки, привести рівняння до загального вигляду та виконати перевірку.

У другому завданні необхідно записати координати заданої точки та напрямного вектора, скласти параметричні рівняння прямої, а потім перейти до канонічного рівняння.

У третьому завданні необхідно підставити координати заданої точки в рівняння площини та на підставі отриманої рівності або нерівності зробити обґрунтований висновок про належність точки площині.

Підсумок самостійної роботи

Після самостійного опрацювання теми здобувач освіти повинен чітко розрізняти способи аналітичного задання **площини та прямої у тривимірному просторі**.

Для площини основним є її нормальний вектор

$$\vec{n} = (A; B; C),$$

координати якого визначають коефіцієнти при x , y , z у загальному рівнянні

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для прямої основним є напрямний вектор

$$\vec{s} = (m; n; p),$$

який визначає її напрям у просторі. Якщо відомі точка прямої та напрямний вектор, можна скласти її векторне, параметричне та канонічне рівняння.

Особливу увагу під час виконання самостійної роботи необхідно приділити тому, щоб **не плутати нормальний вектор площини з напрямним вектором прямої**. Нормальний вектор перпендикулярний площині, а напрямний вектор задає напрям прямої.

Правильно виконана самостійна робота повинна містити не тільки кінцеве рівняння, а й **повний хід побудови рівняння, визначення необхідних векторів, послідовні перетворення та перевірку отриманого результату**.

План самостійного вивчення теми № 5 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 5. Диференціал

Тема: Диференціал функції однієї змінної.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 3 «Диференціальне числення функції однієї змінної» та безпосередньо пов'язана з поняттям похідної функції. У навчальному посібнику О. І. Кушлик-Дивульської та Т. В. Авдєєвої серед питань диференціального числення окремо виділено поняття диференціала функції, його обчислення, властивості та застосування диференціала для обчислення наближених значень функції.

Усі приклади та завдання цієї самостійної роботи мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття приросту аргументу;
- поняття приросту функції;
- поняття диференційовності функції;
- означення диференціала функції однієї змінної;
- зв'язок між похідною та диференціалом функції;
- формулу для знаходження диференціала функції;
- поняття диференціала незалежної змінної;
- основні правила знаходження диференціалів;
- диференціали основних елементарних функцій;
- геометричний зміст диференціала;
- зв'язок між приростом функції та її диференціалом;
- принцип використання диференціала для наближених обчислень.

Вміти:

- знаходити приріст аргументу;
- знаходити приріст функції;
- знаходити похідну заданої функції;
- обчислювати диференціал функції;
- знаходити значення диференціала в заданій точці;
- застосовувати правила диференціювання під час знаходження диференціала;
- знаходити диференціали складених функцій;
- порівнювати приріст функції з її диференціалом;
- використовувати диференціал для наближеного обчислення значень функцій;
- правильно оформлювати послідовність розв'язування задач.

Навчальні питання

1. Приріст аргументу та приріст функції.
2. Поняття диференційовності функції.
3. Означення диференціала функції.
4. Формула диференціала функції однієї змінної.
5. Основні правила знаходження диференціала.
6. Диференціали основних елементарних функцій.
7. Геометричний зміст диференціала.
8. Зв'язок між приростом функції та диференціалом.
9. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: перед вивченням диференціала необхідно повторити означення похідної функції та основні правила диференціювання. Диференціал функції безпосередньо визначається через її похідну.

По-друге: необхідно чітко розрізняти **приріст функції** Δu і **диференціал функції** du . Це різні величини. Диференціал є головною лінійною частиною приросту диференційовної функції.

По-третє: для незалежної змінної x її диференціал дорівнює приросту:

$$dx = \Delta x.$$

Тому для функції

$$y = f(x)$$

диференціал знаходять за формулою

$$\boxed{dy = f'(x) dx}.$$

По-четверте: під час знаходження диференціала спочатку необхідно правильно знайти похідну функції, а потім отриманий результат помножити на dx .

По-п'яте: під час роботи зі складеною функцією необхідно застосовувати правило диференціювання складеної функції. Не можна диференціювати тільки зовнішню функцію, не враховуючи похідну внутрішньої функції.

По-шосте: під час наближених обчислень потрібно вибирати таке значення x_0 , для якого значення функції та її похідної легко обчислити. Після цього невелику зміну аргументу використовують для наближеного визначення зміни функції.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Авдєєва Т. В. **Вища математика. Частина 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення** : курс лекцій : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 269 сторінок.
2. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. **Вища математика. Практикум** : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.

3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. **Прикладні задачі з вищої математики** : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 сторінок.
4. Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б.; за редакцією О. І. Клесова. **Математика в технічному університеті**. Том 2. Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. 504 сторінки.
5. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт»**. Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Приріст аргументу

Нехай незалежна змінна x має початкове значення

$$x = x_0.$$

Надамо аргументу деякого приросту Δx . Тоді нове значення аргументу дорівнює

$$x_0 + \Delta x.$$

Величина

$$\Delta x = x - x_0$$

називається **приростом аргументу**.

Приріст аргументу може бути додатним або від'ємним.

Наприклад, якщо

$$x_0 = 3, x = 3,2,$$

то

$$\Delta x = 3,2 - 3 = 0,2.$$

Якщо

$$x_0 = 5, x = 4,9,$$

то

$$\Delta x = 4,9 - 5 = -0,1.$$

2. Приріст функції

Нехай задано функцію

$$y = f(x).$$

Початковому значенню аргументу відповідає значення функції

$$y = f(x).$$

Після зміни аргументу на Δx нове значення функції дорівнюватиме

$$f(x + \Delta x).$$

Різниця

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

називається **приростом функції**.

Приклад 1. Знаходження приросту функції

Для функції

$$y = x^2$$

знайти приріст функції при переході аргументу від

$$x = 2$$

до

$$x = 2,1.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо приріст аргументу.

$$\Delta x = 2,1 - 2 = 0,1.$$

Крок 2. Знайдемо початкове значення функції.

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Крок 3. Знайдемо нове значення функції.

$$f(2,1) = (2,1)^2 = 4,41.$$

Крок 4. Знайдемо приріст функції.

$$\Delta y = f(2,1) - f(2).$$

$$\Delta y = 4,41 - 4 = 0,41.$$

Відповідь:

$$\Delta x = 0,1, \Delta y = 0,41.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для функції $y = x^2$ знайти приріст функції при переході аргументу від $x = 3$ до $x = 3,1$.
2. Для функції $y = x^3$ знайти приріст функції при переході аргументу від $x = 2$ до $x = 2,05$.

3. Поняття диференціала функції

Нехай функція

$$y = f(x)$$

диференційовна в точці x .

Її приріст можна подати у вигляді

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де величина

$$\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$$

при

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

Перша частина

$$f'(x)\Delta x$$

є лінійною відносно приросту аргументу.

Саме вона називається **диференціалом функції**.

Отже,

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Оскільки для незалежної змінної

$$dx = \Delta x,$$

отримуємо основну формулу:

$$\boxed{dy = f'(x) dx}.$$

Таким чином, щоб знайти диференціал функції, необхідно:

1. знайти похідну $f'(x)$;

2. помножити отриману похідну на dx .

4. Диференціал незалежної змінної

Розглянемо функцію

$$y = x.$$

Її похідна:

$$y' = 1.$$

Тому:

$$dy = 1 \cdot dx = dx.$$

Отже, для незалежної змінної:

$$\boxed{dx = \Delta x}.$$

Ця рівність має важливе значення, оскільки дозволяє записувати диференціал довільної диференційовної функції у формі

$$dy = f'(x) dx.$$

5. Знаходження диференціала функції

Приклад 2. Диференціал степеневих функцій

Знайти диференціал функції

$$y = x^4.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо похідну функції.

$$y' = 4x^3.$$

Крок 2. Використаємо формулу диференціала.

$$dy = y' dx.$$

Отже:

$$dy = 4x^3 dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 4x^3 dx}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = x^5.$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = x^7.$$

Приклад 3. Диференціал многочлена

Знайти диференціал функції

$$y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо похідну.

$$y' = (3x^4 - 5x^2 + 2x - 7)'.$$

Диференціюємо кожний доданок:

$$(3x^4)' = 12x^3,$$

$$(-5x^2)' = -10x,$$

$$(2x)' = 2,$$

$$(-7)' = 0.$$

Отже:

$$y' = 12x^3 - 10x + 2.$$

Крок 2. Знаходимо диференціал.

$$dy = y' dx.$$

Тому:

$$\boxed{dy = (12x^3 - 10x + 2) dx}.$$

Відповідь:

$$dy = (12x^3 - 10x + 2) dx.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = 2x^5 - 3x^3 + 4x - 1.$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 6.$$

6. Основні правила знаходження диференціалів

Правила знаходження диференціалів безпосередньо впливають із правил диференціювання.

Якщо $u = u(x)$, $v = v(x)$, а C — стала, то:

Диференціал сталої

$$dC = 0.$$

Диференціал суми

$$d(u + v) = du + dv.$$

Диференціал різниці

$$d(u - v) = du - dv.$$

Диференціал добутку

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Диференціал частки

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Диференціал складеної функції

Якщо

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

то

$$dy = f'(u) du,$$

де

$$du = \varphi'(x) dx.$$

7. Диференціали основних елементарних функцій

Для степеневі функції:

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

Для показникової функції:

$$d(e^x) = e^x dx.$$

Для логарифмічної функції:

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx.$$

Для синуса:

$$d(\sin x) = \cos x dx.$$

Для косинуса:

$$d(\cos x) = -\sin x dx.$$

Для тангенса:

$$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Для кореня:

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Приклад 4. Диференціал тригонометричної функції

Знайти диференціал функції

$$y = \sin x + 2 \cos x .$$

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$y' = (\sin x)' + 2(\cos x)'.$$

Використовуємо формули:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x , \\ (\cos x)' &= -\sin x . \end{aligned}$$

Отже:

$$y' = \cos x - 2 \sin x .$$

Тоді:

$$dy = (\cos x - 2 \sin x) dx.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = (\cos x - 2 \sin x) dx}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = 2 \sin x + \cos x .$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = 3 \cos x - \sin x .$$

Приклад 5. Диференціал складеної функції

Знайти диференціал функції

$$y = (2x + 3)^5 .$$

Розв'язання

Функція є складеною.

Позначимо:

$$u = 2x + 3 .$$

Тоді:

$$y = u^5 .$$

Крок 1. Знайдемо диференціал зовнішньої функції.

$$dy = 5u^4 du .$$

Крок 2. Знайдемо диференціал внутрішньої функції.

$$du = d(2x + 3) .$$

$$du = 2 dx .$$

Крок 3. Підставимо du .

$$dy = 5u^4 \cdot 2 dx .$$

$$dy = 10u^4 dx .$$

Повертаємося до змінної x :

$$\boxed{dy = 10(2x + 3)^4 dx} .$$

Відповідь:

$$dy = 10(2x + 3)^4 dx .$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = (3x - 1)^4.$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = (5x + 2)^6.$$

Приклад 6. Диференціал кореневої функції

Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{3x + 1}.$$

Розв'язання

Запишемо функцію у степеневій формі:

$$y = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3.$$

Отже:

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Тоді диференціал:

$$\boxed{dy = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} dx}.$$

Відповідь:

$$dy = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} dx.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{2x + 5}.$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{5x - 1}.$$

Приклад 7. Диференціал логарифмічної функції

Знайти диференціал функції

$$y = \ln(3x + 2).$$

Розв'язання

Знайдемо похідну складеної функції:

$$y' = \frac{1}{3x + 2} \cdot 3.$$

Отже:

$$y' = \frac{3}{3x + 2}.$$

За формулою

$$dy = y' dx$$

маємо:

$$\boxed{dy = \frac{3}{3x + 2} dx}.$$

Відповідь:

$$dy = \frac{3}{3x + 2} dx.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти диференціал функції

$$y = \ln(2x + 1).$$

2. Знайти диференціал функції

$$y = \ln(5x - 3).$$

8. Значення диференціала в заданій точці

Якщо потрібно знайти не тільки загальний вираз диференціала, а його числове значення, необхідно **Знати**:

- значення аргументу x ;
- значення dx .

Після знаходження

$$dy = f'(x) dx$$

підставляють задані значення.

Приклад 8. Обчислення значення диференціала

Для функції

$$y = x^3 - 2x$$

знайти диференціал при

$$x = 2, dx = 0,01.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо похідну.

$$y' = 3x^2 - 2.$$

Крок 2. Запишемо диференціал.

$$dy = (3x^2 - 2) dx.$$

Крок 3. Підставимо $x = 2$.

$$dy = (3 \cdot 2^2 - 2) dx.$$

$$dy = (12 - 2) dx.$$

$$dy = 10 dx.$$

Крок 4. Підставимо $dx = 0,01$.

$$dy = 10 \cdot 0,01 = 0,1.$$

Відповідь:

$$\boxed{dy = 0,1}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для функції $y = x^2 + 3x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,02$.
2. Для функції $y = x^3 + x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,05$.

9. Геометричний зміст диференціала

Нехай графік функції

$$y = f(x)$$

має в точці

$$M(x; f(x))$$

дотичну.

Похідна

$$f'(x)$$

дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної.

Якщо аргумент отримує малий приріст

$$dx = \Delta x,$$

то відповідна зміна ординати точки **на дотичній** дорівнює

$$dy = f'(x) dx.$$

Таким чином, **диференціал функції геометрично являє собою приріст ординати дотичної до графіка функції**, який відповідає приросту аргументу dx .

При малих значеннях dx графік функції поблизу заданої точки мало відрізняється від своєї дотичної. Саме це дозволяє використовувати диференціал для наближених обчислень.

10. Зв'язок між приростом функції та диференціалом

Для диференційовної функції

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

де

$$\alpha \rightarrow 0$$

при

$$\Delta x \rightarrow 0.$$

Тому при малих значеннях приросту аргументу можна використовувати наближену рівність

$$\boxed{\Delta y \approx dy}.$$

Але необхідно пам'ятати:

$$\Delta y \neq dy$$

у загальному випадку.

Диференціал лише наближено замінює приріст функції при достатньо малому прирості аргументу.

Приклад 9. Порівняння приросту та диференціала

Для функції

$$y = x^2$$

при

$$x = 2, \Delta x = 0,1$$

знайти приріст функції Δy та диференціал dy .

Розв'язання

Крок 1. Знаходимо точний приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Підставляємо:

$$\Delta y = (2, +01)^2 - 2^2.$$

$$\Delta y = (2, 1)^2 - 4.$$

$$\Delta y = 4,41 - 4.$$

$$\Delta y = 0,41.$$

Крок 2. Знаходимо диференціал

Для функції

$$y = x^2$$

похідна:

$$y' = 2x.$$

Тому:

$$dy = 2x \, dx.$$

Оскільки

$$dx = \Delta x = 0,1,$$

при $x = 2$:

$$dy = 2 \cdot 2 \cdot 0,1.$$

$$dy = 0,4.$$

Отже:

$$\Delta y = 0,41,$$

а

$$dy = 0,4.$$

Бачимо, що ці значення близькі:

$$0,41 \approx 0,4.$$

Відповідь:

$$\boxed{\Delta y = 0,41, dy = 0,4}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для функції $y = x^2$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0,05$ знайти Δy і dy , порівняти отримані результати.
2. Для функції $y = x^3$ при $x = 1$ та $\Delta x = 0,02$ знайти Δy і dy , порівняти отримані результати.

11. Застосування диференціала до наближених обчислень

Оскільки при малому прирості аргументу

$$\Delta y \approx dy,$$

то

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Звідси отримуємо важливу формулу:

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}.$$

Інший поширений запис:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}.$$

Для наближеного обчислення необхідно:

1. подати задане число у вигляді $x_0 + \Delta x$;
2. вибрати зручне значення x_0 ;
3. знайти $f(x_0)$;
4. знайти похідну $f'(x)$;
5. обчислити $f'(x_0)$;
6. визначити $dx = \Delta x$;

7. знайти диференціал;
8. використати формулу наближеного обчислення.

Приклад 10. Наближене обчислення квадратного кореня

За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt{4,04}.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Число 4,04подамо у вигляді

$$4,04 = 4 + 0,04.$$

Отже:

$$x_0 = 4, \Delta x = 0,04.$$

Крок 1. Знайдемо значення функції при $x_0 = 4$.

$$f(4) = \sqrt{4} = 2.$$

Крок 2. Знайдемо похідну.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

При $x = 4$:

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}}.$$
$$f'(4) = \frac{1}{4}.$$

Крок 3. Знайдемо диференціал.

$$dy = f'(4)\Delta x.$$

$$dy = \frac{1}{4} \cdot 0,04.$$

$$dy = 0,01.$$

Крок 4. Використаємо наближену рівність.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy.$$

Тому:

$$\sqrt{4,04} \approx 2 + 0,01.$$

$$\boxed{\sqrt{4,04} \approx 2,01}.$$

Відповідь:

$$\sqrt{4,04} \approx 2,01.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt{9,06}.$$

2. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt{15,96}.$$

Приклад 11. Наближене обчислення кубічного кореня

За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt[3]{8,12}.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}.$$

Вибираємо:

$$x_0 = 8, \Delta x = 0,12.$$

Маємо:

$$f(8) = 2.$$

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

При $x = 8$:

$$f'(8) = \frac{1}{3 \cdot 8^{2/3}}.$$

Оскільки

$$8^{1/3} = 2,$$

то

$$8^{2/3} = 4.$$

Отже:

$$f'(8) = \frac{1}{12}.$$

Знаходимо диференціал:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{12} \cdot 0,12. \\ dy &= 0,01. \end{aligned}$$

Тому:

$$\sqrt[3]{8,12} \approx 2 + 0,01.$$

Отже:

$$\boxed{\sqrt[3]{8,12} \approx 2,01}.$$

Відповідь:

$$\sqrt[3]{8,12} \approx 2,01.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt[3]{27,27}.$$

2. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt[3]{7,92}.$$

Приклад 12. Наближене обчислення степеня

За допомогою диференціала наближено обчислити

$$(1,02)^4.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію

$$f(x) = x^4.$$

Вибираємо:

$$x_0 = 1, \Delta x = 0,02.$$

Знаходимо:

$$f(1) = 1.$$

Похідна:

$$f'(x) = 4x^3.$$

Тому:

$$f'(1) = 4.$$

Знаходимо диференціал:

$$dy = f'(1)\Delta x.$$

$$dy = 4 \cdot 0,02.$$

$$dy = 0,08.$$

Використовуємо наближену формулу:

$$f(1, +002) \approx f(1) + dy.$$

Отже:

$$(1, 02)^4 \approx 1 + 0,08.$$

$$\boxed{(1, 02)^4 \approx 1,08}.$$

Відповідь:

$$(1, 02)^4 \approx 1,08.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$(1, 01)^5.$$

2. За допомогою диференціала наближено обчислити

$$(0, 98)^3.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається приростом аргументу?
2. Як позначається приріст аргументу?
3. Як визначається приріст функції?
4. Як записується формула приросту функції?

5. Що називається диференціалом функції?
6. Який зв'язок існує між похідною та диференціалом функції?
7. Як записується основна формула диференціала?
8. Чому для незалежної змінної виконується рівність $dx = \Delta x$?
9. Як знайти диференціал степеневої функції?
10. Як знайти диференціал суми двох функцій?
11. Як знайти диференціал різниці функцій?
12. Як знайти диференціал добутку функцій?
13. Як знайти диференціал частки двох функцій?
14. Як знайти диференціал складеної функції?
15. Чому під час знаходження диференціала складеної функції необхідно враховувати похідну внутрішньої функції?
16. Як знайти числове значення диференціала в заданій точці?
17. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
18. Чим диференціал функції відрізняється від приросту функції?
19. За якої умови можна використовувати наближену рівність $\Delta y \approx dy$?
20. Яка формула використовується для наближеного обчислення значень функції?
21. Як правильно вибрати початкове значення x_0 для наближеного обчислення?
22. Чому приріст аргументу для наближеного обчислення повинен бути малим?
23. Як за допомогою диференціала наближено обчислювати квадратні корені?
24. Як за допомогою диференціала наближено обчислювати степені чисел?
25. Яку роль відіграє похідна під час знаходження диференціала?

Завдання для виконання

Завдання 1

Знайти диференціал функції

$$y = 5x^4 - 3x^2 + 2x - 8.$$

Необхідно спочатку знайти похідну функції, а потім записати її диференціал.

Завдання 2

Знайти диференціал функції

$$y = (3x + 2)^5.$$

Під час розв'язування показати застосування правила диференціювання складеної функції.

Завдання 3

Знайти диференціал функції

$$y = \sqrt{2x + 3}.$$

Записати функцію у степеневій формі, знайти похідну та диференціал.

Завдання 4

Знайти диференціал функції

$$y = \ln(4x + 1).$$

Завдання 5

Для функції

$$y = x^3 - 4x + 2$$

знайти значення диференціала при

$$x = 2, dx = 0,02.$$

Завдання 6

Для функції

$$y = x^2$$

при

$$x = 4, \Delta x = 0,1$$

знайти точний приріст функції Δy , диференціал dy та порівняти отримані значення.

Завдання 7

За допомогою диференціала наближено обчислити

$$\sqrt{25,1}.$$

Необхідно обґрунтувати вибір початкового значення аргументу.

Завдання 8

За допомогою диференціала наближено обчислити

$$(1,03)^5.$$

Записати функцію, вибрати зручне початкове значення аргументу, знайти похідну та використати формулу наближеного обчислення.

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**.

Усі варіанти мають однакову структуру і містять **три завдання**:

1. знайти диференціал заданої функції;
2. обчислити значення диференціала при заданих x і dx ;
3. виконати наближене обчислення за допомогою диференціала.

Умови всіх варіантів наведено повністю.

Варіант 1

1. Знайти диференціал функції $y = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$.
2. Для функції $y = x^3 + 2x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{4,04}$.

Варіант 2

1. Знайти диференціал функції $y = 2x^5 - 4x^3 + 3x + 2$.
2. Для функції $y = x^2 + 4x$ знайти значення диференціала при $x = 3$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{9,06}$.

Варіант 3

1. Знайти диференціал функції $y = (2x + 1)^4$.
2. Для функції $y = x^3 - x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,03$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{16,08}$.

Варіант 4

1. Знайти диференціал функції $y = (3x - 2)^5$.
2. Для функції $y = 2x^2 + 3x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{24,9}$.

Варіант 5

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{3x + 1}$.
2. Для функції $y = x^4$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{36,12}$.

Варіант 6

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{2x + 5}$.
2. Для функції $y = x^3 + 3x^2$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{48,9}$.

Варіант 7

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(2x + 3)$.
2. Для функції $y = 3x^2 - 2x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,04$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{8,12}$.

Варіант 8

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(4x + 1)$.
2. Для функції $y = x^3 + 5x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{27,27}$.

Варіант 9

1. Знайти диференціал функції $y = \sin(3x + 1)$.
2. Для функції $y = 2x^3 - x^2$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{64,32}$.

Варіант 10

1. Знайти диференціал функції $y = \cos(2x - 1)$.
2. Для функції $y = x^4 - 2x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,05$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{124,5}$.

Варіант 11

1. Знайти диференціал функції $y = 4x^5 - 3x^2 + 2x - 6$.
2. Для функції $y = x^2 + 2x + 1$ знайти значення диференціала при $x = 3$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(1,01)^4$.

Варіант 12

1. Знайти диференціал функції $y = 5x^4 - 2x^3 + x - 7$.
2. Для функції $y = x^3 + 4x^2$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(1,02)^5$.

Варіант 13

1. Знайти диференціал функції $y = (4x + 3)^3$.
2. Для функції $y = 2x^2 + x$ знайти значення диференціала при $x = 4$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(0,99)^3$.

Варіант 14

1. Знайти диференціал функції $y = (5x - 1)^4$.
2. Для функції $y = x^3 - 3x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(0,98)^4$.

Варіант 15

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{4x + 1}$.
2. Для функції $y = 3x^3 + x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,03$.

3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{64,16}$.

Варіант 16

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{5x - 2}$.
2. Для функції $y = x^4 + x^2$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{80,8}$.

Варіант 17

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(3x + 4)$.
2. Для функції $y = 2x^3 + 3x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{125,75}$.

Варіант 18

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(5x + 2)$.
2. Для функції $y = x^3 + 2x^2 - x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{215,46}$.

Варіант 19

1. Знайти диференціал функції $y = \sin(4x - 2)$.
2. Для функції $y = 4x^2 - 3x$ знайти значення диференціала при $x = 3$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(1,03)^3$.

Варіант 20

1. Знайти диференціал функції $y = \cos(5x + 1)$.
2. Для функції $y = x^4 - 3x^2$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(0,97)^4$.

Варіант 21

1. Знайти диференціал функції $y = 6x^4 - 5x^2 + 3x - 2$.

2. Для функції $y = x^3 + 2x$ знайти значення диференціала при $x = 3$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{100,2}$.

Варіант 22

1. Знайти диференціал функції $y = 3x^5 + 2x^3 - 4x + 1$.
2. Для функції $y = 2x^2 + 5x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,03$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{120,78}$.

Варіант 23

1. Знайти диференціал функції $y = (2x - 3)^6$.
2. Для функції $y = x^4 + x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,04$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{216,54}$.

Варіант 24

1. Знайти диференціал функції $y = (3x + 4)^4$.
2. Для функції $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{342,3}$.

Варіант 25

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{6x + 1}$.
2. Для функції $y = 3x^2 + x$ знайти значення диференціала при $x = 4$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(1,04)^3$.

Варіант 26

1. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{7x - 3}$.
2. Для функції $y = 2x^3 + x^2$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(0,96)^5$.

Варіант 27

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(6x + 1)$.
2. Для функції $y = x^4 - 2x^2 + x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{143,76}$.

Варіант 28

1. Знайти диференціал функції $y = \ln(7x - 2)$.
2. Для функції $y = 3x^3 - 2x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,05$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt{169,26}$.

Варіант 29

1. Знайти диференціал функції $y = \sin(5x + 2)$.
2. Для функції $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ знайти значення диференціала при $x = 2$, $dx = 0,01$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $\sqrt[3]{511,2}$.

Варіант 30

1. Знайти диференціал функції $y = \cos(6x - 1)$.
2. Для функції $y = 2x^4 - x^2 + 3x$ знайти значення диференціала при $x = 1$, $dx = 0,02$.
3. За допомогою диференціала наближено обчислити $(1,05)^4$.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

У першому завданні необхідно записати задану функцію, знайти її похідну із зазначенням використаного правила диференціювання та записати диференціал у вигляді

$$dy = f'(x) dx.$$

У другому завданні необхідно спочатку отримати загальну формулу диференціала, після чого підставити задане значення аргументу x та задане значення dx . У відповіді потрібно записати числове значення диференціала.

У третьому завданні необхідно вибрати зручне значення x_0 , представити заданий аргумент у вигляді

$$x = x_0 + \Delta x,$$

знайти значення функції $f(x_0)$, похідну $f'(x_0)$, диференціал

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

і застосувати наближену формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Необхідно записувати **повний хід розв'язування**, а не тільки кінцеву відповідь.

Підсумок самостійної роботи

Після самостійного опрацювання теми здобувач освіти повинен розуміти, що **диференціал функції є головною лінійною частиною приросту диференційовної функції**.

Основною формулою теми є

$$\boxed{dy = f'(x) dx}.$$

Отже, знаходження диференціала безпосередньо пов'язане зі знаходженням похідної функції. Тому правильне застосування правил диференціювання є обов'язковою умовою правильного обчислення диференціала.

Необхідно чітко розрізняти:

$$\Delta y$$

— точний приріст функції та

$$dy$$

— її диференціал.

Для малого приросту аргументу справедлива наближена рівність

$$\Delta y \approx dy,$$

що дає можливість використовувати диференціал для наближених обчислень. Застосування диференціала до наближеного обчислення значень функції прямо передбачене серед навчальних питань з цієї тематики у використаному курсі лекцій.

Таким чином, правильно виконана самостійна робота повинна показати, що здобувач освіти вміє **знаходити похідну, записувати диференціал функції, обчислювати його числове значення, розрізняти приріст функції та диференціал і застосовувати диференціал для наближених обчислень**

План самостійного вивчення теми № 6 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 6. Первісна та невизначений інтеграл

Тема: Первісна та невизначений інтеграл.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 4, присвяченого інтегральному численню функції однієї змінної. Її опрацювання створює теоретичну основу для подальшого вивчення основних методів інтегрування, визначеного інтеграла та його застосувань. У навчальних матеріалах з вищої математики інтегральне числення розглядається як окремий розділ, що включає основні методи інтегрування, визначений інтеграл та його застосування.

Усі приклади та завдання цієї самостійної роботи мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття первісної функції;
- умову існування первісної;
- основну властивість первісної;
- поняття невизначеного інтеграла;
- позначення невизначеного інтеграла;
- зміст сталої інтегрування;
- зв'язок між диференціюванням та інтегруванням;
- основні властивості невизначеного інтеграла;
- таблицю основних невизначених інтегралів;
- правила безпосереднього інтегрування;
- способи перевірки правильності знаходження первісної.

Вміти:

- визначати, чи є задана функція первісною для іншої функції;

- знаходити найпростіші первісні;
- записувати загальний вигляд множини первісних;
- знаходити невизначені інтеграли за таблицею;
- застосовувати властивості невизначеного інтеграла;
- виносити сталий множник за знак інтеграла;
- подавати інтеграл від суми або різниці функцій як суму або різницю інтегралів;
- виконувати найпростіші тотожні перетворення підінтегрального виразу;
- знаходити невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування;
- перевіряти отриманий результат за допомогою диференціювання.

Навчальні питання

1. Поняття первісної функції.
2. Основна властивість первісної.
3. Поняття невизначеного інтеграла.
4. Зв'язок між первісною та невизначеним інтегралом.
5. Основні властивості невизначеного інтеграла.
6. Таблиця основних невизначених інтегралів.
7. Безпосереднє інтегрування найпростіших функцій.
8. Перевірка результату інтегрування.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: необхідно повторити поняття похідної функції та основні формули диференціювання. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання.

По-друге: необхідно чітко розрізняти поняття **первісної** та **невизначеного інтеграла**. Первісна — це окрема функція, похідна якої дорівнює заданій функції. Невизначений інтеграл — це множина всіх первісних заданої функції.

По-третє: потрібно пам'ятати, що первісні однієї функції відрізняються між собою на довільну сталу. Тому під час знаходження невизначеного інтеграла обов'язково записують **сталу інтегрування C** .

По-четверте: перед обчисленням інтеграла необхідно порівняти підінтегральну функцію з табличними формулами.

По-п'яте: якщо підінтегральний вираз є сумою або різницею функцій, його доцільно розділити на окремі інтеграли.

По-шосте: сталий множник можна винести за знак інтеграла.

По-сьоме: правильність знайденої первісної необхідно перевіряти диференціюванням. Якщо похідна отриманого результату дорівнює підінтегральній функції, інтеграл знайдено правильно.

Рекомендована література

1. Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В. *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В. *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В. *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
4. Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
5. Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В. *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. У цьому збірнику

окремо виділено теми інтегрального числення та основних методів інтегрування.

6. Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Поняття первісної

Нехай на деякому проміжку задана функція

$$f(x).$$

Первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює функції $f(x)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

Таким чином, для знаходження первісної необхідно виконати дію, обернену до диференціювання.

Наприклад, розглянемо функцію

$$f(x) = 2x.$$

Оскільки

$$(x^2)' = 2x,$$

то функція

$$F(x) = x^2$$

є первісною для функції

$$f(x) = 2x.$$

Але первісною буде також функція

$$F_1(x) = x^2 + 3,$$

оскільки

$$(x^2 + 3)' = 2x.$$

Аналогічно:

$$F_2(x) = x^2 - 5$$

також є первісною, оскільки

$$(x^2 - 5)' = 2x.$$

Отже, одна функція має не одну, а нескінченну множину первісних.

Приклад 1. Перевірка первісної

Перевірити, чи є функція

$$F(x) = x^3 + 4$$

первісною для функції

$$f(x) = 3x^2.$$

Розв'язання

Щоб перевірити, чи є $F(x)$ первісною для $f(x)$, необхідно знайти похідну функції $F(x)$.

$$F'(x) = (x^3 + 4)'.$$

Знаходимо похідну:

$$F'(x) = 3x^2.$$

За умовою:

$$f(x) = 3x^2.$$

Отже,

$$F'(x) = f(x).$$

Тому функція

$$F(x) = x^3 + 4$$

є первісною для функції

$$f(x) = 3x^2.$$

Відповідь: функція $F(x) = x^3 + 4$ є первісною для $f(x) = 3x^2$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Перевірити, чи є функція $F(x) = x^4 - 2$ первісною для функції $f(x) = 4x^3$.
2. Перевірити, чи є функція $F(x) = 2x^3 + 5x$ первісною для функції $f(x) = 6x^2 + 5$.

2. Основна властивість первісної

Якщо функція

$$F(x)$$

є однією з первісних для функції

$$f(x),$$

то будь-яка інша первісна має вигляд

$$\boxed{F(x) + C},$$

де C — довільна стала.

Дійсно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C'.$$

Оскільки

$$C' = 0,$$

отримуємо

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Тому всі первісні заданої функції відрізняються одна від одної тільки сталою величиною.

Наприклад, для функції

$$f(x) = 3x^2$$

однією з первісних є

$$F(x) = x^3.$$

Отже, загальний вигляд усіх первісних:

$$F(x) = x^3 + C.$$

Приклад 2. Знаходження загального вигляду первісної

Знайти всі первісні для функції

$$f(x) = 5x^4.$$

Розв'язання

Необхідно знайти функцію, похідна якої дорівнює

$$5x^4.$$

З таблиці похідних відомо:

$$(x^5)' = 5x^4.$$

Тому однією з первісних є

$$F(x) = x^5.$$

Усі первісні відрізняються на довільну сталу C .

Отже,

$$\boxed{F(x) = x^5 + C.}$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$(x^5 + C)' = 5x^4.$$

Отримали задану функцію.

Відповідь:

$$F(x) = x^5 + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Знайти всі первісні для функції $f(x) = 4x^3$.
2. Знайти всі первісні для функції $f(x) = 6x^5$.

3. Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C.}$$

Тут:

$$\int$$

— знак інтеграла;

$$f(x)$$

— підінтегральна функція;

$$f(x) dx$$

— підінтегральний вираз;

$$dx$$

— диференціал змінної інтегрування;

$$F(x)$$

— первісна;

$$C$$

— довільна стала, яка називається **сталою інтегрування**.

Процес знаходження невизначеного інтеграла називається **інтегруванням**.

4. Зв'язок між диференціюванням та інтегруванням

Диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими операціями.

Якщо

$$F'(x) = f(x),$$

то

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Наприклад:

$$(x^4)' = 4x^3,$$

тому

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C.$$

Правильність результату можна перевірити диференціюванням:

$$(x^4 + C)' = 4x^3.$$

Отже, під час самостійного виконання вправ бажано перевіряти отримані результати.

5. Основні властивості невизначеного інтеграла

Властивість 1

Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Властивість 2

Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

Властивість 3

Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx,$$

де k — стала.

Властивість 4

Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Властивість 5

Інтеграл від різниці функцій дорівнює різниці інтегралів:

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

6. Таблиця основних невизначених інтегралів

Таблицю основних інтегралів необхідно знати та вміти використовувати під час виконання практичних завдань.

1. Інтеграл від нуля

$$\int 0 dx = C.$$

2. Інтеграл від одиниці

$$\int 1 dx = x + C.$$

3. Інтеграл степеневі функції

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

4. Інтеграл функції $\frac{1}{x}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.}$$

5. Інтеграл показникової функції

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

6. Інтеграл функції a^x

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

7. Інтеграл синуса

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

8. Інтеграл косинуса

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

9. Інтеграл функції $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

10. Інтеграл функції $\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

11. Інтеграл функції $\frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

12. Інтеграл функції $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

7. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднім інтегруванням називається знаходження невизначеного інтеграла шляхом прямого застосування таблиці основних інтегралів та властивостей невизначеного інтеграла.

При цьому підінтегральну функцію за необхідності:

- спрощують;
- розкривають дужки;
- подають у вигляді суми або різниці;
- степені та корені записують у зручній степеневій формі;
- сталі множники виносять за знак інтеграла.

Приклад 3. Інтегрування степеневої функції

Обчислити:

$$\int x^5 dx.$$

Розв'язання

Використаємо формулу

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

У нашому випадку

$$n = 5.$$

Тому:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C.$$

Отже:

$$\boxed{\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.}$$

Перевірка

Знайдемо похідну отриманої первісної:

$$\left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = \frac{6x^5}{6} = x^5.$$

Отримали підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$\frac{x^6}{6} + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int x^4 dx$.
2. Обчислити $\int x^7 dx$.

Приклад 4. Інтегрування функції з числовим множником

Обчислити:

$$\int 6 x^4 dx.$$

Розв'язання

Винесемо сталий множник за знак інтеграла:

$$\int 6 x^4 dx = 6 \int x^4 dx.$$

Застосуємо табличну формулу:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

Отже:

$$6 \int x^4 dx = 6 \cdot \frac{x^5}{5} + C.$$

Тому:

$$\boxed{\int 6 x^4 dx = \frac{6}{5} x^5 + C.}$$

Перевірка

$$\left(\frac{6}{5} x^5 + C \right)' = \frac{6}{5} \cdot 5x^4 = 6x^4.$$

Відповідь:

$$\frac{6}{5} x^5 + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int 5 x^3 dx$.
2. Обчислити $\int 8 x^6 dx$.

Приклад 5. Інтегрування многочлена

Обчислити:

$$\int (3x^2 - 4x + 5) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивість лінійності невизначеного інтеграла:

$$\int (3x^2 - 4x + 5) dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int dx.$$

Обчислюємо кожний інтеграл окремо:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\int dx = x.$$

Підставляємо:

$$3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

Спростуємо:

$$x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

Отже:

$$\boxed{\int (3x^2 - 4x + 5) dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C.}$$

Перевірка

$$(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5.$$

Отримали початкову підінтегральну функцію.

Відповідь:

$$x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити

$$\int (4x^3 - 6x + 2) dx.$$

2. Обчислити

$$\int (5x^4 + 3x^2 - 7) dx.$$

Приклад 6. Інтегрування функції з від'ємним показником степеня

Обчислити:

$$\int \frac{1}{x^3} dx.$$

Розв'язання

Запишемо підінтегральну функцію у степеневій формі:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}.$$

Тоді:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx.$$

Застосуємо формулу:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

У нашому випадку:

$$n = -3.$$

Тому:

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C.$$

Отже:

$$-\frac{1}{2x^2} + C.$$

Відповідь:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int \frac{1}{x^2} dx$.

2. Обчислити $\int \frac{1}{x^4} dx$.

Приклад 7. Інтегрування кореневої функції

Обчислити:

$$\int \sqrt{x} dx.$$

Розв'язання

Запишемо корінь у степеневій формі:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Отже:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx.$$

Застосуємо формулу степеневого інтеграла:

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C.$$

Обчислюємо показник:

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Тому:

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C.$$

Ділення на $\frac{3}{2}$ замінюємо множенням на $\frac{2}{3}$:

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$$

Перевірка

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$$

Відповідь:

$$\frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int \sqrt[3]{x} \, dx$.

2. Обчислити $\int \sqrt[4]{x} \, dx$.

Приклад 8. Інтегрування функції $\frac{1}{x}$

Обчислити:

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання

Це табличний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Отже:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.}$$

Перевірка

$$(\ln |x| + C)' = \frac{1}{x}.$$

Відповідь:

$$\ln |x| + C.$$

Зверніть увагу

Для цього інтеграла **не можна** застосовувати формулу степеневого інтеграла при $n = -1$, оскільки у формулі

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

при $n = -1$ знаменник дорівнював би нулю.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int \frac{3}{x} dx$.

2. Обчислити $\int \frac{-5}{x} dx$.

Приклад 9. Інтегрування показникової функції

Обчислити:

$$\int (2e^x + 3) dx.$$

Розв'язання

Розділимо інтеграл:

$$\int (2e^x + 3) dx = 2 \int e^x dx + 3 \int dx.$$

За таблицею:

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x, \\ \int dx &= x. \end{aligned}$$

Отже:

$$\boxed{\int (2e^x + 3) dx = 2e^x + 3x + C.}$$

Перевірка

$$(2e^x + 3x + C)' = 2e^x + 3.$$

Відповідь:

$$2e^x + 3x + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int (4e^x - 2) dx$.

2. Обчислити $\int (3e^x + 5x) dx$.

Приклад 10. Інтегрування тригонометричних функцій

Обчислити:

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивості інтеграла:

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \int \cos x dx - 2 \int \sin x dx.$$

За таблицею:

$$\begin{aligned} \int \cos x dx &= \sin x, \\ \int \sin x dx &= -\cos x. \end{aligned}$$

Отже:

$$3 \sin x - 2(-\cos x) + C.$$

Розкриваємо дужки:

$$3 \sin x + 2 \cos x + C.$$

Таким чином,

$$\boxed{\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \sin x + 2 \cos x + C.}$$

Перевірка

$$(3 \sin x + 2 \cos x + C)' = 3 \cos x - 2 \sin x.$$

Відповідь:

$$3 \sin x + 2 \cos x + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити

$$\int (2 \cos x + 4 \sin x) dx.$$

2. Обчислити

$$\int (5 \sin x - 3 \cos x) dx.$$

Приклад 11. Інтегрування після попереднього перетворення

Обчислити:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx.$$

Розв'язання

Перед інтегруванням спростимо підінтегральний вираз:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} = x^2 + 2x - 3, x \neq 0.$$

Тому:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx = \int (x^2 + 2x - 3) dx.$$

Розділяємо:

$$\int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx.$$

Обчислюємо:

$$\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

Отже:

$$\boxed{\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C.}$$

Відповідь:

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити

$$\int \frac{x^4 + 3x^2}{x^2} dx.$$

2. Обчислити

$$\int \frac{2x^3 - 5x^2 + x}{x} dx.$$

Приклад 12. Знаходження первісної, яка проходить через задану точку

Для функції

$$f(x) = 2x + 3$$

знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку

$$A(1; 5).$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо загальний вигляд первісної.

$$F(x) = \int (2x + 3) dx.$$

Розділимо інтеграл:

$$F(x) = 2 \int x dx + 3 \int dx.$$

Отримуємо:

$$F(x) = x^2 + 3x + C.$$

Крок 2. Використаємо умову проходження графіка через точку $A(1; 5)$.

Це означає:

$$F(1) = 5.$$

Підставляємо:

$$1^2 + 3 \cdot 1 + C = 5.$$

$$1 + 3 + C = 5.$$

$$4 + C = 5.$$

Отже:

$$C = 1.$$

Крок 3. Запишемо шукану первісну.

$$F(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$F'(x) = 2x + 3.$$

Вона дорівнює заданій функції.

Перевіримо точку:

$$F(1) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Усі умови виконано.

Відповідь:

$$F(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Для функції $f(x) = 3x^2 + 2$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A(0; 4)$.
2. Для функції $f(x) = 4x - 1$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A(1; 3)$.

Питання для самоконтролю

1. Яка функція називається первісною для заданої функції?
2. Яка рівність виражає означення первісної?
3. Чи може одна функція мати декілька первісних?
4. Чим відрізняються дві первісні однієї функції?
5. У чому полягає основна властивість первісної?
6. Що називається невизначеним інтегралом?
7. Як позначається невизначений інтеграл?
8. Що називається підінтегральною функцією?
9. Що називається підінтегральним виразом?
10. Що означає символ dx у записі невизначеного інтеграла?
11. Що означає стала C у результаті інтегрування?

12. Чому під час знаходження невизначеного інтеграла необхідно записувати C ?
13. Який зв'язок існує між диференціюванням та інтегруванням?
14. Як перевірити правильність обчислення невизначеного інтеграла?
15. Чи можна сталий множник винести за знак інтеграла?
16. Як інтегрується сума функцій?
17. Як інтегрується різниця функцій?
18. Як обчислюється інтеграл степеневої функції?
19. Для якого значення показника не застосовується формула степеневого інтеграла?
20. Чому при $n = -1$ необхідно використовувати окрему формулу?
21. Чому дорівнює $\int \frac{dx}{x}$?
22. Чому дорівнює $\int e^x dx$?
23. Чому дорівнює $\int \sin x dx$?
24. Чому дорівнює $\int \cos x dx$?
25. Що називається безпосереднім інтегруванням?
26. Які перетворення підінтегрального виразу можна виконувати перед інтегруванням?
27. Як знайти первісну, яка задовольняє додаткову початкову умову?
28. Як визначити сталу інтегрування, якщо задана точка графіка первісної?
29. Чому після знаходження первісної доцільно виконувати перевірку?
30. Що повинна показати похідна знайденої первісної під час перевірки?

Завдання для виконання

Завдання 1

Перевірити, чи є функція

$$F(x) = 2x^3 - 4x + 7$$

первісною для функції

$$f(x) = 6x^2 - 4.$$

Завдання 2

Знайти всі первісні для функції

$$f(x) = 4x^3 + 2x.$$

Виконати перевірку диференціюванням.

Завдання 3

Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 4) dx.$$

Завдання 4

Обчислити невизначений інтеграл:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Перед інтегруванням записати корінь та дріб у вигляді степенів.

Завдання 5

Обчислити:

$$\int (3e^x + 2 \cos x - 4 \sin x) dx.$$

Завдання 6

Обчислити:

$$\int \left(4x^3 - \frac{3}{x} + 5 \right) dx.$$

Звернути увагу на те, що для інтеграла від $\frac{1}{x}$ використовується окрема таблична формула.

Завдання 7

Обчислити:

$$\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5x}{x} dx.$$

Перед інтегруванням спростити підінтегральний вираз.

Завдання 8

Для функції

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову

$$F(0) = 5.$$

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**.

Кожний варіант містить три завдання:

1. знайти невизначений інтеграл степеневої або алгебраїчної функції;
2. знайти невизначений інтеграл суми різних елементарних функцій;
3. знайти первісну, яка задовольняє задану початкову умову.

Умови всіх тридцяти варіантів записано повністю.

Варіант 1

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2e^x + 3 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x + 1$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 3$.

Варіант 2

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4x^3 + 2x - 6) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3e^x - 2 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^2 + 2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 4$.

Варіант 3

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5x^4 - 3x^2 + 1) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4 \cos x + 2 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x - 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 2$.

Варіант 4

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (6x^5 + 4x^2 - 3) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5e^x + \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x^2 + 4x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 5$.

Варіант 5

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2x^4 - 5x + 7) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 5x^4$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 3$.

Варіант 6

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (7x^3 - 2x^2 + 4) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2e^x + 4 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 6x^2 - 2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 1$.

Варіант 7

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(x^3 + \frac{2}{x}\right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (e^x + 5 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 2$.

Варіант 8

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(2x^4 - \frac{3}{x}\right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4e^x - 3 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x^3 - 2x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 4$.

Варіант 9

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (\sqrt{x} + 3x^2) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2 \cos x - 5 \sin x) dx$.

3. Для функції $f(x) = 2x^3 + 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = -1$.

Варіант 10

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (\sqrt[3]{x} + 4x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3e^x + 4 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 5x^2 - 2x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 6$.

Варіант 11

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (8x^3 - 5x^2 + 2x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2e^x + \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^2 - 4$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 2$.

Варіант 12

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3x^5 + 2x^3 - 7) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (e^x - 4 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x + 5$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 3$.

Варіант 13

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(5x^2 + \frac{4}{x} \right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5e^x + 2 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 6x^5 + 2x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 4$.

Варіант 14

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(4x^3 - \frac{5}{x} \right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3 \cos x + 4 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 5$.

Варіант 15

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2\sqrt{x} + 3x^2) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (6e^x - \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = x^2 + 2x + 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 1$.

Варіант 16

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3\sqrt[3]{x} + 2x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2e^x - 3 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x^3 + x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 2$.

Варіант 17

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (9x^4 - 6x^2 + 3) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4 \sin x + 5 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 5x^4 - 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 4$.

Варіант 18

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5x^5 - 4x^3 + 2x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3e^x + 2 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^2 + 6x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = -2$.

Варіант 19

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(6x^3 + \frac{2}{x}\right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (7e^x - 2 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x^3 - 4x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 5$.

Варіант 20

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(7x^2 - \frac{3}{x}\right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5 \cos x - 3 \sin x) dx$.

3. Для функції $f(x) = 4x^3 + 2x^2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 3$.

Варіант 21

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4\sqrt{x} - 2x^2) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2e^x + 6 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^2 - x + 2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 4$.

Варіант 22

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (2\sqrt[3]{x} + 5x^3) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4e^x + 3 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 6x^2 + 4x - 1$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 2$.

Варіант 23

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (10x^4 - 3x^3 + 2) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3 \cos x - 6 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 5x^4 + 2x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 5$.

Варіант 24

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (6x^5 + 5x^2 - 4x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (8e^x + \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = -1$.

Варіант 25

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(8x^3 + \frac{5}{x}\right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4 \sin x - 2 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 7x^2 - 4x$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 6$.

Варіант 26

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \left(3x^4 - \frac{4}{x} \right) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5e^x - 4 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 3$.

Варіант 27

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5\sqrt{x} + 2x^3) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (6e^x + 2 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 5$.

Варіант 28

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (4\sqrt[3]{x} - 3x^2) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (7 \cos x + 3 \sin x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 2x^3 + 4x - 5$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 4$.

Варіант 29

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (7x^5 - 5x^3 + 3x) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (3e^x + 5 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(0) = 2$.

Варіант 30

1. Обчислити невизначений інтеграл $\int (8x^4 + 4x^2 - 6) dx$.
2. Обчислити невизначений інтеграл $\int (5e^x - 2 \sin x + 3 \cos x) dx$.
3. Для функції $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$ знайти первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F(1) = 7$.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

У першому та другому завданнях необхідно:

1. записати заданий невизначений інтеграл;

2. за необхідності перетворити підінтегральну функцію;
3. застосувати властивості невизначеного інтеграла;
4. використати відповідні табличні формули;
5. виконати необхідні обчислення;
6. обов'язково записати сталу інтегрування C ;
7. виконати перевірку диференціюванням.

У **третьому завданні** необхідно:

1. знайти загальний вигляд первісної;
2. записати її у вигляді $F(x) + C$;
3. використати задану початкову умову;
4. знайти значення сталої C ;
5. записати конкретну первісну;
6. перевірити отриманий результат диференціюванням та підстановкою початкової умови.

Підсумок самостійної роботи

Після опрацювання теми здобувач освіти повинен чітко розрізняти поняття **первісної** та **невизначеного інтеграла**.

Якщо

$$F'(x) = f(x),$$

то функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а сукупність усіх первісних записується у вигляді

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C.}$$

Особливу увагу необхідно звернути на сталу інтегрування C . Її не можна пропускати у відповіді, оскільки невизначений інтеграл являє собою не одну функцію, а **множину всіх первісних**.

Під час безпосереднього інтегрування необхідно правильно використовувати таблицю основних інтегралів, властивості лінійності та, за необхідності, попередньо перетворювати підінтегральний вираз.

Найпростішим способом перевірки результату є диференціювання знайденої первісної. Якщо

$$(F(x) + C)' = f(x),$$

то інтегрування виконано правильно.

Опанування цієї теми є необхідною основою для наступної теми робочої програми — «**Основні методи інтегрування**», а надалі — для вивчення визначеного інтеграла та його застосувань.

План самостійного вивчення теми № 7 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 7. Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца

Тема: Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца.

Час — 2 години.

Тема є продовженням вивчення інтегрального числення функції однієї змінної. Під час її опрацювання необхідно спиратися на знання про первісну, невизначений інтеграл, таблицю основних інтегралів та основні методи інтегрування. У рекомендованому збірнику задач розділ інтегрального числення послідовно охоплює основні методи інтегрування, визначений інтеграл, формулу Ньютона–Лейбніца та подальші застосування визначеного інтеграла.

Усі приклади та завдання цієї самостійної роботи мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття визначеного інтеграла;
- геометричний зміст визначеного інтеграла;
- позначення визначеного інтеграла;
- поняття нижньої та верхньої меж інтегрування;
- основні властивості визначеного інтеграла;
- формулу Ньютона–Лейбніца;
- послідовність обчислення визначеного інтеграла;
- зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами;
- правила обчислення визначених інтегралів;
- особливості зміни знака визначеного інтеграла при переставленні меж інтегрування.

Вміти:

- правильно записувати визначений інтеграл;

- визначати підінтегральну функцію, змінну інтегрування, нижню та верхню межі інтегрування;
- застосовувати властивості визначеного інтеграла;
- знаходити первісну підінтегральної функції;
- застосовувати формулу Ньютона–Лейбніца;
- обчислювати визначені інтеграли від степеневих, показникових і тригонометричних функцій;
- обчислювати визначені інтеграли від суми та різниці функцій;
- виконувати необхідні тотожні перетворення підінтегрального виразу;
- перевіряти правильність отриманого результату.

Навчальні питання

1. Поняття визначеного інтеграла.
2. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
3. Основні властивості визначеного інтеграла.
4. Формула Ньютона–Лейбніца.
5. Алгоритм обчислення визначеного інтеграла.
6. Обчислення найпростіших визначених інтегралів.
7. Застосування властивостей визначеного інтеграла під час обчислень.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: повторити поняття первісної та невизначеного інтеграла, оскільки обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона–Лейбніца передбачає знаходження первісної підінтегральної функції.

По-друге: необхідно навчитися правильно читати запис визначеного інтеграла та розрізняти нижню і верхню межі інтегрування.

По-третє: потрібно вивчити основні властивості визначеного інтеграла та розуміти, у яких випадках їх доцільно застосовувати.

По-четверте: особливу увагу необхідно приділити формулі Ньютона–Лейбніца. Після знаходження первісної потрібно спочатку підставити верхню межу інтегрування, потім нижню та від першого отриманого значення відняти друге.

По-п’яте: на відміну від невизначеного інтеграла, під час обчислення визначеного інтеграла у кінцевій відповіді **сталу інтегрування S не записують.**

По-шосте: перед обчисленням складнішого визначеного інтеграла доцільно спростити підінтегральний вираз і лише після цього застосовувати формулу Ньютона–Лейбніца.

Рекомендована література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Дюженкова О. Ю., Дудкін М. Є., Степахно І. В.** *Вища математика. Практикум* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2021. 409 сторінок.
4. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
5. **Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Рева Н. В., Самойленко Т. А., Степаненко Н. В.** *Вища математика. Частина 2. Збірник задач* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2025. 171 сторінка. У структурі збірника окремо представлено тему «Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца».

6. Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт». Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Поняття визначеного інтеграла

Нехай функція

$$y = f(x)$$

задана та неперервна на відрізку

$$[a; b].$$

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ позначається:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx.}$$

У цьому записі:

- $f(x)$ — підінтегральна функція;
- $f(x) dx$ — підінтегральний вираз;
- x — змінна інтегрування;
- a — нижня межа інтегрування;
- b — верхня межа інтегрування.

На відміну від невизначеного інтеграла, результатом обчислення визначеного інтеграла є **число**.

Наприклад:

$$\int_0^2 x dx$$

є визначеним інтегралом функції $f(x) = x$ на відрізку $[0; 2]$.

2. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо функція

$$f(x) \geq 0$$

на відрізок $[a; b]$, то визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої:

- графіком функції $y = f(x)$;
- віссю абсцис;
- прямою $x = a$;
- прямою $x = b$.

Тобто, якщо функція невід'ємна,

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Водночас необхідно пам'ятати, що загалом визначений інтеграл є **алгебраїчною величиною**. Якщо графік функції розташований нижче осі абсцис, відповідна частина інтеграла має від'ємний знак.

3. Основні властивості визначеного інтеграла

Властивість 1. Інтеграл з однаковими межами

Якщо нижня та верхня межі інтегрування однакові, то

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Властивість 2. Переставлення меж інтегрування

Якщо поміняти місцями верхню та нижню межі інтегрування, визначений інтеграл змінить знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Властивість 3. Сталий множник

Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Властивість 4. Інтеграл від суми функцій

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Властивість 5. Інтеграл від різниці функцій

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Властивість 6. Адитивність за проміжком інтегрування

Якщо точка c належить відрізку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ця властивість дозволяє розбивати проміжок інтегрування на декілька частин.

4. Формула Ньютона–Лейбніца

Основною формулою для обчислення визначеного інтеграла є **формула Ньютона–Лейбніца**.

Нехай функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, тобто

$$F'(x) = f(x).$$

Тоді:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Для скороченого запису використовують позначення:

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тому формулу Ньютона–Лейбніца можна записати:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

5. Алгоритм обчислення визначеного інтеграла

Для обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона–Лейбніца необхідно виконати такі дії:

1. Проаналізувати підінтегральну функцію.
2. За необхідності спростити підінтегральний вираз.

3. Знайти первісну $F(x)$ для функції $f(x)$.
4. Підставити у первісну верхню межу інтегрування b .
5. Підставити у первісну нижню межу інтегрування a .
6. Від значення $F(b)$ відняти значення $F(a)$.
7. Виконати арифметичні обчислення.
8. Записати відповідь.

Схематично:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 1. Обчислення найпростішого визначеного інтеграла

Обчислити:

$$\int_0^2 x dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо первісну.

Для функції

$$f(x) = x$$

первісною є

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Крок 2. Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца.

$$\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2.$$

Крок 3. Підставимо верхню та нижню межі.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x dx &= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \\ &= \frac{4}{2} - 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Відповідь:

2.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^3 x \, dx$.

2. Обчислити $\int_1^4 x \, dx$.

Приклад 2. Інтеграл степеневі функції

Обчислити:

$$\int_0^2 x^2 \, dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо первісну.

Використаємо формулу:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Для x^2 :

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Крок 2. Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца.

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2.$$

Крок 3. Підставимо межі інтегрування.

$$\begin{aligned} &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь:

$\frac{8}{3}$.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^3 x^2 dx$.
2. Обчислити $\int_1^2 x^3 dx$.

Приклад 3. Визначений інтеграл від многочлена

Обчислити:

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо первісну.

$$\int (3x^2 - 2x + 1) dx = x^3 - x^2 + x.$$

Отже,

$$F(x) = x^3 - x^2 + x.$$

Крок 2. Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца.

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = (x^3 - x^2 + x)|_0^2.$$

Крок 3. Обчислимо значення первісної на верхній межі.

$$F(2) = 2^3 - 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6.$$

Крок 4. Обчислимо значення первісної на нижній межі.

$$F(0) = 0.$$

Крок 5. Знайдемо різницю.

$$F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6.$$

Відповідь:

6.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити

$$\int_0^2 (2x^2 + 3x - 1) dx.$$

2. Обчислити

$$\int_1^3 (x^2 - 2x + 4) dx.$$

Приклад 4. Винесення сталого множника

Обчислити:

$$\int_0^2 4x^3 dx.$$

Розв'язання

Винесемо сталий множник за знак інтеграла:

$$\int_0^2 4x^3 dx = 4 \int_0^2 x^3 dx.$$

Знайдемо первісну:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}.$$

Тоді:

$$4 \frac{x^4}{4} \Big|_0^2.$$

Скорочуємо:

$$= x^4 \Big|_0^2.$$

Підставляємо межі:

$$2^4 - 0^4 = 16.$$

Відповідь:

$$\boxed{16.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^2 3x^2 dx$.

2. Обчислити $\int_1^3 2x dx$.

Приклад 5. Визначений інтеграл з від'ємною нижньою межею

Обчислити:

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо первісну.

$$F(x) = x^2 + 3x.$$

Крок 2. Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца.

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx = (x^2 + 3x)|_{-1}^2.$$

Обчислюємо:

$$F(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10.$$

Далі:

$$F(-1) = (-1)^2 + 3(-1) = 1 - 3 = -2.$$

Отже:

$$F(2) - F(-1) = 10 - (-2) = 12.$$

Відповідь:

$$\boxed{12.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_{-1}^1 (3x + 2) dx$.

2. Обчислити $\int_{-2}^1 (2x + 4) dx$.

Приклад 6. Зміна меж інтегрування

Відомо, що

$$\int_1^4 f(x) dx = 7.$$

Знайти:

$$\int_4^1 f(x) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивість визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Отже:

$$\int_4^1 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx.$$

За умовою:

$$\int_1^4 f(x) dx = 7.$$

Тому:

$$\int_4^1 f(x) dx = -7.$$

Відповідь:

$$\boxed{-7.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Відомо, що $\int_2^5 f(x) dx = 9$. Знайти $\int_5^2 f(x) dx$.
2. Відомо, що $\int_{-1}^3 g(x) dx = -4$. Знайти $\int_3^{-1} g(x) dx$.

Приклад 7. Використання властивості адитивності

Відомо:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= 5, \\ \int_2^5 f(x) dx &= 8. \end{aligned}$$

Знайти:

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

Розв'язання

Використаємо властивість:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Тому:

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx.$$

Підставляємо відомі значення:

$$\int_0^5 f(x) dx = 5 + 8 = 13.$$

Відповідь:

$$\boxed{13.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

- Відомо, що $\int_1^3 f(x) dx = 4$, а $\int_3^6 f(x) dx = 7$. Знайти $\int_1^6 f(x) dx$.
- Відомо, що $\int_{-2}^0 g(x) dx = 3$, а $\int_0^4 g(x) dx = 10$. Знайти $\int_{-2}^4 g(x) dx$.

Приклад 8. Визначений інтеграл показникової функції

Обчислити:

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Розв'язання

Первісною для функції e^x є:

$$F(x) = e^x.$$

Застосовуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1.$$

Підставляємо межі:

$$= e^1 - e^0.$$

Оскільки

$$e^1 = e, e^0 = 1,$$

отримуємо:

$$e - 1.$$

Відповідь:

$$\boxed{e - 1.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^2 e^x dx$.

2. Обчислити $\int_0^1 3 e^x dx$.

Приклад 9. Визначений інтеграл тригонометричної функції

Обчислити:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Розв'язання

Первісною для функції $\cos x$ є:

$$F(x) = \sin x.$$

За формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Підставляємо межі:

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0.$$

Відомо:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= 1, \\ \sin 0 &= 0. \end{aligned}$$

Тому:

$$1 - 0 = 1.$$

Відповідь:

$$\boxed{1.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

2. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \, dx$.

Приклад 10. Визначений інтеграл суми різних функцій

Обчислити:

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) \, dx.$$

Розв'язання

Розділимо інтеграл:

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) \, dx = 3 \int_0^1 x^2 \, dx + 2 \int_0^1 e^x \, dx.$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = x^3 + 2e^x.$$

Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) \, dx = (x^3 + 2e^x)|_0^1.$$

Обчислюємо значення на верхній межі:

$$F(1) = 1 + 2e.$$

На нижній межі:

$$F(0) = 0 + 2 = 2.$$

Отже:

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= 1 + 2e - 2. \\ &= 2e - 1. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\boxed{2e - 1.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_0^1 (2x + e^x) dx$.
2. Обчислити $\int_0^2 (3x^2 + 2) dx$.

Приклад 11. Попереднє спрощення підінтегрального виразу

Обчислити:

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2}{x} dx.$$

Розв'язання

Спочатку спростимо підінтегральний вираз:

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x} = x^2 + 2x.$$

Отже:

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2}{x} dx = \int_1^2 (x^2 + 2x) dx.$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^2.$$

Для верхньої межі:

$$F(2) = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}.$$

Для нижньої межі:

$$F(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Тому:

$$\frac{20}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Відповідь:

$$\boxed{\frac{16}{3}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити

$$\int_1^3 \frac{x^2 + 2x}{x} dx.$$

2. Обчислити

$$\int_1^2 \frac{2x^3 + x^2}{x} dx.$$

Приклад 12. Визначений інтеграл від функції $\frac{1}{x}$

Обчислити:

$$\int_1^e \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання

Використаємо табличну формулу:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Для визначеного інтеграла маємо:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_1^e.$$

На заданому проміжку $x > 0$, тому:

$$= \ln e - \ln 1.$$

Відомо:

$$\begin{aligned} \ln e &= 1, \\ \ln 1 &= 0. \end{aligned}$$

Отже:

$$1 - 0 = 1.$$

Відповідь:

1.

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Обчислити $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$.
2. Обчислити $\int_1^e \frac{2}{x} dx$.

Зверніть увагу

Під час обчислення визначених інтегралів часто допускають такі помилки:

1. Плутають верхню і нижню межі інтегрування.
2. Обчислюють $F(a) - F(b)$ замість $F(b) - F(a)$.
3. Забувають знайти первісну перед підстановкою меж.
4. Після обчислення визначеного інтеграла помилково записують $+C$.
5. Неправильно підставляють від'ємну нижню межу.
6. Не беруть вираз $F(a)$ у дужки перед відніманням.
7. Не спрощують підінтегральний вираз перед інтегруванням.
8. Неправильно застосовують табличні формули інтегрування.

Особливо важливо пам'ятати:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

а не $F(a) - F(b)$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Як записується визначений інтеграл?

3. Що називається підінтегральною функцією?
4. Що називається підінтегральним виразом?
5. Що називається нижньою межею інтегрування?
6. Що називається верхньою межею інтегрування?
7. Який геометричний зміст має визначений інтеграл для невід'ємної функції?
8. Чим визначений інтеграл відрізняється від невизначеного?
9. Чому дорівнює визначений інтеграл, якщо його межі однакові?
10. Що відбувається з визначеним інтегралом при переставленні меж інтегрування?
11. Чи можна сталий множник винести за знак визначеного інтеграла?
12. Як обчислюється інтеграл від суми функцій?
13. Як обчислюється інтеграл від різниці функцій?
14. У чому полягає властивість адитивності визначеного інтеграла?
15. Сформулюйте формулу Ньютона–Лейбніца.
16. Яка функція використовується у формулі Ньютона–Лейбніца?
17. Що необхідно знайти перед застосуванням формули Ньютона–Лейбніца?
18. У якій послідовності підставляють межі інтегрування?
19. Яке значення від якого необхідно відняти?
20. Чи записують сталу інтегрування С після обчислення визначеного інтеграла?
21. Чому стала С не впливає на значення визначеного інтеграла?
22. Як обчислити визначений інтеграл від степеневі функції?
23. Як обчислити визначений інтеграл від многочлена?
24. Як обчислити визначений інтеграл від показникової функції?
25. Як обчислити визначений інтеграл від тригонометричної функції?
26. Що потрібно зробити, якщо підінтегральний вираз можна спростити?
27. Яке значення має $\int_a^a f(x) dx$?

28. Як зміниться інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, якщо поміняти межі місцями?
29. Як розбити визначений інтеграл на два інтеграли за проміжком?
30. Які основні помилки можуть виникати під час застосування формули Ньютона–Лейбніца?

Завдання для виконання

Завдання 1

Обчислити:

$$\int_0^3 x^2 dx.$$

Завдання 2

Обчислити:

$$\int_1^2 (4x^3 - 2x) dx.$$

Завдання 3

Обчислити:

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x - 1) dx.$$

Завдання 4

Обчислити:

$$\int_{-1}^2 (2x + 5) dx.$$

Завдання 5

Обчислити:

$$\int_0^1 (2e^x + 3x^2) dx.$$

Завдання 6

Обчислити:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) dx.$$

Завдання 7

Відомо, що

$$\int_1^3 f(x) dx = 5,$$

а

$$\int_3^6 f(x) dx = 8.$$

Знайти:

$$\int_1^6 f(x) dx.$$

Завдання 8

Відомо, що

$$\int_2^5 f(x) dx = 7.$$

Знайти:

$$\int_5^2 f(x) dx.$$

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**.

Кожний варіант містить три завдання:

1. обчислити визначений інтеграл від алгебраїчної функції за формулою Ньютона–Лейбніца;
2. обчислити визначений інтеграл від суми елементарних функцій;
3. застосувати одну з основних властивостей визначеного інтеграла.

Варіант 1

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (3x^2 + 2x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (2e^x + 3) dx$.
3. Відомо, що $\int_1^4 f(x) dx = 6$. Знайти $\int_4^1 f(x) dx$.

Варіант 2

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (2x^2 + x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + \sin x) dx$.
3. Відомо, що $\int_0^2 f(x) dx = 4$, а $\int_2^5 f(x) dx = 7$. Знайти $\int_0^5 f(x) dx$.

Варіант 3

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (4x^3 - 2x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (3e^x + 2x) dx$.
3. Відомо, що $\int_2^6 f(x) dx = 9$. Знайти $\int_6^2 f(x) dx$.

Варіант 4

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (x^3 + 3x^2) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} 2 \sin x dx$.
3. Відомо, що $\int_1^3 f(x) dx = 5$, а $\int_3^7 f(x) dx = 8$. Знайти $\int_1^7 f(x) dx$.

Варіант 5

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (e^x + 4) dx$.
3. Відомо, що $\int_{-1}^3 f(x) dx = -5$. Знайти $\int_3^{-1} f(x) dx$.

Варіант 6

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (5x^2 - 2x + 3) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx$.
3. Відомо, що $\int_0^4 f(x) dx = 10$, а $\int_4^6 f(x) dx = 3$. Знайти $\int_0^6 f(x) dx$.

Варіант 7

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (3x^3 + 2x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (4e^x - x) dx$.

3. Відомо, що $\int_2^7 f(x) dx = 12$. Знайти $\int_7^2 f(x) dx$.

Варіант 8

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (x^2 + 4x - 2) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^\pi 3 \sin x dx$.

3. Відомо, що $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$, а $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Знайти $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

Варіант 9

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (4x^2 - x) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (2e^x + 3x^2) dx$.

3. Відомо, що $\int_1^5 f(x) dx = 8$. Знайти $\int_5^1 f(x) dx$.

Варіант 10

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (2x^3 + 5x) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos x + 2 \sin x) dx$.

3. Відомо, що $\int_0^2 f(x) dx = 3$, а $\int_2^4 f(x) dx = 9$. Знайти $\int_0^4 f(x) dx$.

Варіант 11

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (5x^3 - 3x^2 + 2) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (5e^x + 2x) dx$.

3. Відомо, що $\int_3^8 f(x) dx = 11$. Знайти $\int_8^3 f(x) dx$.

Варіант 12

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^\pi 4 \sin x dx$.

3. Відомо, що $\int_1^4 f(x) dx = 7$, а $\int_4^6 f(x) dx = 5$. Знайти $\int_1^6 f(x) dx$.

Варіант 13

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (2x^3 + x^2 - 4) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (3e^x + 4x) dx$.

3. Відомо, що $\int_{-2}^2 f(x) dx = -6$. Знайти $\int_2^{-2} f(x) dx$.

Варіант 14

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (6x^2 - 3x + 1) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos x - \sin x) dx$.

3. Відомо, що $\int_0^3 f(x) dx = 8$, а $\int_3^5 f(x) dx = 4$. Знайти $\int_0^5 f(x) dx$.

Варіант 15

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 2x) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (6e^x - 2) dx$.

3. Відомо, що $\int_2^9 f(x) dx = 15$. Знайти $\int_9^2 f(x) dx$.

Варіант 16

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (2x^2 + 5x + 1) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} 5 \sin x dx$.

3. Відомо, що $\int_{-1}^1 f(x) dx = 3$, а $\int_1^4 f(x) dx = 7$. Знайти $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

Варіант 17

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (5x^2 - 2x + 4) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (2e^x + 5x^2) dx$.

3. Відомо, що $\int_4^7 f(x) dx = -8$. Знайти $\int_7^4 f(x) dx$.

Варіант 18

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (3x^3 - x^2 + 2) dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x + 3 \sin x) dx$.

3. Відомо, що $\int_0^2 f(x) dx = 6$, а $\int_2^6 f(x) dx = 9$. Знайти $\int_0^6 f(x) dx$.

Варіант 19

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (6x^3 - 4x + 3) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (7e^x + x) dx$.
3. Відомо, що $\int_{-3}^2 f(x) dx = 10$. Знайти $\int_2^{-3} f(x) dx$.

Варіант 20

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^\pi 2 \sin x dx$.
3. Відомо, що $\int_1^5 f(x) dx = 9$, а $\int_5^8 f(x) dx = 4$. Знайти $\int_1^8 f(x) dx$.

Варіант 21

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (3x^3 + 2x^2 - x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (4e^x + 3x) dx$.
3. Відомо, що $\int_2^6 f(x) dx = -7$. Знайти $\int_6^2 f(x) dx$.

Варіант 22

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (7x^2 - 3x + 4) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x + 4 \sin x) dx$.
3. Відомо, що $\int_{-2}^1 f(x) dx = 5$, а $\int_1^3 f(x) dx = 6$. Знайти $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

Варіант 23

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (5x^3 + 4x^2 - 3) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (3e^x + 6x^2) dx$.
3. Відомо, що $\int_0^7 f(x) dx = 14$. Знайти $\int_7^0 f(x) dx$.

Варіант 24

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (5x^2 - x + 2) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^\pi 3 \sin x dx$.
3. Відомо, що $\int_0^4 f(x) dx = 7$, а $\int_4^9 f(x) dx = 10$. Знайти $\int_0^9 f(x) dx$.

Варіант 25

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (2x^3 + 5x^2 - 4x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (8e^x - 3x) dx$.
3. Відомо, що $\int_{-1}^5 f(x) dx = -9$. Знайти $\int_5^{-1} f(x) dx$.

Варіант 26

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (8x^2 + 2x - 3) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos x - \sin x) dx$.
3. Відомо, що $\int_1^3 f(x) dx = 6$, а $\int_3^8 f(x) dx = 12$. Знайти $\int_1^8 f(x) dx$.

Варіант 27

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 (7x^3 - 2x^2 + x) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (5e^x + 4x^2) dx$.
3. Відомо, що $\int_3^9 f(x) dx = 13$. Знайти $\int_9^3 f(x) dx$.

Варіант 28

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 (6x^2 + 3x - 4) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} 4 \sin x dx$.
3. Відомо, що $\int_{-3}^0 f(x) dx = 5$, а $\int_0^4 f(x) dx = 11$. Знайти $\int_{-3}^4 f(x) dx$.

Варіант 29

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^3 (4x^3 + 2x^2 - 5) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 (6e^x + 5x) dx$.
3. Відомо, що $\int_2^8 f(x) dx = -12$. Знайти $\int_8^2 f(x) dx$.

Варіант 30

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 (9x^2 - 4x + 5) dx$.
2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos x + 2 \sin x) dx$.

3. Відомо, що $\int_0^3 f(x) dx = 8$, а $\int_3^7 f(x) dx = 14$. Знайти $\int_0^7 f(x) dx$.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

Під час виконання **першого та другого завдань** необхідно:

1. Записати заданий визначений інтеграл.
2. За необхідності спростити підінтегральний вираз.
3. Застосувати властивості визначеного інтеграла.
4. Знайти первісну підінтегральної функції.
5. Записати формулу Ньютона–Лейбніца.
6. Підставити верхню межу інтегрування.
7. Підставити нижню межу інтегрування.
8. Обчислити різницю $F(b) - F(a)$.
9. Записати остаточну відповідь.

Під час виконання **третього завдання** необхідно:

1. Визначити, яку властивість визначеного інтеграла потрібно застосувати.
2. Записати відповідну властивість у загальному вигляді.
3. Підставити числові дані умови.
4. Виконати обчислення.
5. Записати відповідь.

Підсумок самостійної роботи

Після опрацювання теми здобувач освіти повинен розуміти принципову відмінність між невизначеним та визначеним інтегралами.

Невизначений інтеграл являє собою множину первісних:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Визначений інтеграл має задані межі інтегрування і за відповідних умов обчислюється за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

При цьому $F(x)$ повинна бути первісною для $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Необхідно пам'ятати, що у відповіді для визначеного інтеграла **сталу інтегрування** **не записують**, оскільки при відніманні значень первісної однакова стала взаємно знищується.

Важливе значення мають також властивості визначеного інтеграла: зміна знака при переставленні меж, винесення сталого множника, лінійність та адитивність за проміжком інтегрування.

Опанування цієї теми створює необхідну математичну основу для наступного практичного заняття робочої програми — **«Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ, об'ємів, шляху та роботи»**. У рекомендованому збірнику задач після теми визначеного інтеграла також передбачено його застосування до задач геометрії та механіки.

План самостійного вивчення теми № 8 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 8. Диференціальні лінійні рівняння першого порядку

Тема: Диференціальні лінійні рівняння першого порядку.

Час — 2 години.

Тема належить до змістового модуля 5 «Диференціальні рівняння» та продовжує вивчення диференціальних рівнянь першого порядку. Під час самостійної роботи необхідно спиратися на знання про похідну, первісну, невизначений інтеграл, диференціальні рівняння першого порядку та рівняння з відокремлюваними змінними.

Усі приклади та завдання цієї самостійної роботи мають загальноматематичний характер і можуть використовуватися для здобувачів освіти всіх спеціальностей.

Мета

Знати:

- поняття диференціального рівняння;
- поняття диференціального рівняння першого порядку;
- поняття лінійного диференціального рівняння першого порядку;
- стандартний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку;
- поняття однорідного та неоднорідного лінійного диференціального рівняння;
- поняття загального розв'язку диференціального рівняння;
- поняття частинного розв'язку;
- поняття початкової умови;
- метод знаходження інтегруючого множника;
- алгоритм розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку;
- порядок розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку.

Вміти:

- розпізнавати лінійне диференціальне рівняння першого порядку;
- приводити рівняння до стандартного вигляду;
- визначати функції $P(x)$ і $Q(x)$;
- знаходити інтегруючий множник;
- перетворювати ліву частину рівняння у похідну добутку;
- інтегрувати отриману рівність;
- знаходити загальний розв'язок диференціального рівняння;
- знаходити частинний розв'язок за початковою умовою;
- виконувати перевірку знайденого розв'язку підстановкою у початкове диференціальне рівняння.

Навчальні питання

1. Поняття лінійного диференціального рівняння першого порядку.
2. Стандартний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку.
3. Однорідне та неоднорідне лінійне диференціальне рівняння.
4. Інтегруючий множник.
5. Розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку.
6. Загальний і частинний розв'язки.
7. Розв'язування задачі Коші.
8. Перевірка отриманого розв'язку.

Методичні рекомендації

Самостійно вивчаючи запропоновану тему, здобувач освіти повинен засвоїти такі основні положення.

По-перше: необхідно повторити поняття похідної, первісної та невизначеного інтеграла, оскільки розв'язування лінійних диференціальних рівнянь безпосередньо пов'язане з диференціюванням та інтегруванням.

По-друге: потрібно навчитися розпізнавати лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Після необхідних перетворень воно повинно бути подане у стандартному вигляді

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

По-третє: після приведення рівняння до стандартного вигляду необхідно правильно визначити функції $P(x)$ та $Q(x)$.

По-четверте: особливу увагу потрібно приділити знаходженню інтегруючого множника, оскільки саме він дозволяє перетворити ліву частину рівняння на похідну добутку двох функцій.

По-п'яте: після знаходження загального розв'язку необхідно виконати перевірку. Для цього знаходять похідну отриманої функції та підставляють уї y' у початкове рівняння.

По-шосте: якщо задана початкова умова $y(x_0) = y_0$, після знаходження загального розв'язку потрібно визначити сталу інтегрування C .

Рекомендована література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння : практикум : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння : навчальний посібник.* Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної.*

Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.

6. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
7. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Поняття диференціального рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні.

Якщо найвища похідна, яка входить до рівняння, є похідною першого порядку, таке рівняння називається **диференціальним рівнянням першого порядку**.

У загальному вигляді його можна записати:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Наприклад:

$$\begin{aligned}y' + 2y &= x, \\xy' + y &= x^2, \\y' - 3y &= 5.\end{aligned}$$

2. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке після відповідних перетворень можна записати у вигляді

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)},$$

де:

- $y = y(x)$ — невідома функція;
- y' — її похідна;

- $P(x)$ — задана функція;
- $Q(x)$ — задана функція.

Рівняння називається **лінійним**, тому що невідома функція у та її похідна у' входять до нього тільки в першому степені та не перемножуються між собою.

Наприклад,

$$y' + 2y = x$$

є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Тут:

$$P(x) = 2,$$

$$Q(x) = x.$$

3. Однорідне та неоднорідне лінійне рівняння

Якщо

$$Q(x) = 0,$$

отримуємо рівняння

$$y' + P(x)y = 0.$$

Таке рівняння називається **однорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

Якщо

$$Q(x) \neq 0,$$

рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

називається **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

Наприклад:

$$y' + 3y = 0$$

— однорідне рівняння;

$$y' + 3y = 2x$$

— неоднорідне рівняння.

4. Інтегруючий множник

Для розв'язування рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

використовують **інтегруючий множник**.

Він знаходиться за формулою

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}.$$

Після знаходження інтегруючого множника все рівняння множать на $\mu(x)$:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$

Ліва частина отриманого рівняння є похідною добутку:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)Q(x).$$

Після цього обидві частини інтегрують:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x) dx + C.$$

Отже, загальний розв'язок:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x) dx + C \right].$$

Ця формула є основою методу інтегруючого множника.

5. Алгоритм розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку

Для розв'язування рівняння необхідно:

1. Привести рівняння до стандартного вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

2. Визначити $P(x)$ та $Q(x)$.

3. Знайти інтегруючий множник:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}.$$

4. Помножити всі члени рівняння на $\mu(x)$.

5. Подати ліву частину у вигляді похідної добутку:

$$(\mu y)'.$$

6. Проінтегрувати обидві частини.
7. Виразити невідому функцію y .
8. Записати загальний розв'язок.
9. Якщо задана початкова умова, визначити сталу C .
10. Виконати перевірку.

Приклад 1. Розв'язування найпростішого лінійного рівняння

Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + y = 1.$$

Розв'язання

Крок 1. Порівняємо рівняння зі стандартним виглядом.

Стандартний вигляд:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Для заданого рівняння:

$$P(x) = 1,$$

$$Q(x) = 1.$$

Крок 2. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx}.$$

$$\mu(x) = e^x.$$

Крок 3. Помножимо рівняння на e^x .

$$e^x y' + e^x y = e^x.$$

Ліва частина є похідною добутку:

$$(e^x y)' = e^x.$$

Крок 4. Проінтегруємо обидві частини.

$$e^x y = \int e^x dx.$$

$$e^x y = e^x + C.$$

Крок 5. Виразимо y .

$$y = \frac{e^x + C}{e^x}.$$

Отже:

$$\boxed{y = 1 + Ce^{-x}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = -Ce^{-x}.$$

Підставимо у початкове рівняння:

$$y' + y = -Ce^{-x} + 1 + Ce^{-x} = 1.$$

Отримали праву частину початкового рівняння.

Відповідь:

$$\boxed{y = 1 + Ce^{-x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' + y = 2.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' + y = 3.$$

Приклад 2. Лінійне рівняння зі сталим коефіцієнтом

Розв'язати:

$$y' + 2y = 4.$$

Розв'язання

Маємо:

$$P(x) = 2, \quad Q(x) = 4.$$

Крок 1. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int 2 \, dx} = e^{2x}.$$

Крок 2. Помножимо рівняння на e^{2x} .

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 4e^{2x}.$$

Ліва частина:

$$(e^{2x}y)'.$$

Отже:

$$(e^{2x}y)' = 4e^{2x}.$$

Крок 3. Інтегруємо.

$$e^{2x}y = \int 4e^{2x} dx.$$

$$e^{2x}y = 2e^{2x} + C.$$

Крок 4. Виразимо y .

$$y = 2 + Ce^{-2x}.$$

Перевірка

$$y' = -2Ce^{-2x}.$$

Тоді:

$$y' + 2y = -2Ce^{-2x} + 2(2 + Ce^{-2x}).$$

$$y' + 2y = 4.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 2 + Ce^{-2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' + 2y = 6.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' + 3y = 9.$$

Приклад 3. Лінійне рівняння з правою частиною, що залежить від x

Розв'язати:

$$y' + y = x.$$

Розв'язання

Маємо:

$$P(x) = 1, Q(x) = x.$$

Крок 1. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Крок 2. Помножимо рівняння на e^x .

$$e^x y' + e^x y = x e^x.$$

Ліва частина:

$$(e^x y)'.$$

Тому:

$$(e^x y)' = x e^x.$$

Крок 3. Інтегруємо.

$$e^x y = \int x e^x dx.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо інтегрування частинами:

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x.$$

Отже:

$$e^x y = x e^x - e^x + C.$$

Крок 4. Виразимо y .

Поділимо на e^x :

$$y = x - 1 + C e^{-x}.$$

Перевірка

$$y' = 1 - C e^{-x}.$$

Тоді:

$$y' + y = 1 - C e^{-x} + x - 1 + C e^{-x}.$$

$$y' + y = x.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = x - 1 + C e^{-x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' + y = x + 1.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' + y = 2x.$$

Приклад 4. Рівняння, яке спочатку необхідно привести до стандартного вигляду

Розв'язати:

$$2y' + 4y = 6.$$

Розв'язання

Рівняння ще не записане у стандартному вигляді, оскільки коефіцієнт при y' не дорівнює одиниці.

Крок 1. Поділимо всі члени рівняння на 2.

$$y' + 2y = 3.$$

Тепер:

$$P(x) = 2,$$

$$Q(x) = 3.$$

Крок 2. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}.$$

Крок 3. Помножимо рівняння на e^{2x} .

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 3e^{2x}.$$

Тоді:

$$(e^{2x}y)' = 3e^{2x}.$$

Крок 4. Інтегруємо.

$$e^{2x}y = \int 3e^{2x} dx.$$

$$e^{2x}y = \frac{3}{2}e^{2x} + C.$$

Крок 5. Виразимо y .

$$\boxed{y = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}.$$

Перевірка

$$y' = -2Ce^{-2x}.$$

Підставимо у початкове рівняння:

$$2(-2Ce^{-2x}) + 4\left(\frac{3}{2} + Ce^{-2x}\right) = 6.$$

$$-4Ce^{-2x} + 6 + 4Ce^{-2x} = 6.$$

$$6 = 6.$$

Рівність правильна.

Відповідь:

$$y = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$3y' + 6y = 9.$$

2. Розв'язати рівняння

$$2y' + 6y = 8.$$

Приклад 5. Однорідне лінійне рівняння

Розв'язати:

$$y' + 3y = 0.$$

Розв'язання

Маємо:

$$P(x) = 3,$$

$$Q(x) = 0.$$

Крок 1. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int 3 dx} = e^{3x}.$$

Крок 2. Помножимо рівняння на e^{3x} .

$$e^{3x}y' + 3e^{3x}y = 0.$$

Ліва частина є похідною:

$$(e^{3x}y)' = 0.$$

Крок 3. Інтегруємо.

$$e^{3x}y = C.$$

Крок 4. Виразимо y .

$$y = Ce^{-3x}.$$

Перевірка

$$y' = -3Ce^{-3x}.$$

Тоді:

$$y' + 3y = -3Ce^{-3x} + 3Ce^{-3x} = 0.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = Ce^{-3x}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' + 4y = 0.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' - 2y = 0.$$

Приклад 6. Рівняння з від'ємним коефіцієнтом при y

Розв'язати:

$$y' - 2y = 4.$$

Розв'язання

Маємо:

$$\begin{aligned} P(x) &= -2, \\ Q(x) &= 4. \end{aligned}$$

Крок 1. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int (-2) dx} = e^{-2x}.$$

Крок 2. Помножимо рівняння на e^{-2x} .

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 4e^{-2x}.$$

Ліва частина:

$$(e^{-2x}y)'.$$

Отже:

$$(e^{-2x}y)' = 4e^{-2x}.$$

Крок 3. Інтегруємо.

$$e^{-2x}y = \int 4e^{-2x} dx.$$

$$e^{-2x}y = -2e^{-2x} + C.$$

Крок 4. Виразимо y .

$$y = -2 + Ce^{2x}.$$

Перевірка

$$y' = 2Ce^{2x}.$$

Підставляємо:

$$y' - 2y = 2Ce^{2x} - 2(-2 + Ce^{2x}).$$

$$= 2Ce^{2x} + 4 - 2Ce^{2x} = 4.$$

Відповідь:

$$y = -2 + Ce^{2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' - y = 3.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' - 3y = 6.$$

6. Задача Коші

Якщо разом із диференціальним рівнянням задана умова

$$y(x_0) = y_0,$$

то потрібно знайти не всю множину розв'язків, а конкретний розв'язок, який задовольняє цю умову.

Така задача називається **задачею Коші**.

Порядок розв'язування:

1. Знайти загальний розв'язок рівняння.
2. Підставити початкові значення x_0 і y_0 .
3. Знайти сталу C .
4. Підставити знайдене значення C у загальний розв'язок.

5. Записати частинний розв'язок.

6. Виконати перевірку.

Приклад 7. Задача Коші

Розв'язати рівняння

$$y' + y = 2,$$

якщо

$$y(0) = 3.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо загальний розв'язок.

Для рівняння

$$y' + y = 2$$

маємо:

$$P(x) = 1, Q(x) = 2.$$

Інтегруючий множник:

$$\mu(x) = e^x.$$

Помножимо рівняння на e^x :

$$e^x y' + e^x y = 2e^x.$$

Отже:

$$(e^x y)' = 2e^x.$$

Інтегруємо:

$$e^x y = 2e^x + C.$$

Звідси:

$$y = 2 + Ce^{-x}.$$

Крок 2. Використаємо початкову умову.

За умовою:

$$y(0) = 3.$$

Підставляємо:

$$3 = 2 + Ce^0.$$

Оскільки

$$e^0 = 1,$$

маємо:

$$3 = 2 + C.$$

Звідси:

$$C = 1.$$

Крок 3. Запишемо частинний розв'язок.

$$\boxed{y = 2 + e^{-x}}.$$

Перевірка початкової умови

$$y(0) = 2 + e^0 = 2 + 1 = 3.$$

Умова виконується.

Перевірка рівняння

$$y' = -e^{-x}.$$

Тоді:

$$y' + y = -e^{-x} + 2 + e^{-x} = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 2 + e^{-x}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 3, y(0) = 5.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 2y = 4, y(0) = 1.$$

Приклад 8. Задача Коші для однорідного рівняння

Розв'язати:

$$y' + 2y = 0,$$

якщо

$$y(0) = 4.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо загальний розв'язок.

$$P(x) = 2.$$

Інтегруючий множник:

$$\mu(x) = e^{2x}.$$

Помножимо рівняння:

$$e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 0.$$

Отже:

$$(e^{2x}y)' = 0.$$

Інтегруємо:

$$e^{2x}y = C.$$

Тому:

$$y = Ce^{-2x}.$$

Крок 2. Використаємо початкову умову.

$$4 = Ce^0.$$

Отже:

$$C = 4.$$

Тому:

$$\boxed{y = 4e^{-2x}.$$

Перевірка

$$y' = -8e^{-2x}.$$

Тоді:

$$y' + 2y = -8e^{-2x} + 8e^{-2x} = 0.$$

Початкова умова:

$$y(0) = 4e^0 = 4.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 4e^{-2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 3y = 0, y(0) = 2.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' - 2y = 0, y(0) = 5.$$

Приклад 9. Задача Коші з початковою умовою при $x = 1$

Розв'язати:

$$y' + y = 1,$$

якщо

$$y(1) = 2.$$

Розв'язання

Загальний розв'язок рівняння

$$y' + y = 1$$

має вигляд:

$$y = 1 + Ce^{-x}.$$

Використаємо початкову умову:

$$y(1) = 2.$$

Отже:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + Ce^{-1}. \\ 1 &= Ce^{-1}. \end{aligned}$$

Звідси:

$$C = e.$$

Підставимо знайдене значення:

$$y = 1 + ee^{-x}.$$

Отже:

$$\boxed{y = 1 + e^{1-x}}.$$

Перевірка початкової умови

$$y(1) = 1 + e^{1-1} = 1 + 1 = 2.$$

Відповідь:

$$\boxed{y = 1 + e^{1-x}}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 2, y(1) = 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 2y = 4, y(1) = 5.$$

Приклад 10. Рівняння з функцією $P(x)$

Розв'язати:

$$y' + \frac{1}{x}y = x, x > 0.$$

Розв'язання

Маємо:

$$P(x) = \frac{1}{x},$$

$$Q(x) = x.$$

Крок 1. Знайдемо інтегруючий множник.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx}.$$

При $x > 0$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x.$$

Тому:

$$\mu(x) = e^{\ln x} = x.$$

Крок 2. Помножимо рівняння на x .

$$xy' + y = x^2.$$

Ліва частина є похідною добутку:

$$(xy)' = x^2.$$

Крок 3. Інтегруємо.

$$xy = \int x^2 dx.$$

$$xy = \frac{x^3}{3} + C.$$

Крок 4. Виразимо y .

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}.$$

Перевірка

Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2}.$$

Тоді:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}\right).$$

Розкриваємо дужки:

$$= \frac{2x}{3} - \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}.$$

$$= x.$$

Отримали праву частину початкового рівняння.

Відповідь:

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}, x > 0.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати рівняння

$$y' + \frac{1}{x}y = 1, x > 0.$$

2. Розв'язати рівняння

$$y' + \frac{2}{x}y = x, x > 0.$$

Типові помилки під час розв'язування

Під час самостійної роботи необхідно уникати таких помилок:

1. Неправильне визначення порядку диференціального рівняння.
2. Неправильне приведення рівняння до стандартного вигляду.
3. Помилка при визначенні $P(x)$ та $Q(x)$.
4. Пропуск знака «мінус» у функції $P(x)$.
5. Неправильне обчислення інтегруючого множника.
6. Множення на інтегруючий множник не всіх членів рівняння.
7. Неправильне розпізнавання похідної добутку.
8. Пропуск сталої інтегрування C .
9. Неправильне визначення сталої C за початковою умовою.
10. Відсутність перевірки отриманого розв'язку.

Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що називається порядком диференціального рівняння?
3. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
4. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним?
5. Запишіть стандартний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку.
6. Що позначає функція $P(x)$?
7. Що позначає функція $Q(x)$?
8. Яке лінійне диференціальне рівняння називається однорідним?
9. Яке лінійне диференціальне рівняння називається неоднорідним?
10. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
11. Що називається загальним розв'язком?
12. Що називається частинним розв'язком?
13. Що називається початковою умовою?
14. Що називається задачею Коші?
15. Для чого використовують інтегруючий множник?

16. За якою формулою знаходять інтегруючий множник?
17. Що потрібно зробити з рівнянням після знаходження інтегруючого множника?
18. У яку похідну перетворюється ліва частина рівняння після множення на інтегруючий множник?
19. Яку дію виконують після отримання рівності $(\mu y)' = \mu Q(x)$?
20. Як отримати функцію у після інтегрування?
21. Як знайти сталу C , якщо задана початкова умова?
22. Як перевірити правильність загального розв'язку?
23. Як перевірити правильність частинного розв'язку?
24. Чому необхідно спочатку привести рівняння до стандартного вигляду?
25. Що потрібно зробити, якщо коефіцієнт при y' не дорівнює одиниці?
26. Чому важливо правильно визначити знак функції $P(x)$?
27. Який інтегруючий множник має рівняння $y' + 2y = Q(x)$?
28. Який інтегруючий множник має рівняння $y' - 3y = Q(x)$?
29. Який інтегруючий множник має рівняння $y' + \frac{1}{x}y = Q(x)$ при $x > 0$?
30. Які основні етапи розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку?

Завдання для виконання

Завдання 1

Визначити функції $P(x)$ та $Q(x)$ у рівнянні

$$y' + 3y = 2x.$$

Завдання 2

Розв'язати лінійне диференціальне рівняння:

$$y' + y = 4.$$

Виконати перевірку.

Завдання 3

Розв'язати:

$$y' + 2y = 6.$$

Виконати перевірку отриманого загального розв'язку.

Завдання 4

Розв'язати:

$$y' - 2y = 4.$$

Завдання 5

Спочатку привести до стандартного вигляду, а потім розв'язати:

$$2y' + 4y = 8.$$

Завдання 6

Розв'язати:

$$y' + y = x.$$

Завдання 7

Розв'язати задачу Коші:

$$y' + y = 2,$$

якщо

$$y(0) = 4.$$

Завдання 8

Розв'язати задачу Коші:

$$y' + 2y = 0,$$

якщо

$$y(0) = 3.$$

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**.

Кожний варіант містить три завдання:

1. розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку;
2. розв'язати лінійне диференціальне рівняння та виконати перевірку;
3. розв'язати задачу Коші та знайти частинний розв'язок.

Варіант 1

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + y = 2$.

2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 4$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + y = 3$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 2

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + y = 4$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 6$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 4$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 3

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = 6$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - y = 2$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 6$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 4

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 3y = 9$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - 2y = 4$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + y = 2$, якщо $y(0) = 5$.

Варіант 5

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 4y = 8$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 8$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 6$, якщо $y(0) = 1$.

Варіант 6

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - y = 3$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 3$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.

3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 0$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 7

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - 2y = 6$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 4y = 12$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - y = 2$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 8

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = 2$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - 3y = 6$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 4y = 8$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 9

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 5y = 10$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 10$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - 2y = 4$, якщо $y(0) = 1$.

Варіант 10

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - 3y = 9$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 12$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + y = 4$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 11

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = 5$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 4y = 4$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.

3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 8$, якщо $y(0) = 5$.

Варіант 12

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 3y = 5$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - 2y = 8$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 9$, якщо $y(0) = 1$.

Варіант 13

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - y = 5$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 5y = 15$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - y = 3$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 14

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 4y = 12$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - 3y = 3$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 4y = 4$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 15

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 5y = 5$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 12$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - 2y = 6$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 16

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - 4y = 8$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 15$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + y = 5$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 17

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = 7$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - y = 6$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 2$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 18

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 3y = 12$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 4y = 16$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - 3y = 3$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 19

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - 2y = 8$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 5y = 20$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 3$, якщо $y(0) = 5$.

Варіант 20

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 4y = 16$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' - 4y = 4$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 4y = 12$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 21

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 2x$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + y = 1$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 22

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + y = x + 1$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 3x$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 4$, якщо $y(0) = 6$.

Варіант 23

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + y = 2x + 1$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - y = 4$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 24

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 3y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = x + 2$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 6$, якщо $y(0) = 5$.

Варіант 25

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + y = 3x$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 4y = 8$, якщо $y(0) = 1$.

Варіант 26

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 2y = x + 1$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = 2x$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - 2y = 2$, якщо $y(0) = 4$.

Варіант 27

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 3y = x + 2$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + y = 4x$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 5y = 10$, якщо $y(0) = 3$.

Варіант 28

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' - 2y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 3x + 1$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 2y = 6$, якщо $y(0) = 5$.

Варіант 29

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 4y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 3y = x + 3$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - 3y = 6$, якщо $y(0) = 2$.

Варіант 30

1. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + 5y = x$.
2. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + 2y = 4x + 2$ та виконати перевірку отриманого загального розв'язку.
3. Розв'язати задачу Коші $y' + 3y = 9$, якщо $y(0) = 4$.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

Під час виконання **першого та другого завдань** необхідно:

1. Записати задане диференціальне рівняння.
2. Привести його до стандартного вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

3. Визначити функції $P(x)$ та $Q(x)$.
4. Знайти інтегруючий множник.
5. Помножити всі члени рівняння на інтегруючий множник.
6. Подати ліву частину як похідну добутку.
7. Проінтегрувати обидві частини.
8. Виразити невідому функцію y .
9. Записати загальний розв'язок.
10. Виконати перевірку підстановкою у початкове рівняння.

Під час виконання **третього завдання** додатково необхідно:

1. Знайти загальний розв'язок.
2. Використати задану початкову умову.
3. Визначити сталу інтегрування C .
4. Записати частинний розв'язок.
5. Перевірити виконання початкової умови.
6. Перевірити отриману функцію підстановкою у диференціальне рівняння.

Підсумок самостійної роботи

Після опрацювання теми здобувач освіти повинен уміти розпізнавати лінійне диференціальне рівняння першого порядку та приводити його до стандартного вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Основним елементом розглянутого способу розв'язування є знаходження інтегруючого множника:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}.$$

Після множення рівняння на інтегруючий множник ліва частина перетворюється на похідну добутку:

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)Q(x).$$

Після інтегрування отримуємо загальний розв'язок:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x) Q(x) dx + C \right].$$

Якщо додатково задана початкова умова

$$y(x_0) = y_0,$$

необхідно знайти значення довільної сталої C та отримати відповідний частинний розв'язок.

Правильність знайденого розв'язку доцільно перевіряти підстановкою функції у та її похідної y' у початкове диференціальне рівняння.

Опанування цієї теми є необхідною складовою змістового модуля 5 «Диференціальні рівняння» і створює основу для подальшого розв'язування диференціальних рівнянь та побудови математичних моделей процесів.

План самостійного вивчення теми № 9 з навчальної дисципліни «Вища математика»

СРС 9. Диференціальні рівняння другого порядку. Математичні моделі механічних процесів

Тема: Диференціальні рівняння другого порядку. Математичні моделі механічних процесів.

Час — 2 години.

Тема завершує самостійну роботу змістового модуля 5 «**Диференціальні рівняння**». Її вивчення ґрунтується на знаннях про похідні першого і другого порядків, первісну, невизначений інтеграл, диференціальні рівняння першого порядку та початкові умови.

Особливе значення тема має для технічних спеціальностей, оскільки диференціальні рівняння другого порядку використовують для математичного опису **руху матеріальної точки, зміни швидкості та прискорення, коливального руху, механічних коливань пружної системи, а також процесів, що відбуваються у механічних системах.** Для спеціальності І8 «Автомобільний транспорт» ці математичні засоби створюють основу для подальшого моделювання руху автомобіля та коливальних процесів його підвіски.

Мета

Знати:

- поняття диференціального рівняння другого порядку;
- поняття загального та частинного розв'язків диференціального рівняння другого порядку;
- роль двох довільних сталих у загальному розв'язку;
- поняття початкових умов для диференціального рівняння другого порядку;
- фізичний зміст першої та другої похідних координати за часом;
- зв'язок між координатою, швидкістю та прискоренням;
- найпростіші види диференціальних рівнянь другого порядку;
- принцип розв'язування рівнянь виду $y'' = f(x)$;

- поняття лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;
- поняття характеристичного рівняння;
- залежність загального розв'язку від коренів характеристичного рівняння;
- основи побудови математичних моделей механічного руху;
- математичну модель вільних механічних коливань;
- математичний зміст моделей руху з постійним прискоренням;
- початкові умови, які задають початкове положення та початкову швидкість механічної системи.

Вміти:

- визначати порядок диференціального рівняння;
- розпізнавати диференціальні рівняння другого порядку;
- розв'язувати найпростіші рівняння виду $y'' = f(x)$;
- двічі інтегрувати праву частину рівняння;
- знаходити дві сталі інтегрування за двома початковими умовами;
- складати характеристичне рівняння;
- знаходити корені характеристичного рівняння;
- записувати загальний розв'язок при різних типах коренів;
- використовувати зв'язок між переміщенням, швидкістю та прискоренням;
- складати найпростіші математичні моделі механічних процесів;
- знаходити закон руху за заданим прискоренням та початковими умовами;
- застосовувати диференціальне рівняння до опису найпростіших коливальних процесів;
- перевіряти отримані розв'язки.

Навчальні питання

1. Поняття диференціального рівняння другого порядку.
2. Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння другого порядку.

3. Початкові умови для рівнянь другого порядку.
4. Рівняння виду $y'' = f(x)$.
5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
6. Характеристичне рівняння.
7. Види коренів характеристичного рівняння та відповідні загальні розв'язки.
8. Поняття математичної моделі механічного процесу.
9. Диференціальні рівняння руху.
10. Математична модель вільних механічних коливань.

Методичні рекомендації

Під час самостійного опрацювання теми рекомендується дотримуватися такої послідовності.

По-перше: повторити фізичний і математичний зміст першої та другої похідних. Якщо $s = s(t)$ є законом руху матеріальної точки, то перша похідна характеризує швидкість, а друга — прискорення.

По-друге: необхідно засвоїти, що диференціальне рівняння другого порядку містить другу похідну невідомої функції. У загальному випадку його розв'язок містить **дві довільні сталі**.

По-третє: під час розв'язування найпростіших рівнянь виду $y'' = f(x)$ потрібно послідовно виконати два інтегрування.

По-четверте: якщо задані дві початкові умови, наприклад

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

за ними необхідно визначити дві довільні сталі.

По-п'яте: для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами потрібно правильно скласти характеристичне рівняння та визначити тип його коренів.

По-шосте: під час розв'язування прикладних механічних задач необхідно спочатку встановити, яка фізична величина є невідомою функцією, а вже після цього скласти диференціальне рівняння.

По-сьоме: у механічних задачах обов'язково необхідно стежити за одиницями вимірювання та фізичним змістом отриманого результату.

Рекомендована література

1. **Кушлик-Дивульська О. І., Селезньова Н. П., Авдєєва Т. В.** *Вища математика. Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння* : практикум : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2024. 170 сторінок.
2. **Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В.** *Вища математика: Функції багатьох змінних. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння: Збірник індивідуальних завдань* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022. 78 сторінок.
3. **Массалітіна Є. В., Пилипенко В. А.** *Вища математика: Диференціальні рівняння: Практикум* : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2021. 36 сторінок.
4. **Коваль О. О., Поліщук О. Б., Стогній В. І.** *Вища математика. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, 2022.
5. **Кулик Г. М., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П.** *Вища математика. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Київ : Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2016. 278 сторінок.
6. **Кашканова Г. Г., Коломієць А. А.** *Диференціальні рівняння* : навчальний посібник. Вінниця : Вінницький національний технічний університет, 2025. 75 сторінок.
7. **Робоча програма навчальної дисципліни «Вища математика» для спеціальності J8 «Автомобільний транспорт».** Заклад професійної освіти «Дніпровський професійний технологічний коледж», 2026.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

1. Поняття диференціального рівняння другого порядку

Диференціальним рівнянням **другого порядку** називається диференціальне рівняння, до якого входить друга похідна невідомої функції, а похідні вищих порядків відсутні.

У загальному вигляді:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Наприклад:

$$y'' = 6x,$$

$$y'' + 4y = 0,$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

У кожному із цих рівнянь найвищою похідною є y'' , тому вони є диференціальними рівняннями другого порядку.

2. Загальний розв'язок

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку за відповідних умов містить **дві довільні сталі**:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Наявність двох сталих пов'язана з тим, що для знаходження функції з її другої похідної необхідно двічі виконати інтегрування.

Наприклад, нехай

$$y'' = 6x.$$

Інтегруємо один раз:

$$y' = 3x^2 + C_1.$$

Інтегруємо вдруге:

$$y = x^3 + C_1x + C_2.$$

Отже,

$$y = x^3 + C_1x + C_2$$

є загальним розв'язком.

3. Початкові умови

Для знаходження конкретного частинного розв'язку диференціального рівняння другого порядку зазвичай задають дві початкові умови:

$$\boxed{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1.}$$

Перша умова визначає значення самої функції, а друга — значення її першої похідної.

У механічній задачі, якщо

$$s = s(t),$$

то умови

$$s(0) = s_0, s'(0) = v_0$$

означають відповідно **початкове положення** та **початкову швидкість**.

4. Рівняння виду $y'' = f(x)$

Одним із найпростіших типів рівнянь другого порядку є

$$\boxed{y'' = f(x).}$$

Для його розв'язування необхідно **двічі проінтегрувати** праву частину.

Спочатку:

$$y' = \int f(x) dx + C_1.$$

Потім:

$$y = \int y' dx + C_2.$$

Приклад 1. Найпростіше рівняння другого порядку

Розв'язати:

$$y'' = 6x.$$

Розв'язання

Крок 1. Проінтегруємо рівняння перший раз.

$$y' = \int 6x dx.$$

$$y' = 3x^2 + C_1.$$

Крок 2. Проінтегруємо другий раз.

$$y = \int (3x^2 + C_1) dx.$$

$$y = x^3 + C_1x + C_2.$$

Перевірка

Знайдемо похідні:

$$y' = 3x^2 + C_1,$$

$$y'' = 6x.$$

Отримали початкове рівняння.

Відповідь

$$\boxed{y = x^3 + C_1x + C_2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' = 8x.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' = 12x^2.$$

Приклад 2. Рівняння зі сталою правою частиною

Розв'язати:

$$y'' = 4.$$

Розв'язання

Крок 1. Інтегруємо перший раз.

$$y' = \int 4 dx.$$

$$y' = 4x + C_1.$$

Крок 2. Інтегруємо другий раз.

$$y = \int (4x + C_1) dx.$$

$$y = 2x^2 + C_1x + C_2.$$

Перевірка

$$y' = 4x + C_1,$$

$$y'' = 4.$$

Отже, отримана функція задовольняє задане рівняння.

Відповідь

$$\boxed{y = 2x^2 + C_1x + C_2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати:

$$y'' = 6.$$

2. Розв'язати:

$$y'' = -4.$$

Приклад 3. Знаходження частинного розв'язку за двома початковими умовами

Розв'язати:

$$y'' = 6x,$$

якщо

$$y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Розв'язання

Крок 1. Знайдемо загальний розв'язок.

Після першого інтегрування:

$$y' = 3x^2 + C_1.$$

Після другого:

$$y = x^3 + C_1x + C_2.$$

Крок 2. Використаємо умову $y'(0) = 1$.

$$1 = 3 \cdot 0^2 + C_1.$$

Отже:

$$C_1 = 1.$$

Крок 3. Використаємо умову $y(0) = 2$.

$$2 = 0^3 + 1 \cdot 0 + C_2.$$

Отже:

$$C_2 = 2.$$

Крок 4. Запишемо частинний розв'язок.

$$\boxed{y = x^3 + x + 2.}$$

Перевірка

$$y' = 3x^2 + 1,$$

$$y'' = 6x.$$

Початкові умови:

$$y(0) = 2,$$

$$y'(0) = 1.$$

Усі умови виконуються.

Відповідь

$$\boxed{y = x^3 + x + 2.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати задачу

$$y'' = 4x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

2. Розв'язати задачу

$$y'' = 6, y(0) = 3, y'(0) = -1.$$

5. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Таке рівняння має вигляд

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0,}$$

де a, b, c — сталі числа, причому

$$a \neq 0.$$

Для його розв'язування складають **характеристичне рівняння**:

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0.}$$

Подальший вигляд загального розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння.

6. Випадок двох різних дійсних коренів

Якщо характеристичне рівняння має два різні дійсні корені

$$r_1 \neq r_2,$$

то загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Приклад 4. Два різні дійсні корені

Розв'язати:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Розв'язання

Крок 1. Складемо характеристичне рівняння.

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Крок 2. Розкладемо ліву частину на множники.

$$(r - 1)(r - 2) = 0.$$

Отже:

$$r_1 = 1, r_2 = 2.$$

Крок 3. Запишемо загальний розв'язок.

Оскільки корені різні та дійсні:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Перевірка

Знайдемо похідні:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x},$$

$$y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}.$$

Підставимо:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= \\ &= C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} - 3(C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}) + 2(C_1 e^x + C_2 e^{2x}). \end{aligned}$$

Після зведення подібних доданків:

0.

Отже, розв'язок правильний.

Відповідь

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

2. Розв'язати:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

7. Випадок кратного дійсного кореня

Якщо характеристичне рівняння має один дійсний корінь r кратності два, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

Приклад 5. Кратний корінь

Розв'язати:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Розкладемо на множники:

$$(r - 2)^2 = 0.$$

Отже:

$$r = 2.$$

Корінь є кратним.

Тому загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}.$$

Відповідь

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

2. Розв'язати:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

8. Випадок комплексно спряжених коренів

Якщо характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

то загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Цей випадок має особливо важливе значення під час математичного опису коливальних процесів.

Приклад 6. Диференціальне рівняння коливального типу

Розв'язати:

$$y'' + 4y = 0.$$

Розв'язання

Крок 1. Складемо характеристичне рівняння.

$$r^2 + 4 = 0.$$

Звідси:

$$r^2 = -4.$$

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Маємо:

$$\alpha = 0, \beta = 2.$$

Крок 2. Запишемо загальний розв'язок.

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Перевірка

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x.$$

$$y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x.$$

Отже:

$$y'' = -4y.$$

Тому:

$$y'' + 4y = 0.$$

Відповідь

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати:

$$y'' + 9y = 0.$$

2. Розв'язати:

$$y'' + 16y = 0.$$

9. Математичні моделі механічних процесів

Математичною моделлю механічного процесу називають математичний опис, який відображає основні закономірності зміни механічних величин у часі або просторі.

Такими величинами можуть бути:

- координата;
- переміщення;
- швидкість;
- прискорення;
- сила;
- деформація;
- відхилення системи від положення рівноваги.

Якщо положення матеріальної точки визначається функцією

$$s = s(t),$$

то її швидкість:

$$v(t) = s'(t),$$

а прискорення:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Отже, якщо відоме прискорення, закон руху можна знайти шляхом дворазового інтегрування.

Приклад 7. Математична модель рівноприскореного руху

Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням

$$a = 2 \text{ м/с}^2.$$

У початковий момент часу:

$$s(0) = 0,$$

$$v(0) = 3 \text{ м/с}.$$

Знайти закон руху $s(t)$.

Розв'язання

Оскільки

$$a(t) = s''(t),$$

отримуємо диференціальне рівняння:

$$s''(t) = 2.$$

Крок 1. Знайдемо швидкість.

Інтегруємо:

$$s'(t) = 2t + C_1.$$

Але:

$$s'(t) = v(t).$$

Тому:

$$v(t) = 2t + C_1.$$

Використаємо початкову умову:

$$v(0) = 3.$$

$$3 = C_1.$$

Отже:

$$v(t) = 2t + 3.$$

Крок 2. Знайдемо закон руху.

$$s(t) = \int (2t + 3) dt.$$

$$s(t) = t^2 + 3t + C_2.$$

Використаємо умову:

$$s(0) = 0.$$

Звідси:

$$C_2 = 0.$$

Отже:

$$\boxed{s(t) = t^2 + 3t.}$$

Перевірка

$$s'(t) = 2t + 3,$$

$$s''(t) = 2.$$

Початкові умови:

$$s(0) = 0,$$

$$s'(0) = 3.$$

Усі умови виконуються.

Відповідь

$$\boxed{s(t) = t^2 + 3t \text{ м.}}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням $a = 4 \text{ м/с}^2$. Відомо, що $s(0) = 0$, $v(0) = 2 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.
2. Матеріальна точка рухається з прискоренням $a = 3 \text{ м/с}^2$. У початковий момент $s(0) = 5 \text{ м}$, $v(0) = 1 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.

Приклад 8. Математична модель гальмування

Автомобіль починає гальмування зі швидкістю

$$v_0 = 20 \text{ м/с.}$$

Під час гальмування прискорення вважаємо сталим:

$$a = -4 \text{ м/с}^2.$$

У момент початку гальмування:

$$s(0) = 0.$$

Знайти закон зміни швидкості, закон руху та час до зупинки.

Розв'язання

Математична модель:

$$s''(t) = -4.$$

Крок 1. Знайдемо швидкість.

$$s'(t) = \int (-4) dt.$$

$$v(t) = -4t + C_1.$$

За початковою умовою:

$$v(0) = 20.$$

Тому:

$$C_1 = 20.$$

Отже:

$$\boxed{v(t) = 20 - 4t.}$$

Крок 2. Знайдемо закон руху.

$$s(t) = \int (20 - 4t) dt.$$

$$s(t) = 20t - 2t^2 + C_2.$$

Оскільки:

$$s(0) = 0,$$

то:

$$C_2 = 0.$$

Отже:

$$s(t) = 20t - 2t^2.$$

Крок 3. Знайдемо час зупинки.

У момент зупинки:

$$v(t) = 0.$$

Тому:

$$20 - 4t = 0.$$

$$4t = 20.$$

$$t = 5 \text{ с.}$$

Перевірка

$$s'(t) = 20 - 4t = v(t),$$

$$s''(t) = -4 = a.$$

Відповідь

$$v(t) = 20 - 4t \text{ м/с,}$$

$$s(t) = 20t - 2t^2 \text{ м,}$$

$$t_{\text{зупинки}} = 5 \text{ с.}$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Автомобіль починає гальмування зі швидкістю 24 м/с. Стале прискорення дорівнює -6 м/с^2 , початковий шлях дорівнює нулю. Знайти закон зміни швидкості, закон руху та час до повної зупинки.
2. Автомобіль рухається зі швидкістю 18 м/с і починає гальмувати зі сталим прискоренням -3 м/с^2 . Вважаючи $s(0) = 0$, знайти закон зміни швидкості, закон руху та час зупинки.

10. Математична модель вільних механічних коливань

Розглянемо матеріальну точку маси m , яка здійснює коливання під дією пружної сили.

За законом Гука:

$$F = -kx,$$

де:

- F — сила пружності;
- k — коефіцієнт жорсткості;
- x — відхилення від положення рівноваги.

За другим законом Ньютона:

$$F = ma.$$

Оскільки:

$$a = x''(t),$$

маємо:

$$mx'' = -kx.$$

Перенесемо всі члени в одну частину:

$$\boxed{mx'' + kx = 0.}$$

Поділимо на m :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Позначимо:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Отримаємо класичне рівняння вільних незатухаючих коливань:

$$\boxed{x'' + \omega^2 x = 0.}$$

Його загальний розв'язок:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.}$$

Величина ω називається **кутовою частотою власних коливань**.

Приклад 9. Математична модель коливальної системи

Розв'язати рівняння

$$x'' + 9x = 0,$$

якщо

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$$

Розв'язання

Крок 1. Складемо характеристичне рівняння.

$$r^2 + 9 = 0.$$

$$r^2 = -9.$$

$$r_{1,2} = \pm 3i.$$

Тому:

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Крок 2. Використаємо першу початкову умову.

$$x(0) = 2.$$

$$2 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0.$$

Оскільки

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$$

маємо:

$$C_1 = 2.$$

Крок 3. Знайдемо похідну.

$$x'(t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t.$$

За умовою:

$$x'(0) = 0.$$

Тому:

$$0 = 3C_2.$$

$$C_2 = 0.$$

Отже:

$$\boxed{x(t) = 2 \cos 3t.}$$

Перевірка

$$x'(t) = -6 \sin 3t,$$

$$x''(t) = -18 \cos 3t.$$

Підставимо:

$$x'' + 9x = -18 \cos 3t + 9 \cdot 2 \cos 3t = 0.$$

Початкові умови також виконуються.

Відповідь

$$x(t) = 2 \cos 3 t.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Розв'язати задачу

$$x'' + 4x = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

2. Розв'язати задачу

$$x'' + 16x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Приклад 10. Модель механічної системи «маса — пружина»

Маса вантажу:

$$m = 2 \text{ кг},$$

коефіцієнт жорсткості пружини:

$$k = 8 \text{ Н/м}.$$

Опором руху нехтуємо. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань та знайти загальний закон руху.

Розв'язання

Математична модель вільних коливань:

$$mx'' + kx = 0.$$

Підставимо:

$$2x'' + 8x = 0.$$

Поділимо на 2:

$$x'' + 4x = 0.$$

Отже, характеристичне рівняння:

$$r^2 + 4 = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Тому загальний закон руху:

$$x(t) = C_1 \cos 2 t + C_2 \sin 2 t.$$

Кутова частота:

$$\omega = 2 \text{ рад/с.}$$

Відповідь

Диференціальне рівняння:

$$x'' + 4x = 0.$$

Загальний закон руху:

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Завдання для самостійного виконання за зразком

1. Маса вантажу дорівнює 1 кг, коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює 9 Н/м. Опором руху знехтувати. Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.
2. Маса вантажу дорівнює 4 кг, коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює 16 Н/м. Опором руху знехтувати. Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Зв'язок математичної моделі з механічним процесом

Для правильного складання математичної моделі важливо розуміти відповідність між математичними та механічними величинами:

Механічна величина	Математичний запис
Положення або переміщення	$s(t)$ або $x(t)$
Швидкість	$v(t) = s'(t)$
Прискорення	$a(t) = s''(t)$
Початкове положення	$s(0) = s_0$
Початкова швидкість	$s'(0) = v_0$
Сила	$F = ma$
Пружна сила	$F = -kx$
Вільні коливання	$mx'' + kx = 0$

Таким чином, диференціальне рівняння дає можливість перейти від фізичного опису механічного процесу до його математичної моделі.

Типові помилки під час розв'язування

1. Визначення рівняння другого порядку як рівняння першого порядку.
2. Використання лише однієї сталої після двох інтегрувань.
3. Пропуск сталої C_1 після першого інтегрування.
4. Неправильне використання початкових умов.
5. Плутання функції $s(t)$, швидкості $v(t)$ та прискорення $a(t)$.
6. Неправильне складання характеристичного рівняння.
7. Неправильне визначення коренів характеристичного рівняння.
8. Використання формули для різних дійсних коренів у випадку кратного кореня.
9. Неправильний запис розв'язку при комплексно спряжених коренях.
10. Втрата знака «мінус» у законі Гука.
11. Відсутність одиниць вимірювання у прикладних задачах.
12. Відсутність перевірки отриманого розв'язку.

Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням другого порядку?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку.
4. Скільки довільних сталих зазвичай містить загальний розв'язок рівняння другого порядку?
5. Чому у загальному розв'язку виникають дві довільні сталі?
6. Що називається частинним розв'язком?
7. Скільки початкових умов зазвичай потрібно для визначення двох сталих?
8. Які початкові умови можуть бути задані для рівняння другого порядку?
9. Як розв'язується рівняння виду $y'' = f(x)$?
10. Скільки разів потрібно інтегрувати функцію $f(x)$?

11. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
12. Що називається характеристичним рівнянням?
13. Як складається характеристичне рівняння?
14. Який вигляд має загальний розв'язок при двох різних дійсних коренях?
15. Який вигляд має загальний розв'язок при кратному дійсному корені?
16. Який вигляд має загальний розв'язок при комплексно спряжених коренях?
17. Що називається математичною моделлю механічного процесу?
18. Як пов'язані координата, швидкість та прискорення?
19. Який математичний зміст має перша похідна закону руху?
20. Який математичний зміст має друга похідна закону руху?
21. Як знайти закон руху, якщо відоме прискорення?
22. Що означає початкова умова $s(0) = s_0$?
23. Що означає початкова умова $s'(0) = v_0$?
24. Яке диференціальне рівняння описує вільні незатухаючі коливання системи «маса — пружина»?
25. Що означає коефіцієнт k у рівнянні $mx'' + kx = 0$?
26. Що означає величина m у цьому рівнянні?
27. Як визначається кутова частота власних коливань?
28. Як математично описати рівноприскорений рух?
29. Як математично описати рух із постійним від'ємним прискоренням під час гальмування?
30. Як перевірити правильність знайденого розв'язку диференціального рівняння другого порядку?

Завдання для виконання

Завдання 1

Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' = 10x.$$

Виконати перевірку отриманого загального розв'язку.

Завдання 2

Розв'язати:

$$y'' = 6x^2.$$

Завдання 3

Знайти частинний розв'язок:

$$y'' = 4,$$

якщо

$$y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

Завдання 4

Розв'язати:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Завдання 5

Розв'язати:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Завдання 6

Розв'язати:

$$y'' + 9y = 0.$$

Завдання 7

Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням

$$a = 3 \text{ м/с}^2.$$

У початковий момент:

$$s(0) = 2 \text{ м}, v(0) = 4 \text{ м/с}.$$

Скласти диференціальне рівняння руху та знайти закон руху $s(t)$.

Завдання 8

Маса вантажу дорівнює

$$m = 2 \text{ кг},$$

а коефіцієнт жорсткості пружини

$$k = 18 \text{ Н/м}.$$

Опором руху знехтувати. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань та знайти загальний закон руху.

Індивідуальні завдання для самостійного виконання

Кожний здобувач освіти виконує **один варіант відповідно до свого номера**.

У кожному варіанті передбачено три завдання:

1. розв'язування найпростішого диференціального рівняння другого порядку з початковими умовами;
2. розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;
3. складання та розв'язування математичної моделі механічного процесу.

Варіант 1

1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 4x$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням 2 м/с^2 . У початковий момент $s(0) = 0$, $v(0) = 3 \text{ м/с}$. Скласти диференціальне рівняння та знайти закон руху.

Варіант 2

1. Розв'язати $y'' = 6x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 5y' + 6y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 3 м/с^2 . Відомо, що $s(0) = 1 \text{ м}$, $v(0) = 2 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.

Варіант 3

1. Розв'язати $y'' = 8x$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
2. Розв'язати $y'' + 3y' + 2y = 0$.
3. Автомобіль починає гальмування зі швидкістю 20 м/с зі сталим прискоренням -5 м/с^2 . Вважаючи $s(0) = 0$, знайти закон швидкості, закон руху та час зупинки.

Варіант 4

1. Розв'язати $y'' = 10x$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

2. Розв'язати $y'' - 4y' + 4y = 0$.
3. Маса вантажу становить 1 кг, жорсткість пружини — 4 Н/м. Скласти рівняння вільних коливань і знайти загальний закон руху.

Варіант 5

1. Розв'язати $y'' = 4$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' + 4y = 0$.
3. Матеріальна точка має прискорення 4 м/с^2 , початкову швидкість 2 м/с і початкове положення $s(0) = 3 \text{ м}$. Знайти закон руху.

Варіант 6

1. Розв'язати $y'' = 6$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
2. Розв'язати $y'' + 9y = 0$.
3. Автомобіль гальмує зі швидкості 24 м/с зі сталим прискоренням -4 м/с^2 . Вважаючи початковий шлях рівним нулю, знайти закон руху та час зупинки.

Варіант 7

1. Розв'язати $y'' = 12x^2$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
2. Розв'язати $y'' - 6y' + 9y = 0$.
3. Маса механічної системи становить 2 кг, коефіцієнт жорсткості пружини — 8 Н/м. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань і знайти загальний закон руху.

Варіант 8

1. Розв'язати $y'' = 6x^2$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 5 м/с^2 , причому $s(0) = 0$, $v(0) = 1 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.

Варіант 9

1. Розв'язати $y'' = 2x + 4$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 16y = 0$.

3. Автомобіль починає гальмувати зі швидкістю 18 м/с зі сталим прискоренням -3 м/с^2 . Знайти закон швидкості, закон руху та час зупинки.

Варіант 10

1. Розв'язати $y'' = 3x^2$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 7y' + 12y = 0$.
3. Маса вантажу дорівнює 4 кг, коефіцієнт жорсткості пружини — 16 Н/м. Скласти диференціальне рівняння вільних коливань та знайти загальний закон руху.

Варіант 11

1. Розв'язати $y'' = 8$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' - 8y' + 15y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 2 м/с^2 , $s(0) = 4 \text{ м}$, $v(0) = 5 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.

Варіант 12

1. Розв'язати $y'' = 4x^2$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
2. Розв'язати $y'' + 5y' + 6y = 0$.
3. Автомобіль рухається зі швидкістю 30 м/с та гальмує зі сталим прискоренням -6 м/с^2 . Знайти час зупинки та закон руху, якщо $s(0) = 0$.

Варіант 13

1. Розв'язати $y'' = 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.
2. Розв'язати $y'' + 25y = 0$.
3. Маса вантажу дорівнює 1 кг, жорсткість пружини — 9 Н/м. Скласти рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Варіант 14

1. Розв'язати $y'' = 6x + 2$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 2y' - 3y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 6 м/с^2 , початковою швидкістю 2 м/с та початковим положенням 1 м. Знайти закон руху.

Варіант 15

1. Розв'язати $y'' = 10$, якщо $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.
2. Розв'язати $y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. Автомобіль має початкову швидкість 25 м/с та гальмує з прискоренням -5 м/с^2 . Вважаючи $s(0) = 0$, знайти закон руху та час зупинки.

Варіант 16

1. Розв'язати $y'' = 9x$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 36y = 0$.
3. Маса механічної системи становить 2 кг, коефіцієнт жорсткості — 18 Н/м. Скласти рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Варіант 17

1. Розв'язати $y'' = 2x^2$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 9y' + 20y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 3 м/с^2 , початковою швидкістю 4 м/с, причому $s(0) = 2 \text{ м}$. Знайти закон руху.

Варіант 18

1. Розв'язати $y'' = 4x + 6$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
2. Розв'язати $y'' + 8y' + 16y = 0$.
3. Автомобіль рухається зі швидкістю 28 м/с та гальмує з прискоренням -7 м/с^2 . Знайти закон швидкості, закон руху та час зупинки.

Варіант 19

1. Розв'язати $y'' = 7x$, якщо $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 49y = 0$.
3. Маса вантажу дорівнює 4 кг, коефіцієнт жорсткості пружини — 36 Н/м. Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Варіант 20

1. Розв'язати $y'' = 12$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
2. Розв'язати $y'' - 10y' + 25y = 0$.

3. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням 4 м/с^2 , причому $s(0) = 3 \text{ м}$, $v(0) = 2 \text{ м/с}$. Знайти закон руху.

Варіант 21

1. Розв'язати $y'' = 3x + 2$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
2. Розв'язати $y'' - 4y' - 5y = 0$.
3. Автомобіль має початкову швидкість 16 м/с гальмує зі сталим прискоренням -4 м/с^2 . Вважаючи $s(0) = 0$, знайти закон руху та час зупинки.

Варіант 22

1. Розв'язати $y'' = 5x^2$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 64y = 0$.
3. Маса вантажу дорівнює 1 кг , коефіцієнт жорсткості пружини — 16 Н/м . Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон руху.

Варіант 23

1. Розв'язати $y'' = 8x + 4$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
2. Розв'язати $y'' + 7y' + 12y = 0$.
3. Матеріальна точка має постійне прискорення 5 м/с^2 , початкову швидкість 3 м/с та початкове положення 2 м . Знайти закон руху.

Варіант 24

1. Розв'язати $y'' = 14$, якщо $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 12y' + 36y = 0$.
3. Автомобіль починає гальмувати зі швидкістю 32 м/с постійним прискоренням -8 м/с^2 . Знайти закон швидкості, закон руху та час зупинки.

Варіант 25

1. Розв'язати $y'' = 6x^2 + 2$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 81y = 0$.
3. Маса механічної системи становить 2 кг , коефіцієнт жорсткості пружини — 32 Н/м . Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Варіант 26

1. Розв'язати $y'' = 11x$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.
2. Розв'язати $y'' - 11y' + 30y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з прискоренням 2 м/с^2 , початковою швидкістю 6 м/с , причому $s(0) = 1 \text{ м}$. Знайти закон руху.

Варіант 27

1. Розв'язати $y'' = 4x^2 + 2x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' + 10y' + 25y = 0$.
3. Автомобіль рухається зі швидкістю 21 м/ста гальмує зі сталим прискоренням -3 м/с^2 . Знайти закон руху та час повної зупинки.

Варіант 28

1. Розв'язати $y'' = 9x + 3$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
2. Розв'язати $y'' + 100y = 0$.
3. Маса вантажу дорівнює 4 кг , жорсткість пружини — 64 Н/м . Скласти диференціальне рівняння та знайти загальний закон вільних коливань.

Варіант 29

1. Розв'язати $y'' = 3x^2 + 6$, якщо $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.
2. Розв'язати $y'' - 13y' + 40y = 0$.
3. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням 6 м/с^2 , початковою швидкістю 4 м/ста початковим положенням 3 м . Знайти закон руху.

Варіант 30

1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 12x + 4$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.
2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 6y' + 8y = 0$.
3. Автомобіль починає гальмувати зі швидкістю 30 м/с зі сталим прискоренням -5 м/с^2 . У момент початку гальмування пройдений шлях прийняти рівним нулю. Скласти диференціальне рівняння руху, знайти закон зміни швидкості, закон руху та час до повної зупинки.

Вимоги до виконання індивідуального завдання

Під час виконання **першого завдання** необхідно:

1. Записати диференціальне рівняння.
2. Виконати перше інтегрування.
3. Обов'язково записати сталу C_1 .
4. Виконати друге інтегрування.
5. Записати сталу C_2 .
6. Використати дві початкові умови.
7. Визначити C_1 і C_2 .
8. Записати частинний розв'язок.
9. Виконати перевірку.

Під час виконання **другого завдання** необхідно:

1. Записати задане рівняння.
2. Скласти характеристичне рівняння.
3. Знайти його корені.
4. Визначити тип коренів.
5. Вибрати відповідну форму загального розв'язку.
6. Записати загальний розв'язок.
7. За можливості виконати перевірку.

Під час виконання **третього завдання** необхідно:

1. Визначити шукану функцію.
2. Встановити зв'язок між функцією, її першою та другою похідними.
3. Скласти диференціальне рівняння механічного процесу.
4. Записати початкові умови.
5. Розв'язати диференціальне рівняння.
6. Використати початкові умови.
7. Записати отриманий закон механічного процесу.

8. Указати одиниці вимірювання.
9. Сформулювати висновок відповідно до фізичного змісту задачі.

Підсумок самостійної роботи

Після опрацювання теми здобувач освіти повинен розуміти, що диференціальне рівняння другого порядку містить другу похідну невідомої функції:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Для найпростішого рівняння

$$y'' = f(x)$$

розв'язок отримують шляхом дворазового інтегрування:

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

після чого

$$y = \int y' dx + C_2.$$

Для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$ay'' + by' + cy = 0$$

складають характеристичне рівняння

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Вигляд загального розв'язку визначається характером коренів цього рівняння.

Особливе практичне значення диференціальні рівняння другого порядку мають під час побудови **математичних моделей механічних процесів**. Якщо $s(t)$ є законом руху, то

$$v(t) = s'(t), a(t) = s''(t).$$

Саме цей зв'язок дозволяє за заданим прискоренням та початковими умовами визначити швидкість і закон руху.

Для найпростішої пружної механічної системи без урахування опору руху математична модель вільних коливань має вигляд

$$mx'' + kx = 0,$$

або

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Загальний закон таких коливань:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$